МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1987

УДК 531.55

К ИССЛЕДОВАНИЮ ЗАДАЧ ВНЕШНЕЙ БАЛЛИСТИКИ

ЛОХОВ Г. М., ПОДЗОРОВ С. И., ЯНКОВСКИЙ И. В.

Быстрота и качество исследований относительного движения вращающихся твердых тел в атмосфере во многом определяется выбором не только корректной и достоверной математической модели динамики, но и принятием определенной модели аэродинамического воздействия, с уточнением которой возникают новые задачи внешней баллистики [1–5]. В настоящее время построение адекватной модели аэродинамического воздействия на движущееся в атмосфере вращающееся твердое тело не может считаться завершенным. Развитие вычислительной техники существенно повысило результативность численных методов нестационарной аэродинамики, которые постепенно становятся главным источником конкретной информации. Однако получение многих нестационарных аэродинамических характеристик затруднено [4, 5]. Причем наиболее сложно задание аэродинамических сил и моментов при больших значениях углов атаки и угловых скоростей вращения обтекаемого тела. Проблема прогнозирования и расчета боковых сил на вращающихся телах недостаточно изучена экспериментально и мало изучена теоретически [3].

Численное исследование задач внешней баллистики является заключительным этапом определения характеристик движения тела в атмосфере. Затраты машинного времени при определении аэродинамических характеристик тела существенно превосходят время последующих баллистических расчетов. Поэтому в задачах внешней баллистики обычно не выдвигались требования математической оптимизации в смысле минимизации трудоемкости вычислений [6]. Предполагалось, что достигнутая экономия не позволит получить значительного сокращения суммарных вычислительных затрат. Однако при проведении больших параметрических исследований движения твердого тела в атмосфере с известными аэродинамическими характеристиками вычислительные затраты на баллистические расчеты становятся сравнимыми с затратами на аэродинамические расчеты. Примером такого параметрического исследования может служить изучение влияния на траекторию центра масс вариаций начальных условий, аэродинамических характеристик, различных асимметрий с определением границ допустимых погрешностей в варьируемых параметрах и, как следствие, в аэродинамических расчетах.

В данной работе ставится задача увеличения быстродействия баллистических расчетов без потери их точности.

В [6] введено понятие оптимальной имитационной модели в смысле минимальной трудоемкости математического моделирования на ЭВМ уравнений динамики полета твердого тела в атмосфере и указано, что создание оптимальной модели должно проводиться одновременно с выбором наилучших с точки зрения минимальных вычислительных затрат алгоритмов численного интегрирования жестких нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений динамики или с разработкой универсального метода исследования задач внешней баллистики, основанного на сочетании прямых численных методов с интегрированием упрощенных уравнений, обработанных предварительно с помощью асимптотических методов [7]. Эффективная реализация разработанных моделей на ЭВМ базируется на физически обоснованном и оптимальном (в указанном выше смысле) теоретическом описании динамического процесса пространственного движения осесимметричного твердого тела в атмосфере.

Общие уравнения пространственного движения тел с гиперзвуковой скоростью на пассивном участке приводятся в [1–3]. Главное и практически единственное упрощение, которое сделано при рассмотрении движения тела в общем случае, состоит в том, что оно считается абсолютно жестким телом вращения.

Особенностью математической модели движения вращающихся твердых тел в атмосфере является разделение ее на основную и общую задачу баллистики [1, 2]. Это позволяет изучать движение относительно центра масс в предположении, что центр масс движется по траектории, являющейся решением основной задачи внешней баллистики, т. е. фактически раздельно решать уравнения количества движения и моментов. Наряду с гироскопическими силами учитываются все аэродинамические силы, в том числе и неконсервативные, а также их моменты.

В математическую модель движения твердого тела в атмосфере кроме уравнений движения, в том числе и с переменной массой, входят характеристики внешней среды и тела, граничные условия, таблицы или уравнения расчета коэффициентов аэродинамических сил и моментов, уравнения возмущающих факторов.

