

УДК 539.3

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В КОМПОЗИТАХ  
СО СФЕРИЧЕСКИ-СЛОИСТЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

КАНАУН С. К., КУДРЯВЦЕВА Л. Т.

Рассматривается однородная изотропная упругая среда, содержащая изолированную сферическую неоднородность (включение). Предполагается, что модули упругости и коэффициент линейного расширения среды зависят только от расстояния до центра включения. Показано, что в случае постоянного температурного поля задача о напряженном состоянии среды с центрально-симметричной неоднородностью сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Для сферически-слоистой среды это уравнение решено в явном виде. Рассматривается сферически-слоистая неоднородность с тонкими ослабленными прослойками на границах фаз. Такими прослойками моделируется частичное отслаивание включения от матрицы вследствие температурных напряжений.

Решение задачи об одном включении используется затем для определения эффективного коэффициента линейного расширения среды, содержащей множество сферически-слоистых включений, и для оценки концентрации температурных напряжений на неоднородностях. Взаимодействие между включениями учитывается с помощью метода эффективного (самосогласованного) поля.

**1. Интегральные уравнения задачи.** Пусть изолированная неоднородность занимает в однородной упругой среде область  $V$  с характеристической функцией  $V(x)$ ,  $x(x_1, x_2, x_3)$  — точка среды. Тензоры модулей упругости среды  $c(x)$  и коэффициентов линейного расширения  $\alpha(x)$  в области  $V$  — кусочно-гладкие функции координат. Рассмотрим напряженное состояние такой среды в постоянном температурном поле  $\Theta$  при нестесненных на бесконечности деформациях, предполагая, что при  $\Theta=0$  среда свободна от внутренних напряжений.

Тензор температурных напряжений  $\sigma(x)$  в неоднородной среде при отсутствии внешнего поля напряжений удовлетворяет интегральному уравнению [1]:

$$\sigma^{\alpha\beta}(x) - \int_V S^{\alpha\beta\lambda\mu}(x-x') B_{1\lambda\nu\rho}(x') \sigma^{\nu\rho}(x') dx' = \int_V S^{\alpha\beta\lambda\mu}(x-x') \alpha_{1\lambda\mu}(x') \Theta dx'$$

$$B_1 = B - B_0, \quad B_0 = c_0^{-1}, \quad B = c^{-1}, \quad \alpha_1 = \alpha - \alpha_0 \quad (1.1)$$

где  $c_0$  и  $\alpha_0$  — тензоры модулей упругости и коэффициентов линейного расширения основной среды. Ядро  $S(x)$  интегрального оператора в уравнении (1.1) выражается через вторые производные функции Грина  $G(x)$  уравнений теории упругости для среды  $c_0$ :

$$S(x) = c_0 \cdot K(x) \cdot c_0 - c_0 \delta(x), \quad K_{\alpha\beta\lambda\mu}(x) = -(\nabla_\alpha \nabla_\lambda G_{\beta\mu}(x))_{(\alpha\beta)(\lambda\mu)}$$

$$\nabla_\alpha c_0^{\alpha\beta\lambda\mu} \nabla_\lambda G_{\mu\nu}(x) = -\delta_\nu^\beta \delta(x) \quad (1.2)$$

Здесь точка означает свертывание тензоров по двум индексам,  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака,  $\delta_\nu^\alpha$  — символ Кронекера.

Введем тензоры упругой деформации  $\varepsilon^e(x)$ , полной деформации  $\varepsilon(x)$  и возмущения деформаций, связанного с неоднородностью,  $\varepsilon_1(x)$ :  $\varepsilon^e = c^{-1} \cdot \sigma$ ,  $\varepsilon = \varepsilon^e + \alpha \Theta$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon - \alpha_0 \Theta$ . Очевидно, что  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . Из (1.1) с помощью алгебраических преобразований можно получить уравнение, которому

удовлетворяет функция  $\varepsilon_1(x)$ :

$$\varepsilon_1(x) + \int_V K(x-x') \cdot c_1(x') \cdot \varepsilon_1(x') dx' = \int_V K(x-x') \cdot c(x') \cdot \alpha_1(x') \Theta dx' \quad (1.3)$$

Здесь ядро  $K(x)$  имеет вид (1.2),  $c_1 = c - c_0$ . При выводе этого уравнения учтено, что для нестесненных на бесконечности деформаций имеет место равенство [2] (интеграл вычисляется по всему пространству):

$$\int K(x-x') \cdot c_0 \cdot \alpha_0 dx' = \alpha_0 \quad (1.4)$$

В дальнейшем будем считать, что  $\Theta = 1$ . Поэтому полученные дальше решения уравнений (1.1), (1.3) следует домножить на истинное значение температуры  $\Theta$ .

Из результатов [3] следует, что решение уравнений (1.1), (1.3) существует и единственно, если  $c(x)$  и  $\alpha(x)$  — ограниченные, невырожденные, кусочно-гладкие функции.

