МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1987

УДК 539.3

ОЦЕНКА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

ПОДАЛКОВ В. В., РОМАНОВ В. А.

Рассматривается пространственная задача об однородном деформировании неоднородного тела, упругие свойства которого являются функциями одной координаты. Непосредственным интегрированием уравнений равновесия и совместности деформаций найдено точное решение задачи. Для этой же задачи построено решение по методу возмущений, первое приближение которого часто используется для аппроксимации решений задач о деформировании структурно-неоднородных тел [1–6]. Показано, что это решение сходится к точному. Произведена оценка первого приближения метода возмущений. Полученная оценка сравнивается с оценкой, найденной при решении плоской задачи в [1].

1. Пусть в неоднородном пространстве реализуется однородное напряженно-деформированное состояние, определяемое условиями

$$\langle e_{ij}\rangle=e_{ij}^{(0)} \qquad (i,j=1,2,3) \tag{1.1}$$

Здесь и далее угловыми скобками обозначена операция взятия среднего значения функции, e_{ij} — деформация. Среднее значение функции $\varphi(x_1,x_2,x_3)$ по произвольной области достаточно больших размеров определяется следующим образом:

$$\langle\varphi(x_1,x_2,x_3)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^3}\int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{-T}^{T}\varphi(x_1,x_2,x_3)\,dx_1\,dx_2\,dx_3$$

Отметим, что если $\varphi(x_1,x_2,x_3)=C=\text{const}$, то $\langle\varphi\rangle=C$. Пусть далее функции p_1 и p_2, характеризующие свойства изотропной и неоднородной среды, зависят от одной координаты и имеют вид

$$p_i(x)=\langle p_i(x)\rangle+\gamma p_i^{(1)}(x), \qquad |\gamma p_i^{(1)}|<\langle p_i\rangle \tag{1.2}$$

$$p_1=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad p_2=\frac{E}{1+\nu} \qquad (i=1,2)$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, γ — малый параметр (здесь и далее принято $x=x_3$).

Закон Гука в этом случае имеет вид

$$\sigma_{ij}=p_{\perp}e_{kk}\delta_{ij}+p_2e_{ij} \qquad (i,j=1,2,3) \tag{1.3}$$

где σ_{ij} — напряжения, δ_{ij} — символ Кронекера, $e_{kk}=e_{11}+e_{22}+e_{33}$ — объемное расширение.

Кроме соотношений (1.1), (1.3) должны удовлетворяться уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j}=0 \tag{1.4}$$

уравнения совместности деформаций

$$\lambda_{ijk}\lambda_{lmn}e_{kn,jm}=0 \tag{1.5}$$

(λ_{ijk} — единичный антисимметричный псевдотензор Леви-Чивита) и соблюдаться условия ограниченности деформаций на бесконечности

$$|e_{ij}|<\infty \qquad (i,j,k,l,m,n=1,2,3) \tag{1.6}$$

Будем искать решение задачи (1.1), (1.4), (1.5) в виде

$$e_{ij}=e_{ij}(x) \tag{1.7}$$

т. е. примем, что деформации зависят только от одной переменной x. В этом случае из (1.5), (1.6) следует, что

$$e_{ij}\equiv e_{ij}^{(0)}=\mathrm{const} \qquad (i,j=1,2) \tag{1.8}$$

Действительно, из уравнений Сен-Венана (1.5) имеем $e_{ij}=A_{ij}x+B_{ij}$ $(i,\ j=1,\ 2)$, A и B — константы. В силу (1.6) $A_{ij}=0$ $(i,\ j=1,\ 2)$ и $e_{ij}=B_{ij}$ $(i,\ j=1,\ 2)$. Осредняя полученные выражения и используя (1.1), найдем $B_{ij}=e_{ij}^{(0)}$ $(i,\ j=1,\ 2)$ или $e_{ij}=e_{ij}^{(0)}$ $(i,\ j=1,\ 2)$. Оставшиеся деформации удобно представить в виде

$$e_{i3}(x)=e_{i3}^{(0)}+e_{i3}{}^*(x) \tag{1.9}$$

Здесь $e_{i3}{}^*$ характеризует влияние на e_{i3} неоднородности среды. Тогда из (1.4) с учетом (1.3) получим