1. Введем неподвижную и подвижную системы координат следующим образом [1, 7]: неподвижную систему $OXYZ$ свяжем с вертикальной плоскостью, причем ось OX образована пересечением вертикальной плоскости с горизонтальной; ось OY лежит в вертикальной плоскости и направлена вверх; OZ дополняет систему до правой. В подвижной системе $O\xi\eta\zeta$ ось $O\xi$ направлена по вектору скорости $\mathbf{V}$, ось $O\eta$ — по пересечению вертикальной плоскости OXY и плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{V}$, а ось $O\zeta$ — по пересечению горизонтальной плоскости OXZ и плоскости, перпендикулярной $\mathbf{V}$. Такая система удобна тем, что ее угловая скорость ω^* относительно $OXYZ$ просто выражается через производные углов ориентации $\mathbf{V}$ относительно $OXYZ$. Система координат $O\xi\eta\zeta$ не является ортогональной. Для единичных векторов этой системы $\boldsymbol{\xi}^\circ$, $\boldsymbol{\eta}^\circ$, $\boldsymbol{\zeta}^\circ$ выполняются следующие соотношения ($V_z^n = V_z/V$ — нормированная боковая скорость):

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{\xi}^\circ \times \boldsymbol{\eta}^\circ = [1+O((V_z^n)^2)]\boldsymbol{\zeta}^\circ + O(V_z^n)\boldsymbol{\eta}^\circ + O((V_z^n)^4)\boldsymbol{\xi}^\circ \\
\boldsymbol{\zeta}^\circ \times \boldsymbol{\xi}^\circ = O(V_z^n)\boldsymbol{\zeta}^\circ + [1+O((V_z^n)^2)]\boldsymbol{\eta}^\circ + O((V_z^n)^4)\boldsymbol{\xi}^\circ \\
\boldsymbol{\eta}^\circ \times \boldsymbol{\zeta}^\circ = [1+O((V_z^n)^2]\boldsymbol{\xi}^\circ
\end{gathered} \tag{1.1}
$$

Из (1.1) следует, что система координат $O\xi\eta\zeta$ является ортонормированной, только если $V_z^n=0$, т. е. когда траектория движения тела лежит в вертикальной плоскости. Однако гироскопические эффекты, отклонения начальных условий от номинальных и другие факторы вызывают появление боковых сил, выводящих траекторию тела из вертикальной плоскости. Практически V_z^n обычно мала и не превосходит 0,01. Поэтому есть основания полагать, что погрешности, вызванные отличием V_z^n от нуля, будут также малы. Покажем это.

Уравнения относительного движения тела записываются следующим образом [7]:

$$
[\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\tau}^{\cdot\cdot\vee}]_\eta = A^*, \quad [\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\tau}^{\cdot\cdot\vee}]_\zeta = B^*, \quad |\boldsymbol{\tau}|=1 \tag{1.2}
$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}=\|\xi,\ \eta,\ \zeta\|^T$ — единичный вектор оси тела, индексы η и ζ — проекции на соответствующие оси подвижной системы координат, $\boldsymbol{\tau}^{\cdot\cdot\vee}$ — локальная производная $\boldsymbol{\tau}$ в системе $O\xi\eta\zeta$; A^* и B^* — известные функции параметров движения центра масс тела, векторов $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\tau}^{\cdot\vee}$.

Если $V_z^n=0$, то система координат $O\xi\eta\zeta$ нормирована, и (1.2) примет вид

$$
\ddot{\xi}\zeta - \xi\ddot{\zeta} = A^*, \quad \xi\ddot{\eta} - \ddot{\xi}\eta = B^* \tag{1.3}
$$

Пусть теперь $V_z^n \neq 0$. Учитывая соотношения (1.1), получим, пренебрегая малыми более высоких порядков

$$
\begin{gathered}
(\ddot{\xi}\zeta - \xi\ddot{\zeta})[1+O((V_z^n)^2)] + (\xi\ddot{\eta} - \ddot{\xi}\eta)O(V_z^n) = A^* \\
(\xi\ddot{\eta} - \ddot{\xi}\eta[1+O((V_z^n)^2)] + (\ddot{\xi}\zeta - \xi\ddot{\zeta})O(V_z^n) = B^*
\end{gathered}
$$