Если среда и включение изотропные, то тензоры  $c(x)$  и  $\alpha(x)$  принимают вид

$$c(x) = \lambda(x) E_2 + 2\mu(x) E_1, \quad \alpha_{\alpha\beta}(x) = \alpha(x) \delta_{\alpha\beta}$$

$$E_1^{\alpha\beta\lambda\mu} = (\delta^{\alpha\lambda} \delta^{\beta\mu})_{(\alpha\beta)(\lambda\mu)}, \quad E_2^{\alpha\beta\lambda\mu} = \delta^{\alpha\beta} \delta^{\lambda\mu}$$

где  $\lambda(x)$ ,  $\mu(x)$  — коэффициенты Ламе,  $\alpha(x)$  — скалярный коэффициент линейного расширения материала включения. Преобразование Фурье  $K^*(k)$  ядра  $K(x)$  в (1.3) (символ оператора  $\mathbf{K}$ ) может быть найдено из соотношений (1.2) и в случае изотропной среды имеет вид ( $\lambda_0$ ,  $\mu_0$  — коэффициенты Ламе основной среды):

$$K^*(n) = \frac{1}{\mu_0} \left( E_3(n) - \frac{\lambda_0 + \mu_0}{\kappa_0} E_4(n) \right), \quad \kappa_0 = \lambda_0 + 2\mu_0, \quad n = \frac{k}{|k|} \quad (1.5)$$

$$E_{3\alpha\beta\lambda\mu}(n) = (\delta_{\alpha\lambda} n_\beta n_\mu)_{(\alpha\beta)(\lambda\mu)}, \quad E_{4\alpha\beta\lambda\mu}(n) = n_\alpha n_\beta n_\lambda n_\mu$$

**2. Центральная-симметричная неоднородность.** Пусть параметры среды  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\alpha$  зависят только от расстояния  $r$  до центра включения. В этом случае для решения уравнения (1.3) воспользуемся специальным представлением сингулярного интегрального оператора  $\mathbf{K}$ . Введем сферическую систему координат  $(r, n)$  с началом в центре включения. Здесь  $r = |x|$ ,  $n = x/|x|$  — вектор на единичной сфере  $\Omega$ . Обозначим через  $f^*(s, n)$  преобразование Меллина тензорной функции  $f(r, n)$  по переменной  $r$ . Имеют место формулы [4]:

$$f^*(s, n) = \int_0^\infty r^{s-1} f(r, n) dr, \quad f(r, n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} r^{-s} f^*(s, n) ds \quad (2.1)$$

Из результатов [5] следует, что на финитных, кусочно-гладких функциях  $f(r, n)$  оператор  $\mathbf{K}$  допускает представление

$$(\mathbf{K}f)(r, n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} r^{-s} (\mathbf{K}_s f^*)(s, n) ds, \quad \tau = \frac{1}{2} \quad (2.2)$$

где оператор  $\mathbf{K}_s$  определяется соотношением

$$\begin{aligned} & (\mathbf{K}_s f^*)(s, n) = \\ & = -\frac{i}{(2\pi)^3} \Gamma(3-s) \Gamma(s) \int_\Omega d\Omega_m \int_\Omega d\Omega_l (-n \cdot m)^{-s} (l \cdot m)^{s-3} K^*(m) \cdot f^*(s, l) d\Omega, \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь  $\Gamma(s)$  — гамма-функция Эйлера,  $n$ ,  $m$ ,  $l$  — векторы на единичной сфере;  $K^*(m)$  имеет вид (1.5).

Найдем результат действия оператора  $K_s$  на тензоры  $e_1^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$ ,  $e_2^{\alpha\beta}(n) = n^\alpha n^\beta$ . Переходя к угловым координатам на единичной сфере, вычислим интегралы ( $\text{Re } s < 1$ ):

$$\int_{\Omega} (n \cdot m)^{-s} d\Omega_m = J(s), \quad \int_{\Omega} (n \cdot m)^{-s} e_2(m) d\Omega_m = \frac{J(s)}{3-s} h(s, n)$$

$$J(s) = 2\pi(1 + \exp(-i\pi s)) / (1-s), \quad h(s, n) = e_1 - s e_2(n)$$

Используя эти соотношения, из (2.3) и (1.5) получим равенства

$$(K_s e_1)(s, n) = \frac{h(s, n)}{\kappa_0(3-s)}, \quad (K_s e_2)(s, n) = \frac{(s-2)h(s, n)}{\kappa_0 s(3-s)} \quad (2.4)$$

Рассмотрим решение уравнения (1.3) ( $\Theta=1$ ), применив к обеим его частям преобразование Меллина. Учитывая равенства  $c^{\alpha\beta\lambda\mu}(r)\alpha_{1\lambda\mu}(r) = \gamma(r)e_1^{\alpha\beta}$ ,  $\gamma(r) = 3k(r)\alpha_1(r)$ ,  $k(r) = \lambda(r) + \frac{2}{3}\mu(r)$  и соотношения (2.2) и (2.4), будем иметь

$$\varepsilon_1^*(s, n) + (K_s(c_1 \cdot \varepsilon_1)^*)(s, n) = \gamma^*(s)h(s, n) / (\kappa_0(3-s)) \quad (2.5)$$

где  $\varepsilon_1^*$  и  $\gamma^*$  — преобразование Меллина функций  $\varepsilon_1(r, n)$  и  $\gamma(r)$ . Отсюда и из свойств оператора  $K_s$  (2.4) следует, что функцию  $\varepsilon_1^*(s, n)$  можно искать в виде  $\varepsilon_{1\alpha\beta}(s, n) = \beta^*(s)h_{\alpha\beta}(s, n)$ , где  $\beta^*(s)$  — преобразование Меллина неизвестной скалярной функции  $\beta(r)$ .

