

УДК 539.3.01

МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ
ПО ПАРАМЕТРУ В ОДНОМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ
НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

ШАЛАШИЛИН В. И.

Многие задачи статического нелинейного деформирования различных деформируемых систем сводятся к краевым задачам для систем обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с параметром. Это задачи о средних и больших прогибах стержней, арок, цилиндрических панелей при цилиндрическом изгибе, оболочек вращения при осесимметричном деформировании. При помощи метода прямых к подобным краевым задачам можно свести и многие двумерные задачи нелинейного деформирования пластин и оболочек.

Как отмечено в [1, 2], при численном решении таких задач обычно строится шаговый процесс, который реализует ту или иную форму метода продолжения решения по параметру. Здесь возможны два подхода. Первый предполагает сведение нелинейной краевой задачи к нелинейной алгебраической системе с помощью разностных, вариационных или вариационно-разностных методов, как это, например, сделано в [3], и решение этой системы с использованием одного из алгоритмов продолжения решения. Характерный для такого подхода высокий порядок нелинейной алгебраической системы порождает определенные трудности при его реализации. Во втором подходе процедура метода продолжения решения по параметру используется для линеаризации непосредственно оператора нелинейной краевой задачи. Впервые, по-видимому, это было сделано в [4] в форме метода последовательных нагружений, связь которого с методом продолжения решения по параметру установлена в [5, 6]. В таком подходе процесс продолжения решения сводится к решению линеаризованных краевых задач, для чего эффективно используются различные формы метода прогонки [5-8].

В обоих подходах одним из центральных является вопрос о выборе параметра продолжения. Для нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений в [9-11] даны алгоритмы продолжения, обеспечивающие выбор оптимального или близких к оптимальному параметров продолжения. Ниже рассмотрены возможности обобщения этих алгоритмов в рамках второго подхода к решению одномерных нелинейных краевых задач.

1. Рассмотрим краевую задачу для системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с параметром

$$Z' = F(Z, P), \quad AZ(s_1) = a, \quad BZ(s_2) = b \quad (1.1)$$

Здесь $Z = Z(s) = [Z_1(s), \dots, Z_m(s)]^T$ — m -мерная вектор-функция аргумента s , $F(Z, P) = [F_1(Z, P), \dots, F_m(Z, P)]^T$ — нелинейная m -мерная вектор-функция, A, B — прямоугольные невырожденные матрицы размера $n \times m$ и $l \times m$ соответственно ($n+l=m$), a, b — векторы размерности n и l .

Будем считать, что краевая задача (1.1) имеет решения для некоторой области значений параметра P и для некоторого $P = P_0$ из этой области такое решение $Z_{(0)}$ известно, т. е.

$$Z|_{P=P_0} = Z_{(0)}. \quad (1.2)$$

Следуя основной идее метода продолжения решения по параметру, будем считать Z и P непрерывными и дифференцируемыми функциями параметра λ :

$$Z = Z(s, \lambda), \quad P = P(\lambda) \quad (1.3)$$

Смысл параметра λ определим позже, но так как он не входит явно в (1.1), то начало отсчета λ можно выбрать произвольно. Удобно выбрать его так, чтобы оно соответствовало известному решению (1.2), т. е.

$$Z(s, 0) = Z_{(0)}, \quad P(0) = P_0 \quad (1.4)$$

Производные Z и P по λ обозначим через $z = \partial Z / \partial \lambda$ и $p = dP / d\lambda$. Эти обозначения вместе с начальными условиями (1.4) можно рассматривать как задачу Коши по параметру λ . Для ее интегрирования необходимо знать вектор-функцию $z(s) = [z_1(s), \dots, z_m(s)]^T$ и параметр λ . Соотношения для их определения получим, продифференцировав по λ задачу (1.1):

$$z' = L(Z, P)z + pM(Z, P), \quad Az(s_1) = 0, \quad Bz(s_2) = 0 \quad (1.5)$$

где $L(Z, P) = [L_{ij}]$ и $M(Z, P) = [M_i]$ — матрица-функция и вектор-функция, компоненты которых определяются как $L_{ij} = \partial F_i / \partial Z_j$, $M_i = \partial F_i / \partial P$ ($i, j = 1, \dots, m$).