Разрешив эту систему относительно $\ddot{\xi}\zeta - \xi\ddot{\zeta}$ и $\xi\ddot{\eta} - \ddot{\xi}\eta$, получим, пренебрегая малыми порядка выше первого

$$
\ddot{\xi}\zeta - \xi\ddot{\zeta} = A^* + O(V_z^n)B^*, \quad \xi\ddot{\eta} - \ddot{\xi}\eta = B^* + O(V_z^n)A^* \tag{1.4}
$$

Таким образом, отличие V_z^n от нуля приводит к регулярным возмущениям в системе (1.3), что и дает основание пренебрегать неортогональностью системы координат $O\xi\eta\zeta$, если только V_z^n достаточно мала. Поэтому при $0<|V_z^n|\ll 1$ для описания относительного движения тела можно использовать систему (1.3), а не систему (1.4).

2. Приведем (1.3) к виду, удобному для решения на ЭВМ. Для этого разрешим уравнения (1.3) относительно $\ddot{\xi}$, $\ddot{\eta}$, $\ddot{\zeta}$ и исключим одну из переменных ξ, η, ζ с помощью нормировочного соотношения $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$, из которого имеем

$$
\xi = \pm\sqrt{1-\eta^2-\zeta^2} \tag{2.1}
$$

Будем считать, что движение тела устойчиво, т. е. ось снаряда хорошо отслеживает изменение направления вектора скорости центра масс. В этом случае угол атаки α близок к нулю и $\xi = \cos\alpha \approx 1$, т. е. в (2.1) перед радикалом следует взять знак плюс.

Дифференцируя нормировочное соотношение, найдем

$$\xi^{\cdot}=-(\eta\eta^{\cdot}+\zeta\zeta^{\cdot})/\xi$$
$$\xi^{\cdot\cdot}=-(\eta^{\cdot 2}+\zeta^{\cdot 2}+\xi^{\cdot 2}+\eta\eta^{\cdot\cdot}+\zeta\zeta^{\cdot\cdot})/\xi \tag{2.2}$$

Исключив с помощью (2.2) $\xi^{\cdot\cdot}$ из (1.3), получим

$$\zeta\eta\xi^{-1}\eta^{\cdot\cdot}-(\xi+\zeta^2\xi^{-1})\zeta^{\cdot\cdot}=C\zeta+A,\quad (\xi+\eta^2\xi^{-1})\eta^{\cdot\cdot}+\eta\zeta\xi^{-1}\zeta^{\cdot\cdot}=-C\eta-B$$
$$C=(\xi^{\cdot 2}+\eta^{\cdot 2}+\zeta^{\cdot 2})/\xi,\ A=-A^*,\ B=-B^* \tag{2.3}$$

Определитель системы (2.3):

$$\begin{vmatrix}\zeta\eta\xi^{-1} & -(\xi+\zeta^2\xi^{-1})\\ \xi+\eta^2\xi^{-1} & \zeta\eta\xi^{-1}\end{vmatrix}=-(\zeta\eta\xi^{-1})^2+\xi^2+\eta^2+\zeta^2+(\zeta\eta\xi^{-1})^2\equiv 1$$

Поэтому система уравнений (2.3) легко решается:

$$\eta^{\cdot\cdot}=-B\zeta^2/\xi-A\eta\zeta/\xi-C\eta\xi-B\xi=-\xi^{-1}\zeta(B\zeta+A\eta)-\xi(C\eta+B)$$
$$\zeta^{\cdot\cdot}=\eta\xi^{-1}(B\zeta+A\eta)-\xi(C\zeta+B)$$

