

УДК 539.3

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ
ИНОРОДНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ НА ПАРАМЕТРЫ ВОЛНОВОГО
ДВИЖЕНИЯ В УПРУГОМ ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

АШИРБАЕВ Н. К., БАЙТЕЛИЕВ Т. Б., КАРИМБАЕВ Т. Д.

Прогнозирование динамических волновых процессов в деформируемых слоисто-неоднородных средах путем математического моделирования для определения характера возможных повреждений и установления закономерностей их развития важно для теории и приложений.

При численном исследовании неустановившихся волновых процессов в слоисто-неоднородных средах наибольшее распространение получили конечно-разностные методы, в частности сеточно-характеристические методы Годунова [1-4], Клиффтона [5-7] и метод конечных разностей [8]. В приложениях наиболее удобным представляется метод пространственных характеристик, облегчающий интерпретацию изучаемых физических явлений.

В [9] решена динамическая задача о двух соединенных четверть пространствах из различных материалов при действии нагрузки на свободных поверхностях параллельно плоскости раздела. Для касательных усилий, изменяющихся во времени t как ступенчатая функция Хевисайда, в замкнутой форме получена зависимость напряжений сдвига на поверхности раздела от z и t . Напряжение сдвига на поверхности раздела имеет логарифмическую особенность вблизи свободной поверхности. В [10] предложен численно-аналитический метод решения нестационарных задач для конечных упругих областей, контактирующих с упругой полуплоскостью.

В перечисленных работах рассматривались неограниченные области слоисто-неоднородных сред. В данной работе метод пространственных характеристик [11, 5] обобщается на случай плоской задачи о волнах в прямоугольной плите конечных размеров с произвольно расположенным прямыми включениями. В дополнение к известным соотношениям [5] получены основные разрешающие уравнения и условия сопряжения решения на границах соединения разнородных материалов, а также во внутренних угловых точках включений. Результаты, характеризующие изменения волновых полей, представлены в виде графиков для плиты с включением при заданных начальных и граничных условиях.

1. Пусть плоская двумерная плита конечных размеров толщиной L , состоящая из основного тела и произвольного числа линейно-упругих изотропных прямоугольных включений, в системе декартовых координат xoy занимает область $0 \leq x \leq L$, $|y| \leq l$ (фиг. 1). Плотность материала ρ_i , скорости продольной и поперечной упругих волн a_i , b_i , $i=1, 2, \dots M$ ($i=1$ — плита).

В начальный момент времени $t=0$ о границу $x=0$, $|y| \leq l$ основного тела ударяется абсолютное жесткое тело, имеющее скорости $u^{(1)} = f(t)$ и $v^{(1)} = 0$. Задача заключается в определении внутри неоднородной среды $0 \leq x \leq L$, $|y| \leq l$ полей напряжений и скоростей, вызванных фронтами падающих и многократно дифрагированных упругих волн в момент времени $t > 0$.

В условиях плоской деформации волновой процесс во внутренних точках неоднородной среды описывается системой динамических уравнений гиперболического типа, содержащей в качестве неизвестных безразмерные напряжения, скорости перемещений [5]:

$$\begin{aligned} \rho_i u_i^{(i)} - p_x^{(i)} - q_x^{(i)} - \tau_y^{(i)} &= 0, & \rho_i v_i^{(i)} - p_y^{(i)} + q_y^{(i)} - \tau_x^{(i)} &= 0 \\ (\lambda_i + \mu_i)^{-1} p_i^{(i)} - u_x^{(i)} - v_y^{(i)} &= 0 & (1.1) \end{aligned}$$

$$\mu_i^{-1} q_i^{(i)} - u_x^{(i)} + v_y^{(i)} = 0, \quad \mu_i^{-1} \tau_i^{(i)} - u_y^{(i)} - v_x^{(i)} = 0$$

$$a_i = a_i^0 / a_m^0, \quad b_i = b_i^0 / a_m^0, \quad \rho_i = \rho_i^0 / \rho_m^0$$

$$\lambda_i + \mu_i = \rho_i (a_i^2 - b_i^2), \quad \mu_i = \rho_i b_i^2 \quad (i=1, 2, \dots, M)$$

