МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1987

УДК 539.374

О НЕОБХОДИМОСТИ УСЛОВИЙ АДАМАРА ДЛЯ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

РЫЖАК Е. И.

По мере усложнения определяющих соотношений, используемых для описания поведения материалов, все большее значение приобретают принципы, которые могут быть положены в основу отбора «физически допустимых» соотношений из множества формально допустимых в данном классе (скажем, в классе упругих соотношений). Одним из физически наиболее осмысленных принципов такого рода является принцип устойчивости материала.

Хотя понятие устойчивости даже упругого материала может быть определено по-разному, в теории упругости (неразномодульной) имеется фундаментальный результат, устанавливающий ограничения, которым должно подчиняться любое разумное определение устойчивости материала. Этим результатом является теорема Адамара, дающая локальные необходимые условия устойчивости в малом для упругого тела при произвольных граничных условиях [1].

Форма условий Адамара указывает на то, что теорема, по-видимому, справедлива не только для упругих тел, но для любых тел, для которых существует кусочно-линейная связь между корректно определенными приращениями напряжений и деформаций (т. е. для упругопластических и разномодульных упругих тел). Однако имеющиеся доказательства теоремы [1–3] существенно опираются именно на линейность этой связи, так что для упругопластических и разномодульных упругих тел они неприменимы.

В публикуемой работе предлагается доказательство теоремы Адамара (модификация доказательства [2]), пригодное для таких тел. Идея этого доказательства (конструкция локализационной формы потери устойчивости с разгрузкой) по существу содержится в [4, 5].

1. Упругопластический определяющий закон. Критерий устойчивости. Для дальнейшего понадобится только инкрементальная форма записи определяющего закона материала

$$\delta\mathbf{T}_\varkappa=\begin{cases}\mathbf{A}^p:\delta\mathbf{H}, & \delta\mathbf{H}:\mathbf{S}\geqslant 0\\ \mathbf{A}^e:\delta\mathbf{H}, & \delta\mathbf{H}:\mathbf{S}\leqslant 0\end{cases}$$

$$\mathbf{A}^p:\delta\mathbf{H}=\mathbf{A}^e:\delta\mathbf{H},\quad \delta\mathbf{H}:\mathbf{S}=0 \tag{1.1}$$

где $\mathbf{T}_\varkappa$ — тензор напряжений Пиолы относительно конфигурации $\varkappa$ [1], $\delta\mathbf{T}_\varkappa$ — малое приращение этого тензора в данной материальной точке, $\mathbf{A}^p$ и $\mathbf{A}^e$ — тензоры (четвертого ранга) пластических и упругих жесткостей соответственно, $\delta\mathbf{H}\equiv(\nabla\delta\mathbf{u})^T$ — тензор малых дисторсий относительно конфигурации $\varkappa$, $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x})$ — поле малых перемещений, $\mathbf{S}$ — симметричный тензор, задающий нормаль к поверхности текучести; двоеточие соответствует свертке по двум индексам. Будем считать, что поля $\mathbf{A}^p(\mathbf{x})$ и $\mathbf{A}^e(\mathbf{x})$ в теле кусочно непрерывны, причем тело является объединением конечного числа подтел, в каждом из которых эти поля непрерывны, и каждое множество непрерывности содержится в замыкании подмножества его внутренних точек.

Примем в качестве критерия устойчивости равновесной конфигурации $\varkappa$ тот же энергетический критерий устойчивости по отношению к малым деформациям [6], что и в [4, 5]. Тогда его математическая формулировка сводится [4, 5] к требованию положительной определенности кусочноквадратичного функционала от поля виртуальных перемещений

$$R\{\delta\mathbf{u}\}\equiv\int\limits_{\varkappa}\delta\mathbf{H}:\mathbf{A}:\delta\mathbf{H}\,dV-\int\limits_{\partial\varkappa}\delta\mathbf{t}_{\varkappa}{}^{b}\cdot\delta\mathbf{u}\,d\Sigma \qquad (1.2)$$

Здесь $\delta t_{\varkappa}{}^{b}$ — приращения граничных усилий Пиолы в данной материальной точке границы (определяемые полем перемещений последней); значение тензора $\mathbf{A}$ в первом интеграле определяется не только точкой тела, но и знаком $\delta\mathbf{H}:\mathbf{S}$ (1.1). Считается, что поле $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x})$ отлично от смещения как жесткого целого в том случае, когда граничные условия допускают таковое.