Подставив вместо A, B и C их выражения из [7], после преобразований окончательно получим

$$\eta^{\cdot\cdot}=\zeta D-\eta(\xi^{\cdot 2}+\eta^{\cdot 2}+\zeta^{\cdot 2})-(J_x/J_z)\omega\xi^{-1}(\zeta^{\cdot}+\xi\psi^{\cdot})-\xi\theta^{\cdot\cdot}+$$
$$+\xi(2\zeta^{\cdot}+\psi^{\cdot}\xi)(\theta^{\cdot}\zeta-\psi^{\cdot}\eta)+\varkappa\xi\eta/J_z \tag{2.4}$$
$$\zeta^{\cdot\cdot}=-\eta D-\zeta(\xi^{\cdot 2}+\eta^{\cdot 2}+\zeta^{\cdot 2})+(J_x/J_z)\omega\xi^{-1}(\eta^{\cdot}-\xi\theta^{\cdot})-\xi\psi^{\cdot\cdot}-$$
$$-\xi(2\eta^{\cdot}+\theta^{\cdot}\xi)(\theta^{\cdot}\zeta-\psi^{\cdot}\eta)+\varkappa\xi\zeta/J_z$$
$$D=[-(J_x/J_z)\omega+2(\theta^{\cdot}\zeta-\psi^{\cdot}\eta)]\xi^{-1}(\zeta\zeta^{\cdot}+\eta\eta^{\cdot})-(J_x/J_z)\omega(\psi^{\cdot}\zeta-\theta^{\cdot}\eta)-$$
$$-(\theta^{\cdot}\zeta-\psi^{\cdot}\eta)(\theta^{\cdot}\eta+\psi^{\cdot}\zeta)$$
$$\varkappa={}^1/_2\rho V^2Slm_z(\alpha)/\sin\alpha$$

Величины ξ, $\xi^{\cdot}$ находятся по формулам (2.1), (2.2). Поскольку угол атаки близок к нулю, можно принять $\varkappa={}^1/_2\rho V^2Slm_z^{\alpha}$, $m_z^{\alpha}=\partial m_z/\partial\alpha|_{\alpha=0}$.

Итак, система уравнений (1.3) приведена к форме (2.4), удобной для численного интегрирования на ЭВМ. Величины $\theta^{\cdot}$, $\psi^{\cdot}$ известны из уравнений движения центра масс

$$\theta^{\cdot}=-gV^{-1}\cos\theta+{}^1/_2\rho Vm^{-1}Sc_y^{\alpha}\eta$$
$$\psi^{\cdot}={}^1/_2\rho Vm^{-1}Sc_y^{\alpha}\zeta,\quad c_y^{\alpha}=\partial c_y/\partial\alpha|_{\alpha=0} \tag{2.5}$$

а $\theta^{\cdot\cdot}$, $\psi^{\cdot\cdot}$ найдем дифференцируя (2.5):

$$\theta^{\cdot\cdot}=gV^{-1}(\theta^{\cdot}\sin\theta+V^{\cdot}V^{-1}\cos\theta)+{}^1/_2\rho c_y^{\alpha}m^{-1}S[\eta(V^{\cdot}+\rho^{\cdot}/\rho)+V\eta^{\cdot}]$$
$$\psi^{\cdot\cdot}={}^1/_2\rho c_y^{\alpha}m^{-1}S[\zeta(V^{\cdot}+\rho^{\cdot}/\rho)+V\zeta^{\cdot}] \tag{2.6}$$
$$\rho^{\cdot}=(d\rho/dY)(dY/dt)=(d\rho/dY)V\sin\theta$$

$d\rho/dY$ определяется численным дифференцированием табличной функции $\rho(Y)$, где Y – текущая высота полета. Добавив к (2.4)–(2.6) кинематические уравнения движения центра масс и уравнение изменения скорости V, получим замкнутую систему, полностью описывающую движение тела в атмосфере [1, 7]:

$$X^{\cdot}=V\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\psi},\ Y^{\cdot}=V\sin\theta,\ Z^{\cdot}=V\sin\psi$$
$$V^{\cdot}=-g\sin\theta+\rho V^2/(2m)Sc_x(\alpha),\ \alpha=\arccos\xi \tag{2.7}$$

Величины ξ, θ, ψ находятся из решения уравнений (2.4)–(2.6).

Отметим, что система уравнений (2.4)–(2.7) легко приводится к стандартному виду с малым параметром при производных введением большого параметра λ: $\omega=\lambda\mu$, $\varkappa=\lambda^2n^2J_z$.