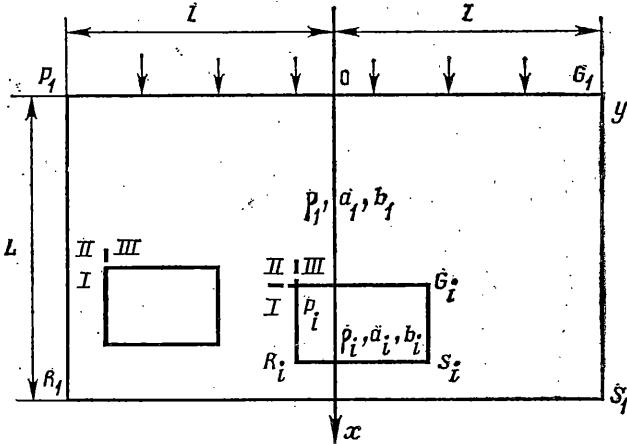
Безразмерные переменные введены по формулам [5]:

$$x = x^0 / b^0, \quad y = y^0 / b^0, \quad t = t^0 a_m^0 / b^0, \quad u = u^0 / a_m^0$$

$$v = v^0 / a_m^0, \quad p = (\sigma_{xx}^0 + \sigma_{yy}^0) / 2 \rho_m^0 a_m^{02}$$

$$q = (\sigma_{xx}^0 - \sigma_{yy}^0) / 2 \rho_m^0 a_m^{02}, \quad \tau = \sigma_{xy}^0 / (\lambda_m^0 + 2 \mu_m^0)$$

Индекс нуль придается размерным величинам; b^0 — характерный размер; индекс t относится к материалу, в котором скорость распростране-



Фиг. 1

нения продольных упругих волн максимальна $a_m^0 = \max a_i^0, \sigma_{xx}^0, \sigma_{yy}^0, \sigma_{xy}^0$ — компоненты тензора напряжений; λ_i^0, μ_i^0 — постоянные Ламе.

Для определения волнового поля в неоднородной среде, вызванного динамическим воздействием на поверхности $x=0, |y| \leq l/b^0$, необходимо проинтегрировать при $t > 0$ гиперболическую систему (1.1) при нулевых начальных данных

$$u^{(i)} = v^{(i)} = p^{(i)} = q^{(i)} = \tau^{(i)} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, M) \quad (1.2)$$

и следующих граничных условиях для $t \geq 0$:

$$u^{(1)} = f(t), \quad v^{(1)} = 0 \text{ при } x=0, \quad |y| \leq l/b^0 \quad (1.3)$$

$$p^{(1)} - q^{(1)} = 0 \text{ при } |y| = l/b^0, \quad 0 \leq x \leq L/b^0 \quad (1.4)$$

$$u^{(1)} = 0, \quad v^{(1)} = 0 \text{ при } x = L/b^0, \quad |y| \leq l/b^0 \quad (1.5)$$

на границах $P_i G_i, R_i S_i$ и $P_i R_i, G_i S_i$ соответственно

$$p^{(1)} + q^{(1)} = p^{(i)} + q^{(i)}, \quad \tau^{(1)} = \tau^{(i)}, \quad u^{(1)} = u^{(i)}, \quad v^{(1)} = v^{(i)} \quad (1.6)$$

$$p^{(1)} - q^{(1)} = p^{(i)} - q^{(i)}, \quad \tau^{(1)} = \tau^{(i)}, \quad u^{(1)} = u^{(i)}, \quad v^{(1)} = v^{(i)} \quad (i=2, 3, \dots, M) \quad (1.7)$$

Граничное условие (1.5) соответствует условию жесткого закрепления, (1.6) и (1.7) — условиям полного сцепления включения и основного тела.

2. Алгоритм численного решения задачи (1.1)–(1.7) для каждой из областей включений аналогичен [5] и дополнен необходимой системой разрешающих уравнений в узловых точках линий контактов ($P_i G_i, R_i S_i, P_i R_i, G_i S_i$) слоев основного тела и включения и во внутренних угловых точках (P_i, G_i, R_i, S_i) включения. Без потери общности можно считать, что скорость распространения продольных упругих волн в основном теле наибольшая.