Переходя в последнем соотношении к  $r$ -представлению, получим для  $\varepsilon_1(r, n)$  выражение

$$\varepsilon_1(r, n) = (e_1 + e_2(n)D)\beta(r), \quad D = r d/dr \quad (2.6)$$

Здесь учтено, что множителю  $-s$  в пространстве преобразований Меллина соответствует оператор  $D$  в исходном  $r$ -пространстве. Произведение  $c_1 \cdot \varepsilon_1$  в (2.5) с учетом (2.6) примет вид

$$(c_1 \cdot \varepsilon_1)(r, n) = S_1(r)e_1 + S_2(r)e_2(n), \quad S_1(r) = (3k_1(r) + \lambda_1(r)D)\beta(r)$$

$$S_2(r) = 2\mu_1(r)D\beta(r), \quad k_1(r) = k(r) - k_0, \quad k_0 = \lambda_0 + \frac{2}{3}\mu_0 \quad (2.7)$$

где  $\lambda_1 = \lambda - \lambda_0$ ,  $\mu_1 = \mu - \mu_0$ . Подставим выражение для  $\varepsilon_1$  и  $c_1 \cdot \varepsilon_1$  (2.6), (2.7) в (2.5). Используя (2.4) и приравнявая коэффициенты при тензоре  $h(s, n)$  в левой и правой частях полученного соотношения, будем иметь

$$\beta^*(s) + \frac{1}{\kappa_0(3-s)} \left( S_1^*(s) - \frac{2-s}{s} S_2^*(s) \right) = \frac{\gamma^*(s)}{\kappa_0(3-s)} \quad (2.8)$$

Домножая обе части этого равенства на  $s(3-s)$  и переходя к  $r$ -представлению, получим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция  $\beta(r)$

$$(3+D)D\beta - \kappa_0^{-1}L(D)\beta = \kappa_0^{-1}D\gamma, \quad L(D) = D(3k_1 + \lambda_1 D) + 2(2+D)\mu_1 D \quad (2.9)$$

Поскольку тензор  $\varepsilon_1(r, n)$  должен быть ограничен при  $r=0$  и стремиться к нулю при  $r \rightarrow \infty$ , то в силу (2.6) этим же условиям должна удовлетворять функция  $\beta(r)$ . При этом решение уравнения (2.9) определяется однозначно. Таким образом, в случае центрально-симметричной неоднородности решение уравнения (1.3) имеет вид (2.6), где функция  $\beta(r)$  удовлетворяет уравнению (2.9).

**3. Сферически-слоистое включение.** Пусть  $\lambda(r)$ ,  $\mu(r)$  и  $\alpha(r)$  — кусочно-постоянные функции с разрывами в точках  $r = a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $a_1 < a_2 < \dots < a_N$ . Неоднородность состоит из ядра и  $(N-1)$ -го сферического слоя, в каждом из которых параметры среды являются постоянными. В областях  $a_{i-1} < r < a_i$  (в  $i$ -м слое),  $i = 1, 2, \dots, N+1$ ;  $a_0 = 0$ ,  $a_{N+1} = \infty$  уравнение (2.9) принимает вид  $(3+D)D\beta = 0$  и имеет общее решение

$$\beta(r) = Y_1^i + Y_2^i r^{-3} \quad (3.1)$$

где  $Y_1^i$ ,  $Y_2^i$  — произвольные постоянные, с точностью до которых функция  $\beta(r)$  определена внутри каждого слоя.

Исследуем разрывы функции  $\beta(r)$  и ее производных на границах слоев при  $r=a_i$ . Из непрерывности вектора перемещений во всех точках среды следует, что тензор деформаций не содержит сингулярных составляющих. Отсюда и из (2.6) видно, что функция  $\beta(r)$  должна быть непрерывна на границах слоев.

Далее, пусть  $\gamma(r)$  — кусочно-постоянная функция с разрывами в точках  $r=a_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) и равная нулю при  $r>a_N$ . Ее преобразование Меллина  $\gamma^*(s)$  имеет вид

$$\gamma^*(s) = -\frac{1}{s} \sum_{i=1}^N [\gamma]_i a_i^s \quad (3.2)$$

где величина  $[\varphi]_i$  для любой кусочно-непрерывной функции  $\varphi(r)$  определяется соотношением  $[\varphi]_i = \varphi(a_i+0) - \varphi(a_i-0)$ ,  $\varphi(a_i \pm 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(a_i \pm \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ .

Для непрерывной  $\beta(r)$  и кусочно-непрерывной функции  $\mu_1(r)$ , имеющей разрывы в точках  $r=a_i$ , с помощью интегрирования по частям можно показать справедливость равенства

$$(\mu_1 D\beta)^*(s) = -\sum_{i=1}^N [\mu_1 \beta]_i a_i^s - s(\mu_1 \beta)^*(s) \quad (3.3)$$

Учитывая (3.2), (3.3), для преобразований Меллина функций  $S_1(r)$  и  $S_2(r)$  в (2.7) получим выражения

$$S_1^*(s) = -\sum_{i=1}^N [\lambda_1 \beta]_i a_i^s + \int_0^{\infty} (3k_1(r) - s\lambda_1(r)) \beta(r) r^{s-1} dr$$

$$S_2^*(s) = -2 \sum_{i=1}^N [\mu_1 \beta]_i a_i^s - 2s(\mu_1 \beta)^*(s) \quad (3.4)$$

Подставляя (3.4) в (2.8) и учитывая, что для функции  $\beta(r)$  вида (3.1) имеет место равенство  $(\kappa(r) = \lambda(r) + 2\mu(r))$ :

$$s(3-s) \int_0^{\infty} \kappa(r) \beta(r) r^{s-1} dr = \sum_{i=1}^N (s[\kappa \beta]_i - [\kappa(3+D)\beta]_i) a_i^s \quad (3.5)$$