Одним из наиболее эффективных методов численного решения линейных краевых задач вида (1.5) является метод дискретной ортогональной прогонки С. К. Годунова [12]. Наличие неизвестного параметра p в правой части уравнения (1.5) требует некоторого изменения традиционной формы этого метода. Чтобы существо этого изменения не затенялось деталями, связанными с дискретной ортогонализацией решений, рассмотрим сначала решение задачи (1.5) методом начальных параметров, форма представления которого существенно используется в методе ортогональной прогонки и имеет вид

$$z = c_1 z^{(1)} + \dots + c_l z^{(l)} + p z^{(l+1)} \quad (1.6)$$

Здесь c_1, \dots, c_l — произвольные постоянные, а вектор-функции $z^{(1)}, \dots, z^{(l)}$ — линейно независимые решения следующей однородной задачи:

$$z' = Lz, \quad Az(s_1) = 0 \quad (z(s_1) \neq 0) \quad (1.7)$$

Вектор-функция $z^{(l+1)}$ является решением неоднородной задачи

$$z' = Lz + M, \quad z(s_1) = 0 \quad (1.8)$$

Введем вектор $c = [c_1, \dots, c_l, c_{l+1} = p]^T$, принадлежащий $(l+1)$ -мерному векторному пространству R_{l+1} . Представление (1.6) устанавливает взаимно однозначное соответствие между функциональным множеством решений z начальной задачи

$$z' = Lz + M, \quad Az(s_1) = 0 \quad (1.9)$$

и множеством векторов $c \in R_{l+1}$. Задача метода начальных параметров состоит в определении такого вектора $c \in R_{l+1}$, чтобы соответствующая ему в силу (1.6) вектор-функция z удовлетворяла второму краевому условию $Bz(s_2) = 0$ в (1.7).

Составим из векторов $z^{(i)}(s_2)$ ($i = 1, \dots, l+1$) матрицу $D = [z^{(1)}(s_2), \dots, z^{(l+1)}(s_2)]$ размером $m \times (l+1)$. Тогда условие $Bz(s_2) = 0$ приводит к уравнению

$$BDc = Jc = 0 \quad (1.10)$$

в котором матрица J имеет размеры $l \times (l+1)$, и потому оно является системой l линейных алгебраических уравнений относительно $l+1$ неизвестных. Вектор c , являющийся его решением, определяет в силу (1.6) такие вектор-функцию z и параметр p , которые, будучи решением краевой задачи (1.5), являются правыми частями уравнений продолжения. Таким образом, представление (1.6) вместе с уравнением (1.10) устанавливают соответствие между уравнениями продолжения и вектором $c \in R_{l+1}$, которое изобразим в виде

$$\{\partial Z / \partial \lambda = z, \quad dP / d\lambda = p\} \leftrightarrow c \quad (1.11)$$

По смыслу процесса продолжения вектор c является функцией параметра λ , т. е. $c = c(\lambda)$. Образует такой вектор $C(\lambda) \in R_{l+1}$, чтобы $dC/d\lambda = c$. Его нетрудно построить, например, как интеграл вида $C = \int c(\lambda_1) d\lambda_1$ ($0 \leq \lambda_1 \leq \lambda$). Тогда соответствие (1.11) можно представить в форме

$$\{\partial Z / \partial \lambda = z, \quad dP / d\lambda = p\} \leftrightarrow \{dC / d\lambda = c\} \quad (1.12)$$

Отсюда видно, что кроме соответствия $\{z, p\} \leftrightarrow c$ имеет место и соответствие $\{Z, P\} \leftrightarrow C$. Таким образом, определенное параметром P функциональное множество решений нелинейной краевой задачи (1.1) отображается на множество $C(\lambda) \in R_{l+1}$, которое представляет собой кривую в R_{l+1} (вектор $c(\lambda) = dC/d\lambda$ является вектором касательной к этой кривой). Таким образом, если вектор c имеет единичную длину, т. е. $(c, c) = 1$, то параметр λ оказывается длиной вдоль кривой $C(\lambda) \in R_{l+1}$.

Основываясь на соответствии $\{Z, P\} \leftrightarrow C$, можно без труда перенести на нелинейную краевую задачу (1.1) алгоритмы метода продолжения решения, сформулированные в работах [9–11] для нелинейных уравнений. Эти алгоритмы реализуют равноправие переменных и параметра, которое в нашем случае равносильно равноправию компонент вектора C , и обеспечивают автоматический выбор такого параметра продолжения, который соответствует максимальной обусловленности системы (1.10).