Стыковка состоит в следующем. Произвольная точка $x=x_i$, $y=y_i$ линии контакта P_iG_i слоев основного тела и включения по отношению к области 1 принадлежит границе и соотношения, полученные интегрированием вдоль бихарктеристик, проходящих вне области 1, необходимо исключить. В результате получаются три уравнения, связывающие приращение пяти искомых функций в области 1. Рассматривая ту же точку как граничную по отношению к области включения, аналогичным образом можно получить три уравнения для приращений пяти искомых функций в области включения. Дополнив систему шести уравнений условиями (1.6) на контактной линии P_iG_i , получим замкнутую систему десяти разрешающих соотношений для определения решения в точке контакта. Формально точку контакта слоев основного тела и включения можно рассматривать как бы состоящей из двух различных точек, но в силу условий (1.6) скорости $u^{(i)}$, $v^{(i)}$ и напряжения $p^{(i)}+q^{(i)}$ и $\tau^{(i)}$ в этих точках равны между собой. Только компоненты напряжения $p^{(i)}-q^{(i)}$ имеют разрыв первого рода и будут принимать различные значения при подходе к точке $x=x_i$, $y=y_i$ со стороны внутренних точек областей основного тела и включения. Полная система уравнений для определения решения в точках контакта P_iG_i имеет вид

$$\begin{aligned} \delta u^{(1)} - \gamma^2 (\gamma^2 - 1)^{-1} \delta p^{(1)} &= \alpha_1 v_{xy}^{(1)} + 0,5k^2 (q_{yy}^{(1)} - p_{yy}^{(1)} - 2\tau_{xy}^{(1)} - \gamma^{-2} u_{yy}^{(1)}) + \\ &+ k(p_x^{(1)} + q_x^{(1)} + \tau_y^{(1)} - u_x^{(1)} - v_y^{(1)}) \\ \delta u^{(1)} - \gamma^2 \delta q^{(1)} &= \alpha_1 v_{xy}^{(1)} + 0,5k^2 (p_{yy}^{(1)} - q_{yy}^{(1)} + \gamma^{-2} u_{yy}^{(1)}) + \\ &+ k(v_y^{(1)} + p_x^{(1)} + q_x^{(1)} - u_x^{(1)} + \tau_y^{(1)}) \\ \delta v^{(1)} - \gamma \delta \tau^{(1)} &= \alpha_1 u_{xy}^{(1)} - 0,5k^2 \gamma^{-1} (\tau_{yy}^{(1)} + 2p_{xy}^{(1)}) + 0,5k^2 v_{yy}^{(1)} + \\ &+ k[p_y^{(1)} - q_y^{(1)} + \tau_x^{(1)} - \gamma^{-1} (u_y^{(1)} + v_x^{(1)})] \\ \delta u^{(i)} + a_i \rho_i^{-1} (a_i^2 - b_i^2)^{-1} \delta p^{(i)} &= 0,5k^2 a_i \rho_i^{-2} (p_{yy}^{(i)} - q_{yy}^{(i)} + 2\tau_{xy}^{(i)}) + \beta_i v_{xy}^{(i)} + \\ &+ 0,5k^2 b_i^2 u_{yy}^{(i)} + a_i k(u_x^{(i)} + v_y^{(i)}) + k \rho_i^{-1} (p_x^{(i)} + q_x^{(i)} + \tau_y^{(i)}) \\ \delta u^{(i)} + a_i \rho_i^{-1} b_i^{-2} \delta q^{(i)} &= 0,5k^2 b_i^2 u_{yy}^{(i)} - 0,5k^2 a_i \rho_i^{-2} (p_{yy}^{(i)} - q_{yy}^{(i)}) + \\ &+ \beta_i v_{xy}^{(i)} + a_i k(u_x^{(i)} - v_y^{(i)}) + k \rho_i^{-1} (p_x^{(i)} + q_x^{(i)} + \tau_y^{(i)}) \\ \delta v^{(i)} + \rho_i^{-1} b_i^{-1} \delta \tau^{(i)} &= 0,5k^2 b_i \rho_i^{-1} (\tau_{yy}^{(i)} + 2p_{xy}^{(i)}) + \beta_i u_{xy}^{(i)} + \\ &+ 0,5k^2 a_i^2 v_{yy}^{(i)} + b_i k(v_x^{(i)} + u_y^{(i)}) + k \rho_i^{-1} (p_y^{(i)} - q_y^{(i)} + \tau_x^{(i)}) \\ \delta p^{(1)} + \delta q^{(1)} &= \delta p^{(i)} + \delta q^{(i)}, \quad \delta \tau^{(1)} = \delta \tau^{(i)} \\ \delta u^{(1)} &= \delta u^{(i)}, \quad \delta v^{(1)} = \delta v^{(i)} \quad (i=2, 3, \dots, M) \\ \alpha_1 &= 0,5k^2 (1 - \gamma^{-2}), \quad \beta_i = 0,5k^2 (a_i^2 - b_i^2) \end{aligned}$$