$$p_2(e_{i3}^{(0)}+e_{i3}{}^*)=c_i \qquad (i=1,2) \tag{1.10}$$

$$p_1(e_{kk}^{(0)}+e_{kk}{}^*)+p_2(e_{33}^{(0)}+e_{33}{}^*)=c_3$$

Постоянные c_n $(n=1,2,3)$ в (1.10) определяются из условия $\langle e_{i3}{}^*\rangle=0$, вытекающего из (1.9):

$$c_i=\langle 1/p_2\rangle e_{i3}^{(0)} \qquad (i=1,2) \tag{1.11}$$

$$c_3=\left\langle\frac{1}{p_1+p_2}\right\rangle^{-1}\left(\left\langle\frac{p_1}{p_1+p_2}\right\rangle e_{kk}^{(0)}+\left\langle\frac{p_2}{p_1+p_2}\right\rangle e_{33}^{(0)}\right)$$

Подставляя (1.11) в (1.10) и используя (1.9), получим выражения для деформаций

$$e_{i3}=e_{i3}^{(0)}\langle 1/p_2\rangle/p_2 \qquad (i=1,2) \tag{1.12}$$

$$e_{33}=e_{33}^{(0)}+\frac{1}{p_1+p_2}\left[\left\langle\frac{1}{p_1+p_2}\right\rangle^{-1}\left(\left\langle\frac{p_1}{p_1+p_2}\right\rangle e_{kk}^{(0)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left\langle\frac{p_2}{p_1+p_2}\right\rangle e_{33}^{(0)}\right)-p_1e_{kk}^{(0)}-p_2e_{33}^{(0)}\right]$$

Из формул (1.3), (1.8) и (1.12) найдем напряжения

$$\sigma_{ij}=p_1e_{kk}^{(0)}\delta_{ij}+p_2e_{ij}^{(0)}+\frac{p_1}{p_1+p_2}\left[\left\langle\frac{1}{p_1+p_2}\right\rangle^{-1}\left(\left\langle\frac{p_1}{p_1+p_2}\right\rangle e_{kk}^{(0)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left\langle\frac{p_2}{p_1+p_2}\right\rangle e_{33}^{(0)}\right)-p_1e_{kk}^{(0)}-p_2e_{33}^{(0)}\right]\delta_{ij}, \qquad \sigma_{i3}=e_{i3}^{(0)}\left\langle\frac{1}{p_2}\right\rangle^{-1} \tag{1.13}$$

$$\sigma_{33}=\left\langle\frac{1}{p_1+p_2}\right\rangle\left(\left\langle\frac{p_1}{p_1+p_2}\right\rangle e_{kk}^{(0)}+\left\langle\frac{p_2}{p_1+p_2}\right\rangle e_{33}^{(0)}\right) \qquad (i,j=1,2;\ k=1,2,3)$$

Соотношения (1.13) показывают, что $\sigma_{k3}=\mathrm{const}$. Осредняя (1.13), получим

$$\langle\sigma_{ij}\rangle=\langle p_1\rangle e_{kk}^{(0)}\delta_{ij}+\langle p_2\rangle e_{ij}^{(0)}+\left[\left\langle\frac{p_1}{p_1+p_2}\right\rangle\left\langle\frac{1}{p_1+p_2}\right\rangle\left(\left\langle\frac{p_1}{p_1+p_2}\right\rangle e_{kk}^{(0)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left\langle\frac{p_2}{p_1+p_2}\right\rangle e_{33}^{(0)}\right)-\left\langle\frac{p_1^2}{p_1+p_2}\right\rangle e_{kk}^{(0)}-\left\langle\frac{p_1p_2}{p_1+p_2}\right\rangle e_{33}^{(0)}\right]\delta_{ij} \tag{1.14}$$

$$\langle\sigma_{k3}\rangle=\sigma_{k3}(i,j=1,2;\ k=1,2,3)$$

2. Перейдем к отысканию решения поставленной задачи методом возмущений. Для этой цели представим деформации в виде (γ — малый па-