В [7] показано, что система уравнений (2.4)–(2.7), приведенная к стандартному виду, является системой квазитихоновского типа и для нее возможно применение асимптотических методов сингулярного вырождения. В [1] было доказано, что решения системы уравнений (2.4)–(2.7), в общем случае описывающие правильный полет вращающегося тела, при котором ось тела следит за касательной к траектории его центра масс, неустойчивы в смысле Ляпунова. Однако вопрос об устойчивости движения тела в смысле Ляпунова в задачах внешней баллистики имеет, главным образом, теоретический интерес. Практически важно, чтобы на конечном отрезке времени, требуемом для полета до цели, угол атаки оставался малым. Поэтому условия теоремы Тихонова в задачах внешней баллистики оказываются слишком жесткими, особенно в отношении условия асимптотической устойчивости решения присоединенных уравнений движения вращающегося тела, и могут быть ослаблены, так как временные интервалы имеют вполне определенные размеры [7]. Для реализации алгоритмов исследования движения вращающегося тела в атмосфере можно потребовать обеспечения относительно малых отклонений переменных на заданном интервале времени, если только начальные возмущающие отклонения будут достаточно малыми.

3. Рассмотрим применение кватернионов для исследования движения вращающегося тела в атмосфере. В [6] приводятся уравнения пространственного движения тела вращения в атмосфере, использующие в качестве кинематических переменных параметры Родрига — Гамильтона, скомпонованные в кватернион [8]. В данной задаче, в отличие от [6], весьма велика угловая скорость вращения тела вокруг его продольной оси ω. Поэтому в уравнениях [6] станут большими производные кинематических параметров, что потребует уменьшения шага интегрирования. Чтобы устранить это, используется иная, чем в [6], запись уравнений движения. Для вывода соответствующих уравнений с обычными для внешней баллистики предположениями и допущениями введем инерциальную земную систему координат и систему координат Резаля. Последняя связана с телом, но не участвует в его вращении вокруг продольной оси. Система координат Резаля вращается относительно тела с угловой скоростью $-\omega$ вокруг его продольной оси. Ось абсцисс системы координат Резаля совпадает с продольной осью тела. Тогда оси координат Резаля являются главными осями инерции идеального тела вращения. Обозначим $\boldsymbol{\omega}$ угловую скорость тела, $\boldsymbol{\omega}_R$ — угловую скорость системы координат Резаля и введем кватернион Λ, описывающий переход из системы координат Резаля в инерциальную [8]. Выпишем уравнения движения тела (верхний индекс x означает, что компоненты данного вектора берутся в инерциальной системе координат, а ξ — в системе координат Резаля):

$$\begin{gathered}\mathbf{r}^{x\cdot}=\mathbf{V}^x,\quad m\mathbf{V}^{x\cdot}=\operatorname{vect}(\Lambda\circ F^\xi\circ\overline{\Lambda})-g(Y)\|010\|^T\\ \Lambda^\cdot={}^1/{}_2\Lambda\circ\omega_R{}^\xi,\quad \mathbf{J}^\xi\omega^{\xi\cdot}\omega_R{}^\xi\times\mathbf{J}^\xi\omega^\xi=\mathbf{M}^\xi\end{gathered}\tag{3.1}$$

Здесь $\mathbf{r}$, $\mathbf{V}$ — радиус-вектор центра масс и скорости тела; F^ξ, ω^ξ — гиперкомплексные отображения векторов $\mathbf{F}$ — аэродинамической силы и $\boldsymbol{\omega}$ — угловой скорости тела на связанный базис (т. е. такие кватернионы, что $\operatorname{vect} F^\xi=\mathbf{F}^\xi$, $\operatorname{vect}\omega^\xi=\boldsymbol{\omega}^\xi$); $\mathbf{M}^\xi$ — аэродинамический момент относительно центра масс; m — масса тела; $\mathbf{J}^\xi=\operatorname{diag}(J_x, J_z, J_z)$ — тензор инерции в связанных осях; $g(Y)$ — ускорение свободного падения; $\overline{\Lambda}$ — сопряженный кватернион. Вследствие того что $\boldsymbol{\omega}^\xi=\boldsymbol{\omega}_R{}^\xi+\|\omega 00\|^T$, последнее уравнение системы (3.1) в проекциях на оси системы координат Резаля примет вид

$$\begin{gathered}J_z\omega_{Ry}{}^\cdot=M_y-J_x\omega_{Rz}\omega\\ J_z\omega_{Rz}{}^\cdot=M_z+J_x\omega_{Ry}\omega,\quad J_x\omega^\cdot=M_x\end{gathered}\tag{3.2}$$

Формулы, определяющие величины $\mathbf{F}^\xi$, $\mathbf{M}^\xi$, представлены в [6].