2. Теорема Адамара. Для других (неразномодульных) тел в предположениях п. 1 о характере кусочной непрерывности тензора упругих жесткостей $\mathbf{A}^e$ теорема Адамара гласит [1]: для того чтобы равновесная конфигурация $\varkappa$ при некоторых граничных условиях была устойчива по отношению к бесконечно малым деформациям в смысле принятого критерия, необходимо выполнение неравенства Адамара для тензора $\mathbf{A}^e(\mathbf{x})$ в каждой точке тела: $\forall\mathbf{x}\in\varkappa$, $\forall\mathbf{n}$, $\mathbf{g}\neq0$ $\mathbf{g}\otimes\mathbf{n}:\mathbf{A}^e(\mathbf{x}):\mathbf{g}\otimes\mathbf{n}\geqslant0$.

Непосредственное перенесение построений, используемых при доказательстве теоремы Адамара для упругих тел [1—3], на случай упругопластических тел позволяет доказать, что для устойчивости необходимо выполнение неравенства Адамара в каждой точке тела хотя бы для одного из тензоров $\mathbf{A}^p(\mathbf{x})$ и $\mathbf{A}^e(\mathbf{x})$. Но очевидно, что такое утверждение как средство отбора допустимых упругопластических соотношений не дает почти ничего, поскольку тензор $\mathbf{A}^e(\mathbf{x})$, как правило, вообще положительно определен и определяющее соотношение оказалось бы допустимым при произвольном $\mathbf{A}^p$.

Однако можно доказать более сильное (и действительно эффективное как средство отбора) обобщение теоремы Адамара на случай упругопластических тел: для того чтобы равновесная конфигурация $\varkappa$ при некоторых граничных условиях была устойчива по отношению к бесконечно малым деформациям в смысле принятого критерия, необходимо выполнение неравенства Адамара в каждой точке тела для обоих тензоров $\mathbf{A}^p$ и $\mathbf{A}^e$:

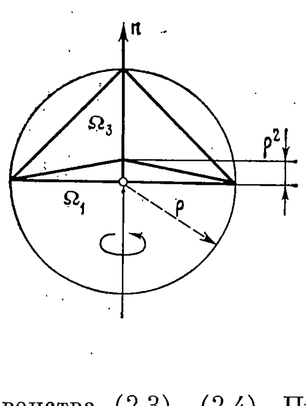
$$\forall\mathbf{x}\in\varkappa,\qquad \forall\mathbf{n},\mathbf{g}\neq0\begin{cases}\mathbf{g}\otimes\mathbf{n}:\mathbf{A}^p(\mathbf{x}):\mathbf{g}\otimes\mathbf{n}\geqslant0\\ \mathbf{g}\otimes\mathbf{n}:\mathbf{A}^e(\mathbf{x}):\mathbf{g}\otimes\mathbf{n}\geqslant0\end{cases} \qquad (2.1)$$

Доказательство. Будем доказывать теорему от противного. Предположим, что $\exists\mathbf{x}_0\in\varkappa$, $\exists\mathbf{g}$, $\mathbf{n}$ ($|\mathbf{g}|=|\mathbf{n}|=1$) такие, что, например

$$\mathbf{g}\otimes\mathbf{n}:\mathbf{S}(\mathbf{x}_0)>0,\quad a_0\equiv\mathbf{g}\otimes\mathbf{n}:\mathbf{A}^p(\mathbf{x}_0):\mathbf{g}\otimes\mathbf{n}<0 \qquad (2.2)$$

Покажем, что в этом случае можно построить поле $\delta\mathbf{u}$, на котором $R\{\delta\mathbf{u}\}<0$.