раметр):

$$e_{ij}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma^n e_{ij}^{(n)}(x)\qquad (i,j=1,2,3)\tag{2.1}$$

Используя закон Гука, уравнения равновесия и уравнения совместности деформаций, получим рекуррентную последовательность уравнений для $n\geqslant 1$:

$$\frac{d^2}{dx^2}e_{lm}^{(n)}=0,\qquad \frac{d}{dx}[(\langle p_1\rangle e_{kk}^{(n)}+\langle p_2\rangle e_{33}^{(n)})\gamma^n+(P_1e_{kk}^{(n-1)}+P_2e_{33}^{(n-1)})\gamma^{n-1}]=0$$

$$P_l(x)=\gamma p_l(x)\quad (l,\ m=1,\ 2;\ k=1,\ 2,\ 3)\tag{2.2}$$

Из первых трех уравнений системы (2.2) найдем

$$e_{lm}^{(n)}=A_{lm}^{(n)}x+B_{lm}^{(n)},\qquad A,B=\mathrm{const}\quad (l,m=1,2)\tag{2.3}$$

В силу ограниченности деформаций на бесконечности $A_{lm}^{(n)}=0$ и

$$e_{lm}^{(n)}=B_{lm}^{(n)}\tag{2.4}$$

Так как $\langle e_{lm}\rangle=e_{lm}^{(0)}=B_{lm}^{(0)}$ и $\langle e_{lm}\rangle=0$ для $n\geqslant 1$, то $B_{lm}^{(n)}=0$, $n\geqslant 1$. Итак

$$e_{lm}=e_{lm}^{(0)},\qquad e_{lm}^{(n)}=0,\qquad n\geqslant 1\qquad (l,m=1,2)\tag{2.5}$$

Интегрируя следующие два уравнения системы (2.2), получим

$$\langle p_2\rangle\gamma^n e_{l3}^{(n)}+P_2\gamma^{n-1}e_{l3}^{(n-1)}=c_n\tag{2.6}$$

$$c_n=\mathrm{const}(l=1,\ 2)$$

Определяя в этом соотношении постоянные c_n из условия $\langle e_{l3}^{(n)}\rangle=0$ $(l=1,\ 2)$, окончательно имеем

$$\gamma^n e_{l3}^{(n)}=(-1)^n\left[\alpha^n-\sum_{j=1}^{n}\alpha^{n-j}N_j\right]e_{l3}^{(0)}\tag{2.7}$$

$$\alpha=\frac{P_2}{\langle p_2\rangle},\qquad N_j=\langle\alpha^j\rangle-\sum_{i=1}^{j-1}\langle\alpha^{j-i}\rangle N_i,\qquad N_1=0\quad (j\geqslant 2)\tag{2.8}$$

Решение последнего уравнения из (2.2) имеет вид

$$(\langle p_1\rangle e_{kk}^{(n)}+\langle p_2\rangle e_{33}^{(n)})\gamma^n+(P_1e_{kk}^{(n-1)}+P_2e_{33}^{(n-1)})\gamma^{n-1}=D_n,\qquad D_n=\mathrm{const}\tag{2.9}$$

Отметим, что в силу (2.5) $e_{kk}^{(n)}=e_{33}^{(n)}$ при $n\geqslant 1$, поэтому (2.9) можно представить в форме

$$\gamma^n e_{33}^{(n)}=\langle p_1+p_2\rangle^{-1}[D_n-(P_1e_{kk}^{(n-1)}+P_2e_{33}^{(n-1)})\gamma^{n-1}]\tag{2.10}$$

Определяя, как и ранее, постоянные D_n из условия равенства нулю средних значений $E_{ij}^{(n)}$, $n\geqslant 1$, получим

$$\gamma^n e_{33}^{(n)}=(-1)^n\left[(e_{33}^{(0)}-e_{kk}^{(0)})\left(\beta\alpha^{n-1}-\sum_{j=1}^{n}\alpha^{n-j}M_j\right)\frac{\langle q_2\rangle}{\langle q_1\rangle}+\right.$$

$$\left.+e_{kk}^{(0)}\left(\alpha^n-\sum_{j=1}^{n}\alpha^{n-j}N_j\right)\right]$$

$$q_1=p_1+p_2,\quad q_2=p_2\tag{2.11}$$

$$\beta=\gamma q_1^{(1)}/\langle q_1\rangle=(P_1+P_2)/\langle q_1\rangle$$

$$M_j=\langle\beta\alpha^{j-1}\rangle-\sum_{i=1}^{j-1}\langle\alpha^{j-i}\rangle M_i \qquad (j\geqslant 2), \qquad M_1=0$$