4. Численное исследование рассматриваемого класса задач внешней баллистики затруднено тем, что соответствующие уравнения движения содержат кроме малого параметра при производных, как правило, высокочастотные компоненты и интегрирование требует больших затрат машинного времени. В настоящее время для задач динамики тел в атмосфере разработан ряд алгоритмов, позволяющих значительно ускорить вычислительный процесс благодаря использованию различных асимптотических методов [1, 7, 9, 10]. Подробный анализ современных численных методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, в том числе и специальной структуры типа (2.4)—(2.7), содержится в [11].

Тестовые расчеты на простых схемах показали, что существуют режимы движения, на которых для достижения 1%-ной относительной локальной погрешности в решении требуется значительное дробление шага интегрирования. В этой ситуации использование явных методов становится практически невозможным. Система уравнений (2.4) может быть квалифицирована как жесткая [11]. Численное интегрирование жестких систем представляет определенные трудности и требует разработки специальных алгоритмов.

Разработанный пакет прикладных программ для численного исследования задач внешней баллистики с различными нестационарными режимами полета включает в себя подпрограммы решения и управляющую программу, способную автоматически выбрать в каждой конкретной ситуации численной реализации наиболее эффективный и экономический метод, его порядок и шаг интегрирования.

Переход к подобному модульному принципу программирования ведет к тому, что решение задачи обеспечивается не одной программой, а группой взаимосвязанных программных модулей, входящих в состав пакета прикладных программ для одной предметной области – динамики полета твердых тел в атмосфере. Поэтому гибкость и универсальность пакета определяется тем, насколько предусмотрительно были выбраны модули и управляющие параметры. При решении вопросов модульного анализа задач внешней баллистики и разработке соответствующего пакета прикладных программ[1] в первую очередь выделяется основной сегмент пакета – уравнения пространственного относительного движения этого сегмента, т. е. заданием правых частей, получается реализация требуемой физической модели. Расчет ее движения реализуется на расщеплении по физическим процессам, каждый из которых обладает математической и алгоритмической однородностью. Это и обеспечивает конечную практическую устойчивость счета, что важно для надежной работы любого пакета прикладных программ. Требование однородности не означает, что метод решения и алгоритм должны быть единственными. Наоборот, имеется их набор с определенной избыточностью в целях построения универсального алгоритма исследования задач внешней баллистики.

5. Исследование рассеивания при движении твердых тел и изыскание способов его уменьшения – основные задачи внешней баллистики. В частности, изучение этих проблем составляет основное содержание [2].

Изложим некоторые результаты численного исследования движения вращающегося тела в атмосфере при записи уравнений в обеих формах (2.4)–(2.7) и (3.1)–(3.2). Для всего набора исходных данных совпадение значений высот вершины траектории и конечных значений времени, скорости и угла падения с экспериментальными результатами было полным (в пределах погрешности эксперимента). Погрешности определения дальности и особенно деривации растут с увеличением времени полета. В целом результаты решения обеих систем уравнений совпадают и лишь при временах полета более 30 с начинают появляться расхождения между решениями уравнений в форме (2.4)–(2.7) и уравнений, использующих кватернионы (3.1)–(3.2). Причем последние дают существенно более точные значения деривации. Математически это обусловлено тем, что при использовании уравнений (2.4) получаются несколько завышенные значения углов атаки из-за неортогональности используемой подвижной системы координат. Неортогональность в данном случае характеризуется величиной $|\operatorname{tg}\theta \sin\psi|$, которая при больших начальных углах бросания и значительной деривации может стать немалой величиной. Этот вывод подтверждается расчетами по модифицированным уравнениям (2.4), при выводе которых используется ортогональная подвижная система координат.