придем к соотношению

$$\sum_{i=1}^N \{s([\kappa \beta]_i - [\mu_1 \beta]_i - [\kappa(3+D)\beta]_i + 4[\mu_1 \beta]_i) a_i^s = -\sum_{i=1}^N [\gamma]_i a_i^s, \quad \kappa_1 = \kappa - \kappa_0$$

Поскольку это соотношение выполняется в некоторой области значений параметра  $s$ , то множители при функциях  $a_i^s$  в левой и правой частях должны быть равны. Отсюда получаем  $N$  равенств  $s\kappa_0[\beta]_i - 3[k\beta]_i - [\kappa D\beta]_i = -[\gamma]_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ), из которых следуют искомые условия на скачки функции  $\beta(r)$  и ее производной на границах слоев

$$[\beta]_i = 0, \quad 3[k\beta]_i + [\kappa D\beta]_i = [\gamma]_i \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (3.6)$$

Отсюда и из граничных условий для  $\beta(r)$  при  $r=0$  и  $r \rightarrow \infty$  можно найти постоянные  $Y_1^i, Y_2^i$  ( $i=1, 2, \dots, N+1$ ), определяющие решение (3.1) при всех  $r$ . Перейдем к построению всего массива этих постоянных.

Введем  $N+1$  двумерных векторов  $Y^i$ , компонентами которых являются постоянные  $Y_1^i$  и  $Y_2^i$  в (3.1), и векторы  $X^i(r)$  с компонентами  $X_1^i(r) = \beta(r)$ ,  $X_2^i(r) = D\beta(r)$ ,  $a_{i-1} < r < a_i$ . Из (3.1) следует, что векторы  $Y^i$  и  $X^i(r)$  свя-

$$X^i(r) = H(r)Y^i, \quad Y^i = H^{-1}(r)X^i(r) \quad (3.7)$$

$$H(r) = \|h_{km}\| \quad (k, m=1, 2), \quad h_{11}=1, \quad h_{22} = -3h_{12} = -3r^{-3}, \quad h_{21}=0$$

Отсюда видно, что значение вектора  $X^i(r)$  в точке  $r=a_i-0$  (на правом конце  $i$ -го интервала) выражается через его значение на левом конце ( $r=a_{i-1}+0$ ) по формуле

$$X^i(a_i) = R^i X^i(a_{i-1}), \quad R^i = H(a_i)H^{-1}(a_{i-1}) = \|r_{km}^i\| \quad (3.8)$$

$$r_{11}^i = 1, \quad r_{12}^i = 1/3[1 - (a_{i-1}/a_i)^3], \quad r_{21}^i = 0, \quad r_{22}^i = (a_{i-1}/a_i)^3$$

В силу соотношений (3.6) векторы  $X^i$  и  $X^{i+1}$  в точке  $r=a_i$  на границе  $i$ -го и  $(i+1)$ -го интервалов связаны равенством

$$X^{i+1}(a_i+0) = F_0^i + \Gamma_0^i X^i(a_i-0), \quad \Gamma_0^i = \|\gamma_{km}^i\| \quad (k, m=1, 2) \quad (3.9)$$

$$\gamma_{11}^i = 1, \quad \gamma_{12}^i = 0, \quad \gamma_{21}^i = -3[k]_i/\chi^{i+1}, \quad \gamma_{22}^i = \chi^i/\chi^{i+1}$$

$$F_{01}^i = 0, \quad F_{02}^i = [\gamma]^i/\chi^{i+1}, \quad \chi^i = \lambda^i + 2\mu^i$$

Здесь  $\lambda^i, \mu^i$  — коэффициенты Ламе внутри  $i$ -го слоя.

Пусть вектор  $X^1(a_0)$  решения на первом участке известен. Тогда вектор  $X^{i+1}(a_i)$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ), определяющий решение на  $(i+1)$ -м участке, в силу (3.7), (3.9) имеет вид

$$X^{i+1}(a_i) = g^i + G_i X^1(a_0) \quad (3.10)$$

$$g^i = \sum_{j=1}^i \left( \prod_{k=i}^{j+1} Q^k \right) F_0^j, \quad G^i = \prod_{k=i}^1 Q^k, \quad Q^k = \Gamma_0^k R^k$$

Из соотношения (3.1), ограниченности функции  $\beta(r)$  при  $r=0$  и стремления ее к нулю на бесконечности следуют равенства  $X_1^1(a_0) = Y_1^1$ ,

$$X_2^1(a_0) = 0, \quad X_1^{N+1}(a_N) = Y_2^{N+1} a_N^{-3}, \quad X_2^{N+1}(a_N) = -3Y_2^{N+1} a_N^{-3},$$

последние из которых дают связь между компонентами вектора  $X^{N+1}(a_N)$ :  $X_1^{N+1}(a_N) = -3X_2^{N+1}(a_N)$ .

Подставляя сюда компоненты вектора  $X^{N+1}(a_N)$ , выраженные через  $X^1(a_0)$  по (3.10), будем иметь  $X_1^1(a_0) = -(g_2^{N+1} + 3g_1^{N+1}) / (G_{21}^{N+1} + 3G_{11}^{N+1})$ , где учтено, что  $X_2^1(a_0) = 0$ , вектор  $g^N$  и матрица  $G^N$  определены в (3.10).