Преобразование формул (1.11) с учетом замен, введенных в (2.11), дает

$$e_{l3}=\frac{1}{1+\beta}\left\langle\frac{1}{1+\beta}\right\rangle^{-1}e_{l3}^{(0)} \qquad (l=1,2) \tag{2.12}$$

$$e_{33}=e_{33}^{(0)}+\frac{e_{kk}^{(0)}-e_{33}^{(0)}}{1+\alpha}\left(\beta-\left\langle\frac{\beta}{1+\alpha}\right\rangle\left\langle\frac{1}{1+\alpha}\right\rangle^{-1}\right)\frac{\langle q_2\rangle}{\langle q_1\rangle}-$$

$$-e_{kk}^{(0)}\left(1-\frac{1}{1+\alpha}\left\langle\frac{1}{1+\alpha}\right\rangle^{-1}\right) \qquad (k=1,2,3)$$

Подставляя (2.10), (2.11) в (2.1) и производя преобразования, включающие изменение индексов и перемену порядка суммирования, получим следующие соотношения:

$$e_{l3}=e_{l3}^{(0)}+e_{l3}^{(0)}\left[\left(1-\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^jN_j\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\alpha^n-1\right] \tag{2.13}$$

$$e_{33}=e_{33}^{(0)}-(e_{kk}^{(0)}-e_{33}^{(0)})\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}-\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^jM_j\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\alpha^n-\frac{\beta}{\alpha}\right]\frac{\langle q_2\rangle}{\langle q_1\rangle}+$$

$$+e_{kk}\left[\left(1-\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^jN_j\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\alpha^n-1\right]$$

Ряд $\Sigma(-1)^n\alpha^n$ сходится для всех $|\alpha|<1$, а в соответствии с [1]:

$$\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^jM_j=-\left\langle\frac{\beta}{1+\alpha}\right\rangle\left\langle\frac{1}{1+\alpha}\right\rangle^{-1}$$

$$1-\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^jN_j=\left\langle\frac{1}{1+\alpha}\right\rangle^{-1}$$

Следовательно, правые части (2.12) и (2.13) совпадают.

Итак, показано, что суммирование ряда по степеням малого параметра в пределах его интервала сходимости дает в данной задаче те же значения деформаций, что и точное решение.

3. Для оценки применимости асимптотического метода, использующего лишь первый член ряда возмущений, рассмотрим погрешность приближения $\sigma_{ij}\approx\tau_{ij}$, где σ_{ij} — напряжения, полученные в результате точного решения задачи, а $\tau_{ij}=\tau_{ij}^{(0)}+\gamma\tau_{ij}^{(1)}$ — напряжения в первом приближении по методу возмущений, причем $\tau_{ij}^{(0)}$ определяются из закона Гука для нулевого приближения $\tau_{ij}^{(0)}=\langle p_1\rangle e_{kk}^{(0)}\delta_{ij}+\langle p_2\rangle e_{ij}^{(0)}$ $(i, j=1, 2, 3)$ и, вообще говоря, не совпадают со средними значениями напряжений σ_{ij}, т. е. $\tau_{ij}^{(0)}\neq$ $\neq\langle\sigma_{ij}\rangle$.