В силу предположения о характере кусочной непрерывности тензоров жесткостей (п. 1) для любого $\varepsilon>0$ существует $\rho>0$, такое, что замыкание некоторого шара радиусом 2ρ содержит $\mathbf{x}_0$ и содержится в $\varkappa$ ($\mathbf{x}_0$ может быть и точкой поверхности шара), причем в этом шаре для любого тензора второго ранга $\mathbf{H}$ выполняются неравенства



$$\mathbf{H}:\mathbf{A}^p(\mathbf{x}):\mathbf{H}\leqslant\mathbf{H}:(\mathbf{A}_0{}^p+\varepsilon\mathbf{1}):\mathbf{H},$$

$$\mathbf{A}_0{}^p\equiv\mathbf{A}^p(\mathbf{x}_0) \qquad (2.3)$$

$$\mathbf{g}\otimes\mathbf{n}:\mathbf{S}(\mathbf{x})>0 \qquad (2.4)$$

где $\mathbf{1}$ — единичный тензор четвертого ранга. Тогда замыкание шара радиусом ρ, концентрического с первым шаром, принадлежит внутренности $\varkappa$ (т. е. не содержит точек границы) и в нем справедливы неравенства (2.3), (2.4). Пусть $\varepsilon<|a_0|$, так что неравенство (2.2) справедливо и для тензора $\mathbf{A}_0{}^p+\varepsilon\mathbf{1}$.

Проведем через центр шаров плоскость, ортогональную $\mathbf{n}$. Введем цилиндрическую систему координат с началом в центре шаров и осью, направленной по $\mathbf{n}$: $z \equiv \mathbf{n}\cdot\mathbf{x}$, $r \equiv (\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}-z^2)^{1/2}$, $\mathbf{e}_r \equiv \nabla r \perp \mathbf{n}$. Рассмотрим два конуса (фигура) Ω_1 и Ω_2, имеющих в основании круг ($z=0$, $r\leqslant\rho$), с вершинами соответственно в точках ($z=\rho^2$, $r=0$) и ($z=\rho$, $r=0$). При $\rho<1$ $\Omega_1\subset\Omega_2$. Обозначим $\Omega_3 \equiv \Omega_2\backslash\Omega_1$.

Зададим непрерывное поле $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x})$:

$$\begin{gathered}
\delta\mathbf{u}=(1-\rho)\rho^{-2}\mathbf{g}z, \quad \delta\mathbf{H}=(1-\rho)\rho^{-2}\mathbf{g}\otimes\mathbf{n} \quad (\mathbf{x}\in\Omega_1)\\
\delta\mathbf{u}=\rho^{-1}\mathbf{g}[\rho-(z+r)], \quad \delta\mathbf{H}=\rho^{-1}\mathbf{g}\otimes(\mathbf{n}+\mathbf{e}_r) \quad (\mathbf{x}\in\Omega_3)\\
\delta\mathbf{u}=0, \quad \delta\mathbf{H}=0 \quad (\mathbf{x}\in\varkappa\backslash\Omega_2)
\end{gathered} \tag{2.5}$$

Поскольку поле виртуальных смещений (2.5) равно нулю в некоторой приграничной области конечной толщины, оно удовлетворяет любым граничным условиям и его вклад в поверхностный интеграл в (1.2) равен нулю. Оценим объемный интеграл, введя предварительно величину

$$\alpha \equiv \max\left\{\max_{\mathbf{x}\in\varkappa;\ \mathbf{H}} \frac{\mathbf{H}:\mathbf{A}^p(\mathbf{x}):\mathbf{H}}{\mathbf{H}:\mathbf{H}},\ \max_{\mathbf{x}\in\varkappa;\ \mathbf{H}} \frac{\mathbf{H}:\mathbf{A}^e(\mathbf{x}):\mathbf{H}}{\mathbf{H}:\mathbf{H}}\right\}$$