При построении таких алгоритмов на основе решения системы (1.10) методом ортогонализации [9, 10] строки матрицы J рассматриваются как векторы в R_{l+1} . Тогда систему (1.10) можно понимать как условие ортогональности искомого вектора векторам-строкам матрицы J . Поэтому, дополнив матрицу J снизу вектором-строкой q , линейно независимой со всеми ее строками, и построив из строк полученной матрицы с помощью процесса Грама — Шмидта ортонормированный базис, получим искомым вектор как последний вектор этого базиса. Такую операцию обозначим

$$c = \text{ort} \begin{bmatrix} J \\ q \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

В [11] вектор c предлагается искать из решения системы уравнений

$$\begin{bmatrix} J \\ q \end{bmatrix} c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

Найденный вектор c является таким решением системы (1.10), которое имеет единичную проекцию на направление вектора q . Решение системы (1.14) может быть получено методами исключения

$$c = \begin{bmatrix} J \\ q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

В своей традиционной форме метод начальных параметров формулируется для задачи вида (1.5) при $p=1$. Тогда в векторе c последняя компонента $c_{l+1}=p$ равна единице и в уравнении (1.10) неизвестными являются первые l компонент c_1, \dots, c_l вектора c . Поэтому последний столбец матрицы J в этом случае является столбцом свободных членов и c_1, \dots, c_l можно найти методами типа метода исключения Гаусса. Такая форма соответствует отождествлению параметра продолжения решения с параметром задачи P , т. е. $\lambda=P$. Действительно, в этом случае $p=dP/d\lambda=1$. Введение же специального параметра продолжения λ требует определения p из системы (1.10) в виде (1.13) или (1.15).

Нетрудно понять, что использование в методе прогонки дискретной ортогонализации решений $z^{(1)}, \dots, z^{(l+1)}$ не скажется на виде уравнения (1.10). Традиционная форма этого метода использует на участках между точками ортогонализации представление решения в виде (1.6), но только при $p=1$. Здесь же в рамках метода прогонки требуется учет в (1.6) на обратном ходе множителя p .

Приведем для примера алгоритм модифицированного метода Эйлера для интегрирования задачи Коши по λ с использованием решения вида (1.15) системы (1.10):

задание начального состояния (1.2) $\lambda_{(0)}=0, P_{(0)}=P_0, Z_{(0)}=Z|_{P=P_0}, q_{(0)}=[0, \dots, 0, 1]$.

Алгоритм k -го шага ($k=0, 1, 2, \dots$).

1. Построение первого приближения. Прямой ход прогонки — построение линейно независимых решений $z_{(k)}^{(1)}, \dots, z_{(k)}^{(l)}$ начальной задачи $z_{(k)}^{(l)} = L(Z_{(k)}, P_{(k)}) z_{(k)}, Az_{(k)}(s_1) = 0$ ($z_{(k)}(s_1) \neq 0$) и частного решения $z_{(k)}^{(l+1)}$ начальной задачи

$\dot{z}_{(k)} = L(Z_{(k)}, P_{(k)})z_{(k)} + M(Z_{(k)}, P_{(k)})$, $z_{(k)}(s_1) = 0$. Формирование матриц $D_{(k)} = [z_{(k)}^{(1)}(s_2), \dots, z_{(k)}^{(l+1)}(s_2)]$ и $J_{(k)} = BD_{(k)}$, определение вектора

$$c^{(k)} = \begin{bmatrix} J_{(k)} \\ q^{(k)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Обратный ход прогонки — построение решений краевой задачи вида (1.5):

$$z_{(k)} = \sum_{i=1}^{l+1} c_i^{(k)} z_{(k)}^{(i)}, \quad p_{(k)} = c_{l+1}^{(k)}$$

Построение первого приближения решения

$$Z_{(k)}^{\check{}} = Z_{(k)} + \Delta\lambda_{(k)}z_{(k)}, \quad P_{(k)}^{\check{}} = P_{(k)} + \Delta\lambda_{(k)}p_{(k)}$$

2. *Построение второго приближения.* Прямой ход прогонки — построение линейно независимых решений $z_{(k)}^{\check{(1)}}, \dots, z_{(k)}^{\check{(l)}}$ задачи $z_{(k)}^{\check{}} = L(Z_{(k)}^{\check{}}, P_{(k)}^{\check{}})z_{(k)}^{\check{}}$, $Az_{(k)}^{\check{}}(s_1) = 0$ ($z_{(k)}^{\check{}}(s_1) \neq 0$) и частного решения $z_{(k)}^{\check{(l+1)}}$ задачи $z_{(k)}^{\check{}} = L(Z_{(k)}^{\check{}}, P_{(k)}^{\check{}})z_{(k)}^{\check{}} + M(Z_{(k)}^{\check{}}, P_{(k)}^{\check{}})$, $z_{(k)}^{\check{}}(s_1) = 0$. Формирование матриц $D_{(k)}^{\check{}} = [z_{(k)}^{\check{(1)}}(s_2), \dots, z_{(k)}^{\check{(l+1)}}(s_2)]$ и $J_{(k)}^{\check{}} = BD_{(k)}^{\check{}}$, определение вектора

$$c^{\check{(k)}} = \begin{bmatrix} J_{(k)}^{\check{}} \\ q^{(k)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Обратный ход прогонки

$$z_{(k)}^{\check{}} = \sum_{i=1}^{l+1} c_i^{\check{(k)}} z_{(k)}^{\check{(i)}}, \quad p_{(k)}^{\check{}} = c_{l+1}^{\check{(k)}}$$