Для уравнений (3.1) в кватернионной записи подобных трудностей не возникает вследствие более удобной записи уравнений движения и постоянной коррекции нормы кватерниона [6, 8]. Время счета как по уравнениям (2.4), так и (3.1) практически совпадает. Поэтому есть основания рекомендовать для использования в задачах внешней баллистики уравнения в кватернионной записи. Для больших начальных углов бросания точно попасть в эллипс рассеивания не удается и с использованием уравнений (3.1). Вызвано это тем, что в математической модели из-за отсутствия данных не учитываются эффект Магнуса, нелинейность аэродинамических коэффициентов при не малых углах атаки и так далее. Для оценки влияния некоторых из этих факторов осуществлялось их численное моделирование. Например, эффект Магнуса моделировался с использованием эм-

[1] *Карпов В. Я., Корягин Д. А., Самарский А. А.* Принцип разработки пакетов прикладных программ для задач математической физики. Препринт № 46. М.: Ин-т прикл. математики. 1977. 18 с.

пирической методики оценки коэффициентов силы и момента Магнуса для типичной формы тел [5]. Численное исследование показало, что влияние эффекта Магнуса на параметры траектории несущественно. Однако этот результат нельзя считать окончательным, так как действительные значения коэффициентов силы и момента Магнуса для исследуемого тела могут существенно отличаться от получаемых по эмпирической методике.

Моделирование нелинейности аэродинамических коэффициентов путем представления их большим числом членов рядов Тейлора по углу атаки с эмпирическим подбором коэффициентов при старших степенях α показало, что этот фактор может существенно влиять на параметры траектории тела. Поэтому следует обратить особое внимание на нелинейности в поведении аэродинамических коэффициентов.

Уравнения движения в форме (2.4) — (2.7) использовались также в параметрических исследованиях влияния погрешности аэродинамических коэффициентов на координаты точки падения тела. Цель этих исследований — определение необходимой точности знания аэродинамических коэффициентов в зависимости от рассеивания. На основании проведенных численных исследований сделан вывод о том, что для обеспечения достаточной точности определения дальности значения c_x необходимо знать с точностью не более 1—2%, влияние же значений c_y^α и m_z^α на величину дальности невелико.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пугачев В. С.* Заметки по внешней баллистике снарядов и авиабомб // ПММ. 1942. Т. 6. № 5. С. 347—368.
2. *Гантмахер Ф. Р., Левин Л. М.* Теория полета неуправляемых ракет. М.: Физматгиз. 1959. 360 с.
3. *Борисенок И. Т., Лошкин Б. Я., Привалов В. А.* О динамике полета осесимметричных вращающихся тел в воздушной среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 2. С. 35—42.
4. *Белоцерковский С. М., Кочетков Ю. А., Томшин В. К.* Динамика движения тела при учете нестационарности обтекания // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 3. С. 35—43.
5. *Графф Г., Мур Ф.* Эмпирический метод определения эффекта Магнуса для вращающихся снарядов // Ракетн. техника и космонавтика. 1977. Т. 15. № 10. С. 5—7.
6. *Лохов Г. М., Подзоров С. И.* Применение кватернионов в задачах динамики твердого тела в атмосфере // Космич. исследования. 1984. Т. 22. № 4. С. 626—629.
7. *Моисеев Н. Н.* Математические задачи системного анализа. М.: Наука. 1981. 487 с.
8. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
9. *Лохов Г. М., Подзоров С. И.* Сравнение численных методов решения систем ОДУ динамики полета твердого тела в атмосфере // Математические методы управления и обработки информации. М.: МФТИ. 1984. С. 143—146.
10. *Белоконов В. М., Белоконов И. В., Заболотной Ю. М.* Ускоренный расчет траекторий снижения в атмосфере неуправляемых КА с учетом их движения относительно центра масс // Космич. исследования. 1983. Т. 21. Вып. 4. С. 512—521.
11. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Дж. Холла и Дж. Уатта. М.: Мир. 1979. 312 с.

Москва

Поступила в редакцию
12.VII.1985