Аналогично можно получить полные системы разрешающих уравнений для определения решения на остальных линиях контактов (P_iR_i , R_iS_i , G_iS_i). В точках линий контактов G_iS_i и P_iR_i нормальное напряжение $p^{(i)}+q^{(i)}$ будет иметь разрыв.

Построим разностные уравнения для определения решения во внутренних угловых точках P_i , G_i , R_i , S_i включения ($i=2, 3, \dots, M$), которые являются особыми из-за скачкообразного изменения свойств материала основного тела и включения. В [11] отмечается, что если отыскивается решение в области $-\infty < y < \infty$ при $x \leq 0$ и $y \geq 1$ при $x \geq 0$, то введенную угловую точку $x=0$, $y=1$ удобно рассматривать как частный случай внутренней точки. Такая трактовка внутреннего угла не проверялась путем фактического вычисления. Устойчивые решения в подобных угловых точках были

получены в [5]. В исследуемой нами задаче этот способ был усовершенствован применительно к внутренним особым точкам (P_i, G_i, R_i, S_i) включения.

Точку P_i ($i=2, 3, \dots, M$) включения необходимо рассматривать как угловую по отношению к областям основного тела и включения. При этом точку P_i в области основного тела мысленно разделим на три подобласти (см. рис. 1). Далее основываясь на методике [5], получаем четыре разрешающих уравнения в точке P_i , связывающие приращения четырех искомых функций $\delta u^{(i)}$, $\delta v^{(i)}$, $\delta p^{(i)}$, $\delta \tau^{(i)}$. Выполнение закона парности касательных напряжений уменьшает число заданных условий во внутренней угловой точке P_i на единицу. Чтобы получить замкнутую систему уравнений, необходимо указанным в [5] способом получить одно дополнительное уравнение для любой подобласти угла P_i . Соответствующие уравнения в других подобластях окрестности точки P_i являются линейно зависимыми.

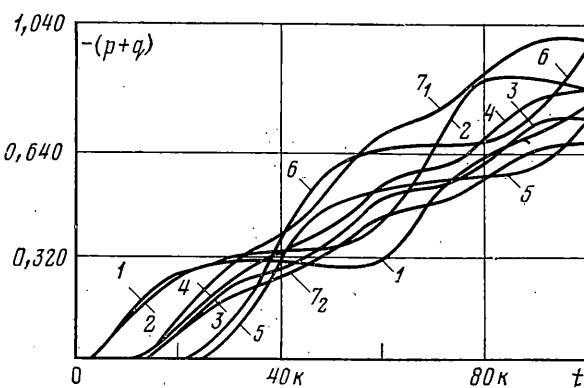
Система разрешающих уравнений для приращения искомых функций $\delta u^{(i)}$, $\delta v^{(i)}$, $\delta p^{(i)}$, $\delta q^{(i)}$, $\delta \tau^{(i)}$ с учетом граничных условий (1.6)–(1.7) в угловой точке P_i имеет вид