Полученный результат есть по существу решение рассматриваемой задачи. Значение векторов  $X^{i+1}(a_i)$  для  $i=1, 2, \dots, N$  вычисляются теперь по формулам (3.10), а векторы постоянных  $Y^i$ , определяющие решение (3.1) на всех интервалах, могут быть найдены из (3.7).

**4. Сферически-слоистая неоднородность с тонкими податливыми прослойками на границах фаз.** Температурные напряжения нередко являются причиной отслаивания включений от матрицы в композитных материалах. Отслаивание может быть неполным, так что на границе между фазами с различными коэффициентами линейного расширения образуются тонкие переходные слои (прослойки), модули упругости которых существенно меньше модулей упругости любой из фаз. Для расчета термоупругих полей в окрестности такой прослойки естественно заменить ее двумерной сингулярной моделью [6, 7].

Пусть на границе  $i$ -го и  $(i+1)$ -го слоев сферического слоистого включения имеется тонкая прослойка толщины  $h_i$  с тензором модулей упругости  $c_h^i(h_i/a_i, \|c_h^i \cdot (c^i)^{-1}\| \ll 1)$ . Сингулярную модель прослойки получим перейдя к пределу при  $h_i, c_h^i \rightarrow 0$  и сохранив неизменной величину [7]:

$$T_i = h_i c^i \cdot (a_i c_h^i)^{-1} \quad (4.1)$$

Найдем соотношение, связывающее векторы решения  $X^i$  и  $X^{i+1}$  в  $i$ -м и  $(i+1)$ -м слоях при наличии «сингулярной» прослойки между ними. Пусть вначале параметры прослойки малы, но конечны. Из соотношений (3.8), (3.9) следует, что векторы  $X^{i+1}(a_i+h_i)$  и  $X^i(a_i)$  связаны ра-

$$X^{i+1}(a_i+h_i) = F_h^{i+1} + \Gamma_h^{i+1} R_h^i F_h^i + \Gamma_h^{i+1} R_h^i \Gamma_h^i X^i(a_i) \quad (4.2)$$

где матрицы  $\Gamma_h^i$  и  $\Gamma_h^{i+1}$  и векторы  $F_h^i$  и  $F_h^{i+1}$  определяют скачки решения при переходе из  $i$ -го слоя в прослойку и из прослойки в  $(i+1)$ -й слой и имеют вид, аналогичный (3.9). Матрица переноса решения через прослойку  $R_h^i$  с точностью до членов порядка  $(h_i/a_i)$  имеет в силу (3.8) вид

$$R_h^i = \|r_{km}\| \quad (k, m=1, 2), \quad r_{11}^i = r_{22}^i = 1, \quad r_{12}^i = h_i/a_i, \quad r_{21}^i = 0$$

Переходя в (4.2) к пределу при  $h_i, c_h^i \rightarrow 0$  и сохраняя конечной величину  $T_i$  (4.1), получим равенство

$$X^{i+1}(a_i) = F^i + \Gamma^i X^i(a_i) \quad (4.3)$$

$$F^i = \lim (F_h^{i+1} + \Gamma_h^{i+1} R_h^i F_h^i), \quad \Gamma^i = \lim \Gamma_h^{i+1} R_h^i \Gamma_h^i \quad (h_i, c_h^i \rightarrow 0)$$

Выражения для матрицы  $\Gamma^i$  и вектора  $F^i$  в этом соотношении принимают вид

$$\begin{aligned} \Gamma^i &= \Gamma_0^i + t_i \Gamma_t^i, \quad F^i = F_0^i + t_i F_t^i, \quad \Gamma_t^i = \|\gamma_{lm}^i\| \quad (l, m=1, 2) \\ \gamma_{11}^i &= 1, \quad \gamma_{12}^i = \kappa^{i+1}/(3k^i), \quad \gamma_{21}^i = -3k^{i+1}/\kappa^i, \quad \gamma_{22}^i = -\kappa^i k^{i+1}/(\kappa^{i+1} k^i) \\ t_i &= 3k_i h_i / [a_i (\lambda_h^i + 2\mu_h^i)], \quad F_{t1}^i = -\alpha_1^i, \quad F_{t2}^i = \alpha_1^i 3k^{i+1}/\kappa^{i+1} \end{aligned}$$

где  $\lambda_h^i, \mu_h^i$  — коэффициенты Ламе материала прослойки, матрицы  $\Gamma_0^i$  и  $F_0^i$  определены в (3.9). Коэффициент линейного расширения прослойки предполагается ограниченной величиной и в предыдущие соотношения не входит.

Схема построения массива постоянных  $Y_1^i, Y_2^i$ , определяющих решение (функцию  $\beta(r)$ ) внутри всех слоев, аналогична изложенной в п. 3. Необходимо лишь заменить соотношение (3.9) на (4.3).