Используя далее закон Гука для первого приближения $\tau_{ij}^{(1)}=$ $=(\langle p_1\rangle e_{kk}^{(1)}+p_1e_{kk}^{(0)})\delta_{ij}+2(\langle p_2\rangle e_{ij}^{(1)}+p_2e_{ij}^{(0)})$, получим формулы, определяющие напряжения

$$\tau_{ij}=p_2e_{ij}^{(0)}+\left[p_1e_{hh}^{(0)}-\frac{\langle p_1\rangle}{\langle p_1+p_2\rangle}\left(P_1e_{hh}^{(0)}+P_2e_{33}^{(0)}\right)\right]\delta_{ij} \tag{3.1}$$

$$\tau_{i3}=\langle p_2\rangle e_{i3}^{(0)},\qquad \tau_{33}=\langle p_1\rangle e_{hh}^{(0)}+\langle p_2\rangle e_{33}^{(0)}\qquad (i,j=1,2)$$

Для оценки разности между полными напряжениями σ_{ij} и τ_{ij}, полученными из точного и приближенного решений соответственно, примем, что коэффициент Пауссона [2, 3] $\nu(x)=\mathrm{const}=\nu$, а $E(x)=\langle E(x)\rangle+\gamma E^{(1)}(x)$; тогда согласно (1.2):

$$p_1=\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\langle E\rangle+\gamma E^{(1)}\right),\qquad p_2=\frac{1}{1+\nu}\left(\langle E\rangle+\gamma E^{(1)}\right) \tag{3.2}$$

С помощью равенств (3.2) получим выражения для напряжений

$$\sigma_{ij}=a\left\{(1+E_*^{(1)})e_{ij}^{(0)}+\frac{\nu}{1-\nu}\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}e_{hh}^{(0)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(\varkappa-1)\left(\frac{\nu}{1-2\nu}e_{hh}^{(0)}+e_{33}^{(0)}\right)+\left(e_{hh}^{(0)}-e_{33}^{(0)}\right)E_*^{(1)}\right]\delta_{ij}\right\}$$

$$\sigma_{i3}=\varkappa ae_{i3}^{(0)},\qquad \sigma_{33}=\varkappa a\left(\frac{\nu}{1-2\nu}e_{hh}^{(0)}+e_{33}^{(0)}\right) \tag{3.3}$$

$$\tau_{ij}=a\left\{(1+E_*^{(1)})e_{ij}^{(0)}+\frac{\nu}{1-\nu}\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}e_{hh}^{(0)}+\left(e_{hh}^{(0)}-e_{33}^{(0)}\right)E_*^{(1)}\right]\delta_{ij}\right\}$$

$$\tau_{i3}=ae_{i3}^{(0)},\qquad \tau_{33}=a\left(\frac{\nu}{1-2\nu}e_{hh}^{(0)}+e_{33}^{(0)}\right)\qquad (i,j=1,2;\ k=1,2,3)$$

$$a=\langle E\rangle/(1+\nu),\qquad E_*^{(1)}=\gamma E^{(1)}/\langle E\rangle$$

$$\varkappa=\left(\langle 1/E\rangle\langle E\rangle\right)^{-1}$$

Вычисления абсолютной ошибки $\Delta_{lm}=\sigma_{lm}-\tau_{lm}$ (l, $m=1$, 2, 3) дают следующие результаты:

$$\Delta_{11}=\Delta_{22}=\frac{a\nu(\varkappa-1)}{1-\nu}\left(\frac{\nu}{1-2\nu}e_{hh}^{(0)}+e_{33}^{(0)}\right) \tag{3.4}$$

$$\Delta_{12}=0,\qquad \Delta_{i3}=a(\varkappa-1)e_{i3}^{(0)}\qquad (i=1,2)$$

$$\Delta_{33}=a(\varkappa-1)\left(\frac{\nu}{1-2\nu}e_{hh}^{(0)}+e_{33}^{(0)}\right)$$

Из формул (3.4) следует, что чем ближе значение $\varkappa$ к единице, т. е. чем меньше $|E_*^{(1)}(x)|$ по сравнению с единицей, тем ближе приближенное решение к точному.

Найдем абсолютную величину относильной погрешности $\delta_{lm}=|\Delta_{lm}/\sigma_{lm}|$. Подставляя (3.4) и (3.3) в это соотношение, заметим, что относительная ошибка для всех напряжений с индексом 3 одинакова и не зависит от ν и средних значений деформаций $\delta_{i3}=|(\varkappa-1)/\varkappa|$ ($i=1, 2, 3$).