Тогда

$$R\{\delta\mathbf{u}\}=\int_{\Omega_1}\delta\mathbf{H}:\mathbf{A}^p:\delta\mathbf{H}\,dV+\int_{\Omega_3}\delta\mathbf{H}:\mathbf{A}:\delta\mathbf{H}\,dV\leqslant$$

$$\leqslant\int_{\Omega_1}\delta\mathbf{H}:(\mathbf{A}_0{}^p+\varepsilon\mathbf{1}):\delta\mathbf{H}\,dV+\alpha\int_{\Omega_3}\delta\mathbf{H}:\delta\mathbf{H}\,dV=(\pi/3)(1-\rho)^2(a_0+\varepsilon)+$$

$$+(2\pi/3)\rho^{-2}(\rho^3-\rho^4)\alpha=(\pi/3)(1-\rho)^2[a_0+\varepsilon+2\alpha\rho(1-\rho)^{-1}]$$

При достаточно малом ρ последнее выражение отрицательно, а вместе с ним и $R\{\delta\mathbf{u}\}$.

Если в (2.2) фигурируют такие $\mathbf{g}$ и $\mathbf{n}$, что $\mathbf{g}\otimes\mathbf{n}:\mathbf{S}(\mathbf{x}_0)=0$, то можно взять несколько отличные $\mathbf{g}$ и $\mathbf{n}$, для которых имеют место оба неравенства (2.2). Если второе неравенство (2.2) выполняется и при этом $\mathbf{g}\otimes\mathbf{n}:\mathbf{S}(\mathbf{x}_0)<0$, то оба неравенства восстанавливаются в прежнем виде заменой одного из векторов на противоположный.

Совершенно аналогично рассматривается случай нарушения условий Адамара для $\mathbf{A}^e$, хотя для всех традиционных законов пластичности $\delta\mathbf{H}:\mathbf{A}^p:\delta\mathbf{H}\leqslant\delta\mathbf{H}:\mathbf{A}^e:\delta\mathbf{H}$, так что рассмотрение этого случая излишне.

Таким образом, теорема Адамара доказана для упругопластических тел (и для разномодульных упругих, которые в окрестности точки излома диаграммы ничем не отличаются от упругопластических).

В заключение отметим, что построенное поле $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x})$ является локализационной формой потери устойчивости с разгрузкой [4, 5]. Действительно, дисторсия, заведомо отвечающая пластическому догружению и имеющая диадное строение, локализуется в области Ω_1, которая сплющивается быстрее (в зависимости от ρ), чем уменьшается в диаметре. В относительно большой же по объему области Ω_3 дисторсии относительно малы и по крайней мере в части области соответствуют упругой разгрузке. Поскольку функционал R зависит от дисторсий квадратично, область меньшего объема, но с большими деформациями дает больший вклад, нежели область большего объема с меньшими деформациями.

В однородном упругопластическом теле необходимость в стягивании носителя поля $\delta\mathbf{u}$ в самую «слабую» точку отпадает и в нем локализационные формы потери устойчивости характеризуются концентрацией некоторых диадных виртуальных дисторсий в тонких слоях определенной ориентации. Имеется ряд соображений [4, 5, 7] (которые, однако, не являются строгими доказательствами), указывающих на то, что в однородном упругопластическом теле при условиях достаточно жесткого стеснения [4, 5, 7] именно локализационные формы потери устойчивости являются в определенном смысле наивыгоднейшими формами проявления неустойчивости материала и могут рассматриваться как механизм зарождения разрывных нарушений и их систем.

Автор благодарен Л. В. Никитину за внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошной среды. М.: Мир. 1975. 592 с.
2. *Truesdell C., Noll W.* The nonlinear field theories of mechanics // Handbuch der physik. B. III/3. B.: Springer. 1965. 602 p.
3. *Wang C.-C., Truesdell C.* Introduction to rational elasticity. Leyden: Nordhoff. 1973. 556 p.
4. *Никитин Л. В., Рыжак Е. И.* Разрушение горной породы с внутренним трением и дилатансией // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1976. Т. 230. № 5. С. 1203—1206.
5. *Рыжак Е. И.* Об эшелонной структуре как форме потери устойчивости горной породы // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 5. С. 127—136.
6. *Друккер Д.* О постулате устойчивости материала в механике сплошной среды // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1964. № 3. С. 115—128.
7. *Рыжак Е. И.* О простейших локализационных потенциалах // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 114—121.

Москва

Поступила в редакцию 18.II.1986