Тензоры напряжений  $\sigma$  и возмущения деформаций  $\varepsilon_1$  в среде с неоднородностью связаны соотношением  $\sigma = c \cdot (\varepsilon_1 - \alpha_1 \Theta)$ . Поэтому с точностью до множителя  $\Theta$  напряжения в  $i$ -м слое  $\sigma_i(r, n)$  выражаются через постоянные  $Y_1^i, Y_2^i$  по формуле

$$\sigma_i(r, n) = 3k^i (Y_1^i - \alpha_1^i) e_1 + 2\mu^i Y_2^i r^{-3} (e_1 - 3e_2(n)) \quad (4.4)$$

Заметим, что следствием соотношений (4.3) является разрыв функции  $\beta(r)$  ( $\beta(r) = X_1^i(r), a_{i-1} < r < a_i$ ) при переходе через границу слоев. Величина разрыва определяется равенством (сравни (3.6))

$$[\beta]_i = z_i, \quad z_i = t_i [-\alpha^i + X_1^i(a_i) + (\kappa^{i+1}/3k^i) X_2^i(a_i)] \quad (4.5)$$

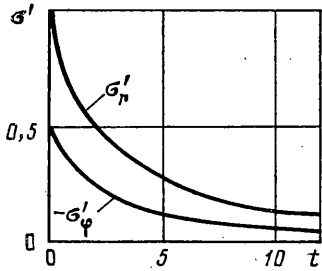
Отсюда и из соотношения (2.6) следует, что поле деформаций  $\varepsilon(r, n)$  в данном случае представляется в виде суммы регулярной  $\varepsilon^r$  и сингулярной  $\varepsilon^s$  составляющих. Обобщенная функция  $\varepsilon^s(r, n)$  сосредоточена на границах слоев и имеет вид

$$\varepsilon^s(r, n) = \sum_{i=1}^N z_i a_i \delta(r - a_i) e_2(n)$$

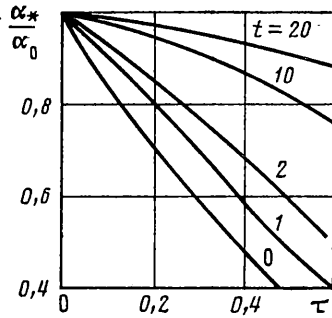
Регулярная составляющая  $\varepsilon^r$  вычисляется по описанному выше алгоритму.

Рассмотрим пример жесткого сферического включения ( $\mu^1/\mu_0 = 10^3, \nu^1 = \nu_0 = 0,3, \alpha^1 = 0; \nu_0, \nu^1$  — коэффициенты Пуассона среды и включения) с тонкой податливой прослойкой на границе со средой. На фиг. 1 представлена концентрация температурных напряжений в среде у края включения в зависимости от параметра  $t = 3k_0 h / [a(\lambda_h + 2\mu_h)]$ , характеризующего свойства прослойки ( $\sigma_r', \sigma_\theta'$  — относительное радиальное и окружное напряжения,  $\sigma^r = (4\mu_0 \alpha_0)^{-1} \sigma$ ).

**5. Температурные напряжения в композите со сферическими слоистыми включениями.** Рассмотрим бесконечную однородную и изотропную термоупругую среду, в которой пространственно однородно и изотропно распре-



Фиг. 1



Фиг. 2

делено множество одинаковых сферически-слоистых включений. Для вычисления эффективного коэффициента линейного расширения композита и оценки средней концентрации температурных напряжений на включениях воспользуемся методом эффективного (самосогласованного) поля [1, 2, 8]. В основе метода лежит следующая гипотеза.

Каждое включение в композите можно рассматривать как изолированное и находящееся в заданном температурном поле и в поле эффективных внешних напряжений  $\sigma_*^{\alpha\beta}$ , которым учитывается влияние на данное включение всех окружающих неоднородностей. В простейшем варианте метода поле  $\sigma_*^{\alpha\beta}$  предполагается постоянным и одинаковым для всех включений, причем в случае однородного нагревания (охлаждения) среды из симметрии задачи следует, что  $\sigma_*^{\alpha\beta}$  — шаровой тензор.

Отсюда следует, что температурные напряжения в окрестности произвольного включения, занимающего объем  $V$  композитного материала, удовлетворяют уравнению [1]:

$$\sigma^{\alpha\beta}(x) - \int_V S^{\alpha\beta\lambda\mu}(x-x') B_{1\lambda\mu\nu\rho}(x') \sigma^{\nu\rho}(x') dx' = \int_V S^{\alpha\beta\lambda\mu}(x-x') \alpha_{1\lambda\mu}(x') dx' + \sigma_*^{\alpha\beta} \quad (5.1)$$

где  $\sigma_*^{\alpha\beta} = \sigma_* \sigma^{\alpha\beta}$  — неизвестное пока эффективное внешнее поле напряжений. Это уравнение отличается от (1.1) слагаемыми  $\sigma_*^{\alpha\beta}$  в правой части. Обозначим через  $\sigma_e^{\alpha\beta}$  решение уравнения (1.1) при  $\Theta=1$ , а через  $\sigma_s^{\alpha\beta}$  — решение (5.1) с правой частью  $\sigma_*^{\alpha\beta}$ . Тогда решением уравнения (5.1) будет сумма  $\sigma_e^{\alpha\beta} + \sigma_s^{\alpha\beta}$ , причем поле  $\sigma_1^{\alpha\beta} = \sigma_e^{\alpha\beta} - \sigma_*^{\alpha\beta}$  в силу (5.1) удовлетворяет уравнению

$$\sigma_1^{\alpha\beta}(x) - \int_V S^{\alpha\beta\lambda\mu}(x-x') B_{1\lambda\mu\nu\rho}(x') \sigma_1^{\nu\rho}(x') dx' = \int_V S^{\alpha\beta\lambda\mu}(x-x') B_{1\lambda\mu\nu\rho}(x') \sigma_*^{\nu\rho} dx' \quad (5.2)$$

Это уравнение совпадает с (1.1), если функцию  $(B_1 \cdot \sigma_*)_{\lambda\mu}$  под интегралом в правой части заменить на  $\alpha_{1\lambda\mu}(x)$ . Поэтому для решения уравнения (5.2) можно воспользоваться алгоритмом, изложенным в пп. 3, 4, заменив скалярный коэффициент  $\alpha_1(r)$  на величину  $-\varepsilon_* k_1(r)/k(r)$ ,  $3\varepsilon_* = \sigma_*/k_0$ .