Построение второго приближения

$$Z_{(k+1)} = Z_{(k)} + \frac{1}{2}\Delta\lambda_{(k)}(z_{(k)} + z_{(k)}^{\check{}})$$

$$P_{(k+1)} = P_{(k)} + \frac{1}{2}\Delta\lambda_{(k)}(p_{(k)} + p_{(k)}^{\check{}})$$

$$\lambda_{(k+1)} = \lambda_{(k)} + \Delta\lambda_{(k)}, \quad q_{(k+1)} = c^{\check{(k)}} / (c^{\check{(k)}} + c^{\check{(k)}})^{1/2}$$

Аналогично можно построить и явные схемы более высокого порядка точности. Во избежание накопления ошибки после нескольких шагов интегрирования задачи Коши с использованием таких схем необходимо делать один шаг по неявной схеме. Алгоритмы неявных схем для нелинейных систем с использованием метода Ньютона — Рефсона и обобщенного параметра продолжения рассмотрены в [10, 11]. Их обобщение с учетом изложенного на нелинейные краевые задачи в форме квазилинеаризации [13] не составляет принципиальных трудностей.

С использованием приведенных алгоритмов была рассмотрена задача о больших прогибах круговой арки под равномерной нормальной нагрузкой. Как показано в [6], эта задача сводится к следующим уравнениям относительно безразмерных величин (сохранены основные обозначения [6]):

$$X' = (1+cN) \cos \Phi, \quad Y' = (1+cN) \sin \Phi, \quad \Phi' = K$$

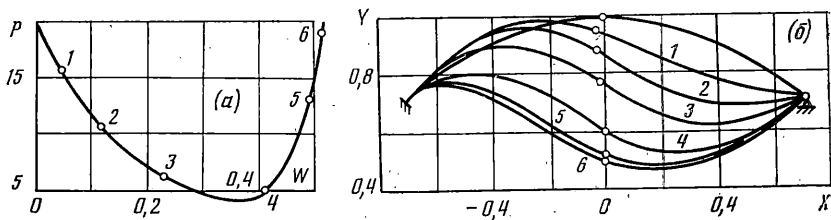
$$N' = -(1+cN)KQ, \quad Q' = (1+cN)(KN-P)$$

$$K' = (1+cN)Q, \quad (\dots)' = d(\dots)/d\beta$$

Образовав вектор-функцию $Z = [X, Y, \Phi, N, Q, K]^T$, можно без труда свести эти уравнения к виду (1.1). Результаты расчетов для арок с шарнирно закрепленными концами совпали с данными в [6]. На фиг. 1, а, б показана кривая деформирования $P(W)$ и формы деформированной оси для арки, один конец которой заземлен, а другой — закреплен шарнирно, где $W = 1 - Y(0)$ — отнесенный к радиусу арки вертикальный прогиб ее средней точки. Шарнирному закреплению соответствуют граничные условия $X = \sin \beta_0$, $Y = \cos \beta_0$, $K = -1$ при $\beta = \beta_0$, а заземлению — условия $X = -\sin \beta_0$, $Y = \cos \beta_0$, $\Phi = \beta_0$ при $\beta = -\beta_0$.

В качестве начального условия (1.2) для задачи Коши по параметру принимаюльсь недеформированное состояние арки $P_0 = 0$, $X_{(0)} = \sin \beta$, $Y_{(0)} = \cos \beta$, $\Phi_{(0)} = -\beta$, $N_{(0)} = Q_{(0)} = 0$, $K_{(0)} = -1$.