$$\begin{aligned} \delta u^{(1)} - \delta v^{(1)} + \gamma^2(\gamma^2 - 1)^{-1} \delta p^{(1)} - \gamma \delta \tau^{(1)} &= k[u_x^{(1)} + p_x^{(1)} + q_x^{(1)} + \\ &+ q_y^{(1)} + v_y^{(1)} - p_y^{(1)} - \tau_x^{(1)} + \tau_y^{(1)} - \gamma^{-1}(u_y^{(1)} + v_x^{(1)})] + \\ &+ \alpha_1(v_{xy}^{(1)} - u_{xy}^{(1)}) + k^2(\tau_{xy}^{(1)} - \gamma^{-1}p_{xy}^{(1)}) \\ - \delta u^{(1)} - \delta v^{(1)} + \gamma^2(\gamma^2 - 1)^{-1} \delta p^{(1)} + \gamma \delta \tau^{(1)} &= k[u_x^{(1)} - p_x^{(1)} + \\ &+ v_y^{(1)} - p_y^{(1)} - q_x^{(1)} + q_y^{(1)} - \tau_x^{(1)} - \tau_y^{(1)} + \gamma^{-1}(v_x^{(1)} + u_y^{(1)})] - \\ &- \alpha_1(v_{xy}^{(1)} + v_{yy}^{(1)}) + k^2(\tau_{xy}^{(1)} + \gamma^{-1}p_{xy}^{(1)}) \\ - \delta u^{(1)} + \delta v^{(1)} + \gamma^{-2}(\gamma^2 - 1)^{-1} \delta p^{(1)} - \gamma \delta \tau^{(1)} &= k[v_y^{(1)} + p_y^{(1)} - \\ &- q_y^{(1)} - q_x^{(1)} + u_x^{(1)} - p_x^{(1)} + \tau_x^{(1)} - \tau_y^{(1)} - \gamma^{-1}(u_y^{(1)} + v_x^{(1)})] + \\ &+ \alpha_1(u_{xy}^{(1)} - v_{xy}^{(1)}) + k^2(\tau_{xy}^{(1)} - \gamma^{-1}p_{xy}^{(1)}) \\ \delta u^{(1)} + \delta v^{(1)} - \gamma^2 \delta q^{(1)} &= k[v_y^{(1)} - q_y^{(1)} - u_x^{(1)} + q_x^{(1)} + p_x^{(1)} + \\ &+ p_y^{(1)} + \tau_x^{(1)} + \tau_y^{(1)} + \gamma^{-1}(u_y^{(1)} - v_x^{(1)})] + \alpha_1(u_{xy}^{(1)} + v_{xy}^{(1)}) + \\ &+ 0,5k\gamma^{-1}[u_x^{(1)} - u_y^{(1)} + (v_x^{(1)} - u_y^{(1)})^0] + k^2\gamma^{-1}q_{xy}^{(1)} \\ \delta u^{(i)} + \delta v^{(i)} + a_i \rho_i^{-1} (a_i^2 - b_i^2)^{-1} \delta p^{(i)} + \rho_i^{-1} b_i^{-1} \delta \tau^{(i)} &= \\ = k^2 \rho_i^{-1} (a_i \tau_{xy}^{(i)} + b_i p_{xy}^{(i)}) + \beta_i (u_{xy}^{(i)} + v_{xy}^{(i)}) + k[a_i(u_x^{(i)} + v_y^{(i)}) + \\ &+ b_i(v_x^{(i)} + u_y^{(i)})] + k \rho_i^{-1} (p_x^{(i)} + p_y^{(i)} - q_x^{(i)} + \tau_x^{(i)} + \tau_y^{(i)}) \end{aligned}$$

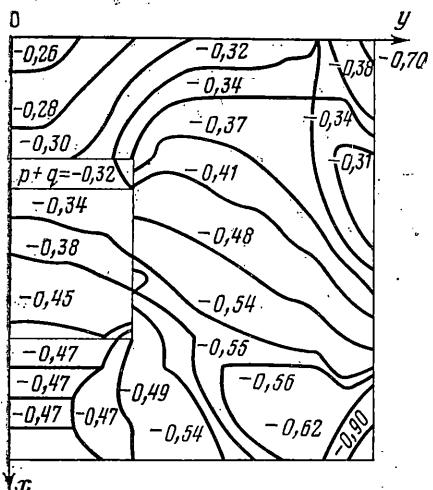
Аналогично получаются соотношения для расчетов приращений искомых функций $\delta u^{(i)}$, $\delta v^{(i)}$, $\delta p^{(i)}$, $\delta q^{(i)}$, $\delta \tau^{(i)}$ в остальных внутренних угловых точках G_i , R_i и S_i включения.

3. Численный анализ волновых полей проводился для стальной плиты (с включением $i=1$, $\rho_1^0=7900$ кг/м³, $a_1^0=5817$ м/с, $b_1=3109$ м/с) из меди ($i=2$, $\rho_2^0=-8900$ кг/м³, $a_2^0=4557$ м/с, $b_2^0=2131$ м/с) на ЭВМ ЕС-1022. Универсальная программа написана на языке ПЛ-1. Параметры волнового поля вычислены при следующих значениях исходных данных: $h=\Delta x=\Delta y=0,05$, $k=\Delta t=0,025$, $f(t)=te^{-t}$ при $t \geq 0$ и $f(t)=0$ при $t < 0$ для центрального ($4h \leq x \leq 10h$, $|y| \leq 4h$, задача 2) и смещенного ($4h \leq x \leq 10h$, $0 \leq y \leq 8h$, задача 3) относительно оси x включения. Расчет проведен и для однородной стальной плиты с теми же граничными условиями (задача 1).