Обозначим через  $Y_s^i$  векторы постоянных, определяющие решение уравнения (1.1) при  $\Theta=1$  по формулам пп. 3, 4, а через  $Y_s^i$  — аналогичные векторы, определяющие решение уравнения (5.1) с правой частью  $\sigma_*^{\alpha\beta} = 3k_0 \delta^{\alpha\beta}$  ( $\alpha_{1\lambda\mu} = 0$ ). При этом выражение для тензора  $\sigma_s$  представляется в форме  $\sigma_s = c \cdot (\varepsilon_{1s} + e_1)$ ,  $\varepsilon_{1s} = (e_1 + e_2(n)D)\beta_s$ ,  $\beta_s = Y_{s1}^i + Y_{s2}^i r^{-3}$  при  $a_{i-1} < r < a_i$  ( $i=1, 2, \dots, N+1$ ), а для построения векторов  $Y_s^i$  в формулах пп. 3, 4 следует принять  $\gamma(r) = -3k_1(r)$ .

Рассмотрим процедуру построения уравнения для эффективного поля  $\sigma_*^{\alpha\beta}$ . Для простоты заменим включения конечных размеров эквивалентными точечными дефектами по схеме, изложенной в [9]. Пусть  $X = \bigcup_i \xi_i$  — множество центров включений  $\xi_i$ ;  $X(x)$  — обобщенная функция, сосредоточенная на этом множестве:  $X(x) = \sum_i \delta(x - \xi_i)$ . В приближении то-

чечных дефектов напряжения и деформации в композите определяются соотношениями

$$\sigma^{\alpha\beta}(x) = \int S^{\alpha\beta\lambda\mu}(x-x') (P_{\lambda\mu}^{\circ} + P_{\lambda\mu\nu\rho}^s \sigma_{*}^{\nu\rho}) X(x') dx' \quad (5.3)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(x) = \alpha_{\circ\alpha\beta} + \int K_{\alpha\beta\lambda\mu}(x-x') c_0^{\lambda\mu\nu\rho} (P_{\nu\rho}^{\circ} + P_{\nu\rho\tau\delta}^s \sigma_{*}^{\tau\delta}) X(x') dx' \quad (5.4)$$

$$P_{\lambda\mu\nu\rho}^s \sigma_{*}^{\nu\rho} = \int_V B_{1\lambda\mu\nu\rho}(x) \sigma_1^{\nu\rho}(x) dx, \quad P_{\nu\rho}^{\circ} = \int_V B_{1\nu\rho\tau\delta}(x) \sigma_{\circ}^{\tau\delta}(x) dx \quad (5.5)$$

Здесь интегрирование в (5.3), (5.4) проводится по всему пространству, а в (5.5) — по объему  $V$  любого включения. Самосогласованное уравнение для поля  $\sigma_{*}^{\alpha\beta}$  следует из (5.3) и имеет вид [1, 9]

$$\sigma_{*}^{\alpha\beta} = \int S^{\alpha\beta\lambda\mu}(x-x') (P_{\lambda\mu}^{\circ} + P_{\lambda\mu\nu\rho}^s \sigma_{*}^{\nu\rho}) \langle X(x; x') | x \rangle dx' \quad (5.6)$$

где  $X(x; x')$  — обобщенная функция вида  $X(x; x') = \sum \delta(x' - \xi_i)$  ( $i \neq k$ ) при  $x = \xi_k$ ,  $\langle |x \rangle$  обозначает среднее по ансамблю множества включений при условии  $x \in X$ .

Если  $X$  — однородное и изотропное в пространстве случайное множество, то функция  $\langle X(x; x') | x \rangle = \Psi(x, x')$  зависит только от  $|x-x'|$  и является гладкой и ограниченной. Из определения функции  $X(x; x')$  следует, что  $\Psi(x)$  обращается в нуль при  $x=0$  и  $\Psi(x) \rightarrow n_0$  при  $|x| \rightarrow \infty$  ( $n_0$  — числовая концентрация включений). Вычислив интеграл в (5.6), значение которого не зависит от конкретного вида функции  $\Psi(x)$ , придем к алгебраическому уравнению относительно тензора  $\sigma_{*}^{\alpha\beta}$ . Решив это уравнение, будем иметь

$$\sigma_{*}^{\alpha\beta} = -n_0 \Lambda_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} D^{\lambda\mu\nu\rho} P_{\nu\rho}^{\circ}, \quad (\Lambda^{-1})_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} = E_{1\lambda\mu}^{\alpha\beta} + n_0 D^{\alpha\beta\nu\rho} P_{\nu\rho\lambda\mu}^s$$

$$D = \frac{1}{n_0} \int S(x) [n_0 - \Psi(x)] dx = -\frac{12\mu_0}{3k_0 + 4\mu_0} \left[ k_0 E_2 - \frac{9k_0 + 8\mu_0}{10} \left( E_1 - \frac{1}{3} E_2 \right) \right]$$