Для напряжений τ_{11} и τ_{22} выражение относительной погрешности имеет вид (по m не суммировать)

$$\delta_{mm}=\left|\frac{\nu(\varkappa-1)\left[\nu e_{hh}^{(0)}/(1-2\nu)+e_{33}^{(0)}\right]}{(1-\nu)\sigma_{mm}}\right|\qquad (m=1,2) \tag{3.5}$$

Поскольку δ_{mm}, определяемая (3.5), помимо $\varkappa$ зависит еще от четырех параметров ν, $e_{11}^{(0)}$, $e_{22}^{(0)}$, $e_{33}^{(0)}$ и функции $E_*^{(1)}(x)$, вычисления относительных погрешностей в случае произвольного однородного напряженно-деформированного состояния весьма громоздки. Рассмотрим в качестве примера случай, когда $e_{11}^{(0)}=e_{22}^{(0)}=e_{33}^{(0)}=e^{(0)}>0$. В этом случае относительные погрешности для τ_{11} и τ_{22} совпадают. Обозначим

$$\delta_{11}=\delta_{22}=\delta=\nu(\varkappa-1)/[\nu\varkappa+(1-2\nu)(1+E_*^{(1)})] \tag{3.6}$$

Так как $|E_*^{(1)}(x)|<1$, то относительная ошибка δ не будет превосходить значения δ^*, вычисленного по формуле (3.6) при $E_*^{(1)}=-1$, т. е. $\delta\leqslant\delta^*$ $(\delta^*=|(\varkappa-1)/\varkappa|)$. Видно, что если $0{,}83\leqslant\varkappa\leqslant1{,}25$, то относительная погрешность первого приближения не превосходит допустимого [1] предела 20%; если же $0{,}91\leqslant\varkappa\leqslant1{,}11$, то $\delta\leqslant0{,}1$, т. е. ошибка не более 10%.

4. Представляет интерес оценка [1] относительной амплитуды неоднородности μ в случае, когда $E_*^{(1)}(x)$ имеет вид $E_*^{(1)}=\mu\cos\omega x$. Так как

$$\varkappa=\left(\left\langle\frac{1}{E}\right\rangle\langle E\rangle\right)^{-1}=\left\langle\frac{1}{1+E_*^{(1)}}\right\rangle$$

$$\left\langle\frac{1}{1+E_*^{(1)}}\right\rangle=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{d\theta}{1+\mu\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}$$

то для относительной амплитуды неоднородности μ имеем следующие оценки: если $\delta\leqslant20\%$, то $|\mu|\leqslant0{,}55$; $\delta\leqslant10\%$, $|\mu|\leqslant0{,}42$; $\delta\leqslant5\%$, $|\mu|\leqslant0{,}31$. В [1] максимальная амплитуда неоднородности $|\mu|\leqslant0{,}33$, если $\delta\leqslant20\%$.

Полученные оценки говорят о высокой эффективности применения метода возмущений для оценки напряжений и деформаций в неоднородных упругих материалах. Кроме того, сравнение полученных оценок с соответствующими оценками в [1] показывают, что в пространственных задачах пределы изменения параметров неоднородности, в частности относительной амплитуды, для данной степени точности, по-видимому, шире [4—6], чем в плоском случае [1—3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ломакин В. А., Шейнин В. И.* О применимости метода малого параметра для оценки напряжений в неоднородных упругих средах // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 3. С. 33—39.
2. *Ломакин В. А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М.: Наука. 1970. 139 с.
3. *Ломакин В. А., Шейнин В. И.* Статистические характеристики полей напряжений в случайно неоднородной упругой плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 4. С. 124—130.
4. *Подалков В. В., Романов В. А.* Концентрация напряжений на границе микронеоднородного упругого полупространства // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 3. С. 540—545.
5. *Амелина З. В., Романов В. А.* Контактная задача для двух микронеоднородных полупространств // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. № 6. С. 1082—1088.
6. *Подалков В. В., Романов В. А.* Деформация упругого анизотропного микронеоднородного полупространства // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 455—461.

Москва — Поступила в редакцию 17.XII.1985