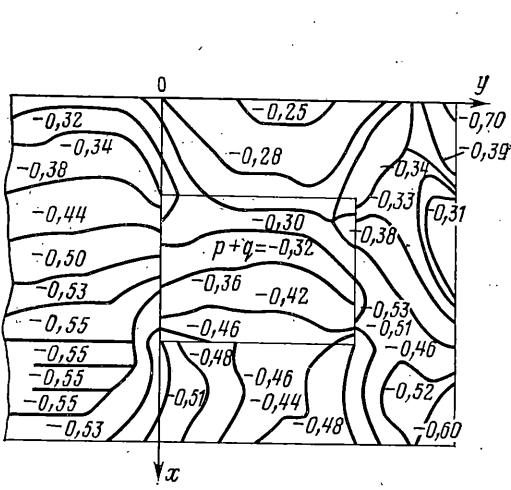
Эволюция во времени нормального напряжения $p+q$ неоднородной среды с центральным включением (задача 2) на интервале времени $0 < t < 100$ k в семи фиксированных точках наблюдения – 1($x=2h$, $y=2h$), 2($x=2h$, $y=10h$), 3($x=7h$, $y=2h$), 4($x=7h$, $y=10h$), 5($x=12h$, $y=2h$), 6($x=12h$, $y=10h$), 7($x=7h$, $y=4h$) показана кри-



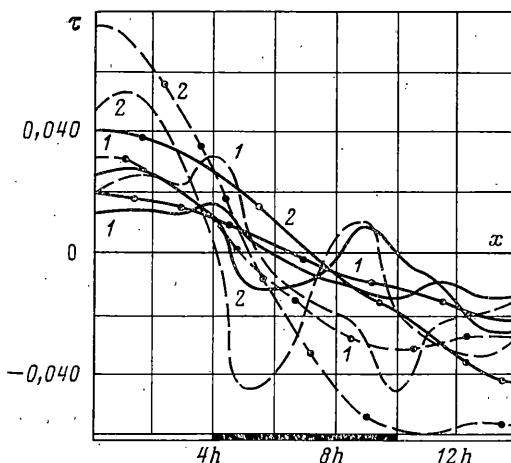
Фиг. 2.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

выми на фиг. 2. При малых значениях времени поведение кривых в точках 1 и 2 определяется пришедшей от торца $x=0$ плоской волной сжатия. Анализ функции $p+q$ в точке 1 показывает, что на интервале времени $8 k < t < 100 k$ закон изменения нормального напряжения $p+q$ обусловлен приходом в точку 1 фронта продольной упругой волны, отраженной от границы сочленения разнородных материалов и закрепленной поверхности $x=0,7$, $|y| \leq 0,6$, что сопровождается уменьшением нарастания амплитуды сжимающего напряжения. Значительное увеличение уровня сжимающего нормального напряжения $p+q$ в точке 2 по сравнению с 1 с момента $t = -30 k$ связано с приходом импульса, отраженного от закрепленной границы $x=0,7$, $|y| \leq 0,6$. Скорость нарастания напряжений в точках 3 и 5 во времени меньше соот-

ветствующих скоростей в 4 и 6. Вместе с тем в точках 3 и 5 наблюдается запаздывание в появления напряжений $p+q$ по сравнению с 4 и 6, что объясняется значительным ослаблением упругих волн при прохождении их через область включения. На приведенных графиках нормальные напряжения $p+q$ в точках 5 и 6 — вблизи жесткой поверхности — характеризуются на начальном движении быстрым ростом амплитудного значения, который затем сменяется медленным увеличением. Нормальные напряжения $p+q$ в точке 7 различны при подходе к ней со стороны внутренних точек основного тела и включения. В основном теле наблюдается резкое увеличение сжимающего напряжения, обусловленное большей жесткостью материала основного тела. Кроме того возмущение в точку 7 со стороны включения приходит с некоторым запаздыванием по сравнению с возмущениями со стороны основного тела.