Подставим полученное выражение для  $\sigma_{*}^{\alpha\beta}$  в (5.4). Осредняя затем обе части по ансамблю случайного множества  $X$  и используя равенства  $\langle X(x) \rangle = n_0$  и (1.4), получим  $\langle \varepsilon \rangle = \alpha_{\circ} + n_0 P^{\circ} \cdot (E_1 + n_0 D \cdot P^s)^{-1}$ . Так как во всем изложении температура  $\Theta$  считается равной единице, то правая часть этого соотношения совпадает с эффективным коэффициентом линейного расширения композита  $\alpha_{*}^{\alpha\beta}$ . Используя предыдущие равенства, можно показать, что  $\alpha_{*}^{\alpha\beta} = \alpha_{*} \delta_{\alpha\beta}$  — шаровой тензор, а выражение для скалярного коэффициента  $\alpha_{*}$  имеет вид

$$\alpha_{*} = \alpha_{\circ} + n_0 p_0^{\circ} / (1 + 3n_0 d_0 p_0^s), \quad d_0 = 4\mu_0 / (3k_0 + 4\mu_0)$$

$$p_0^{\circ} = \frac{4\pi}{3} \sum_{i=1}^N \left( \frac{k^i}{k_0} \alpha_1^i - \frac{k_1^i}{k_0} Y_{\circ 1^i} \right) (a_i^3 - a_{i-1}^3) \quad (5.7)$$

$$p_0^s = \frac{4\pi}{3} \sum_{i=1}^N \frac{k_1^i}{k_0} (1 + Y_{s 1^i}) (a_i^3 - a_{i-1}^3)$$

При  $N=1$  из этих формул следует выражение для  $\alpha_{*}$ , совпадающее с полученным в [8].

Для включений с тонкими прослойками на границах фаз коэффициенты  $p_0^{\circ}$  и  $p_0^s$  в (5.7) следует заменить на  $p^{\circ}$  и  $p^s$  соответственно

$$p^{\circ} = p_0^{\circ} + \frac{4\pi}{3} \sum_{i=1}^N z_i^{\circ} a_i^3, \quad p^s = p_0^s - \frac{4\pi}{3} \sum_{i=1}^N z_i^s a_i^3$$

Здесь постоянные  $z_i^{\circ}$  имеют вид (4.5) и определяются из решения температурной задачи для сферического слоистого включения с тонкими податливыми прослойками на границах фаз (п. 4), а постоянные  $z_i^s$  — из



решения упругой задачи для аналогичного включения в поле внешних напряжений  $\sigma_*^{\alpha\beta} = 3k_0\delta^{\alpha\beta}$ .

Температурные напряжения в  $i$ -м слое произвольного включения определяются из соотношения ( $\Theta=1$ ):

$$\sigma_i(r, n) = 3k^i [Y_{\theta 1}^i - \alpha_1^i + \varepsilon_* (1 + Y_{s 1}^i)] e_1 + \\ + 2\mu^i (Y_{\theta 2}^i + \varepsilon_* Y_{s 2}^i) r^{-3} (e_1 - 3e_2(n)), \quad \varepsilon_* = 3n_0 d_0 p^0 / (1 + 3n_0 d_0 p^s)$$

где слагаемыми, пропорциональными  $\varepsilon_*$ , учитывается взаимодействие между включениями.

На фиг. 2 приведены графики зависимости коэффициента  $\alpha_*$  для среды, содержащей включения, описанные в п. 4, от величины параметра  $t$ , характеризующего свойства прослойки, и объемной концентрации включений  $\tau = 4\lambda a_1^3 n_0 / 3$ .

В заключение отметим, что полученные формулы для эффективного коэффициента линейного расширения  $\alpha_*$  и температурных напряжений во включениях остаются физически непротиворечивыми при любых возможных значениях термоупругих параметров матрицы и включений и объемной концентрации последних. При малой концентрации включений эти формулы являются точными. Для однородных включений ( $N=1$ ) коэффициент  $\alpha_*$  вида (5.7) всегда расположен внутри вилки, полученной с помощью вариационных оценок типа Хашина — Штрикмана. В случае регулярных структур (плоская задача) расчет коэффициента  $\alpha_*$  методом эффективного поля приводит к ошибке (по сравнению с точным решением), не превышающей 10–15% даже для случая концентрации, близкой к плотной упаковке (см. [8, 10]).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Левин В. М. О температурных напряжениях в композитных средах // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 3. С. 502–506.
2. Канаун С. К. Метод эффективного поля в линейных задачах статики композитной среды // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 655–665.
3. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука. 1973. 232 с.
4. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука. 1967. 402 с.
5. Пламеневский Б. А. Об ограниченности сингулярных интегралов в пространствах с весом // Мат. сб. 1968. Т. 76. № 4. С. 573–592.
6. Соткилава О. В., Черепанов Г. П. Некоторые задачи неоднородной теории упругости // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 3. С. 539–550.
7. Канаун С. К. О сингулярных моделях тонкого включения в однородной упругой среде // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 1. С. 81–91.
8. Левин В. М. К определению упругих и термоупругих постоянных композитных материалов // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 6. С. 137–145.
9. Канаун С. К. О модели точечных дефектов в механике упругой неоднородной среды // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 4. С. 109–118.
10. Кочетков Е. П., Леонтьев Н. В., Угодчиков М. А. Эффективные термоупругие характеристики регулярных волокнистых композитов // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький: Изд-во Горьк. ун-та. 1985. Вып. 29. С. 66–72.

Ленинград

Поступила в редакцию  
5.VIII.1985