Сравнение параметра напряженного состояния $p+q$ в семи точках неоднородной среды (задача 2) с соответствующими значениями в однородной среде (задача 1) показывает, что влияние медного включения с акустической жесткостью, вдвое меньшей жесткости стали, существенно оказывается на величине и характере изменения нормального напряжения во времени в точках 1, 3, 5, 7, а в 2, 4, 6 — несущественно.

На фиг. 3—4 в плоскости xy для момента времени $t=50 k$ изображены изолинии нормальных напряжений $p+q=\text{const}$ для центрального (задача 2) и смешенного (задача 3) относительно оси x включения соответственно. При данном расположении включения (фиг. 4) эффект несимметричности его относительно оси $y=0$ оказался существенным. Действительно, взаимовлияние свободной поверхности $y=0,6$ и включения сильнее проявляется в задаче 3, чем в 2.

Эпюры касательных напряжений τ в неоднородной среде с центральным включением (задача 2) по x в сечениях $y=2h(1)$, $y=4h(2)$ для моментов времени $t=-50 k$ (сплошные линии) и $t=90 k$ (штриховые) приведены на фиг. 5. Касательные напряжения, возникающие в однородной стальной плите, отмечены точками. По мере приближения к точкам контакта ($x=4h$ и $x=10h$) разнородных материалов отмечаются существенные изменения касательных напряжений по сравнению со случаем однородной среды. С увеличением времени этот эффект проявляется более наглядно. Они обусловлены наложением дифрагированных волн от угловых точек включения и отраженной от контактирующих поверхностей. Анализ зависимостей касательных напряжений τ от координаты x показывает, что их уровень на границах ($x=0$ и $x=0,7$) в среде с включением меньше, чем в однородной среде. Это является дополнительным подтверждением влияния включения.

Аналогично получены результаты, оценивающие влияние включения и место его расположения на другие параметры волнового движения (u , v , $p-q$) и так далее.

ЛИТЕРАТУРА

1. Римский В. К., Сабодаши П. Ф. Численное моделирование динамической контактной (смешанной) задачи об ударе тупым клином по слоистой плите // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 2. С. 29—38.
2. Преображенский И. Н., Сабодаши П. Ф., Римский В. К. Численное моделирование динамических контактных задач для пластин из композитных материалов // Механика композит. материалов. 1981. № 6. С. 1025—1029.
3. Навал И. К., Руссу И. В. Расчет волны упругих напряжений в неоднородном цилиндре // Изв. АН МССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 1983. № 3. С. 29—33.
4. Кондауров В. И., Кукуджанов В. Н. Соударение жесткого цилиндра со слоистой упругопластической преградой // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Матер. VI Всесоюз. конф. Изд-е Ин-та теор. и прикл. механики. 1980. Ч. 1. С. 84—90.
5. Ержанов Ж. С., Каримбаев Т. Д., Байтелиев Т. Б. Двумерные волны напряжений в однородных и структурно-неоднородных средах. Алма-Ата: Наука. 1983. 171 с.
6. Сабодаши П. Ф., Черебнichenko Р. А. Распространение упругих волн в полуполосе, составленной из двух разнородных материалов // Избранные проблемы прикладной механики. М.: ВИНИТИ. 1974. С. 617—624.
7. Григорян С. С., Черебнichenko Р. А. Распространение в слоистом полупространстве упругих волн, вызванных поверхностной динамической нагрузкой // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 4. С. 111—118.
8. Benveniste Y., Aboudi J. A nonlinear mixture theory for the dynamic response of a laminated composite under large deformations // Z. angew. Math. und Phys. 1977. B. 28. Н. 6. S. 1067—1084.
9. Ахенбах Дж. Д. Нестационарные волны сдвига в двух связанных упругих четверть пространствах // Тр. Америк. о-ва инж.-мех. Прикл. механика. 1969. № 3. С. 116—121.
10. Бородай М. Д., Сеймов В. М. Динамическая контактная задача для прямоугольной упругой области, расположенной на упругой полу平面 // Прикл. механика. 1983. Т. 19. № 4. С. 64—67.
11. Клифтсон Р. Дж. Разностный метод в плоских задачах динамической упругости // Механика. Период. сб. перев. иностр. ст. 1968. № 1. С. 103—122.

Москва, Чимкент

Поступила в редакцию
21.X.1985