2. Задачу осесимметричного деформирования оболочек вращения рассмотрим в постановке Е. Рейсснера [14], предполагающей малость деформаций срединной поверхности оболочки и не накладывающей ограниче-



Фиг. 1

ний на углы поворота меридиана. Традиционное использование в качестве неизвестных нормальных и тангенциальных смещений срединной поверхности дает определенные преимущества, если деформированная поверхность близка к недеформированной. Для больших перемещений кажется более удобным оперировать непосредственно координатами деформированной поверхности или их изменениями, вызванными деформацией. Такие уравнения построены в [15]. Введем следующие обозначения: \tilde{s} — лагранжева координата точки срединной поверхности, отсчитываемая вдоль дуги недеформированного меридиана, $x(\tilde{s})$, $y(\tilde{s})$ — декартовы координаты точек деформированного меридиана, x — ось вращения оболочки, θ — угол касательной к меридиану с осью x , h — толщина оболочки, N_s , N_α — тангенциальные усилия вдоль меридиана и в окружном направлении, Q — перерезывающая сила, M_s , M_α — меридиональный и окружной изгибающие моменты, q_n , q_τ — нормальная и тангенциальная составляющие распределенных нагрузок на оболочку, r — радиус кривизны меридиана, \varkappa_s , ε_s — изменение кривизны меридиана и его относительное удлинение, E , ν — модуль упругости при растяжении и коэффициент Пуассона материала оболочки.

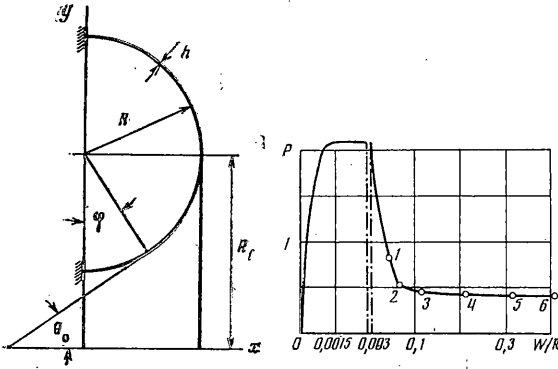
Тогда уравнения деформированной срединной поверхности оболочки имеют вид [15]:

$$\begin{aligned}
 X' &= C \cos \theta, & Y' &= C \sin \theta, & \theta &= K_0 - K_s \\
 N' &= -C [\sin \theta (N - N_\alpha) / Y + q_\tau] + (K_s - K_0) Q \\
 Q' &= -C [KN + (Q \sin \theta + N_\alpha \cos \theta) / Y - q_n] \\
 M' &= C [Q - \sin \theta (M - M_\alpha) / Y] \\
 N_\alpha &= \nu N + \frac{1 - \nu^2}{\delta} \left(\frac{Y}{Y_0} - 1 \right), & C &= 1 + \delta N - \nu \left(\frac{Y}{Y_0} - 1 \right) \\
 M_\alpha &= \nu M - \frac{1 - \nu^2}{12} \frac{\cos \theta - \cos \theta_0}{Y_0}, & K_s &= -12M - \nu \frac{\cos \theta - \cos \theta_0}{Y_0} \\
 x &= lX, & y &= lY, & N_s &= B\delta N, & N_\alpha &= B\delta N_\alpha \\
 Q &= B\delta Q, & M_s &= B\delta lM, & M_\alpha &= B\delta lM_\alpha \\
 q_n &= B\delta q_n / l, & q_\tau &= B\delta q_\tau / l, & l/r &= K \\
 l\varkappa_s &= K_s, & 1 + \varepsilon_s &= C, & \delta &= (h/l)^2 \\
 B &= Eh / (1 - \nu^2), & (\dots)' &= d(\dots) / ds
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

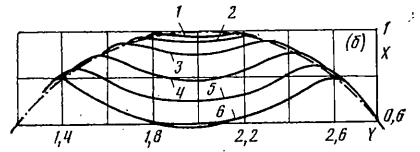
где ноликом помечены соответствующие величины для недеформированного состояния, l — характерный размер оболочки.

Если ввести вектор-функции $\mathbf{Z} = [X, Y, \theta, N, Q, M]^T$ и $\mathbf{T} = [C, N_\alpha, M_\alpha, K_s]^T$, то уравнения (2.1) можно представить в следующей форме:

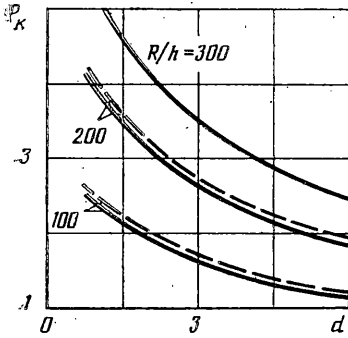
$$\mathbf{Z}' = \mathbf{F}(\mathbf{Z}, \mathbf{T}), \quad \mathbf{T} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{Z})
 \tag{2.2}$$



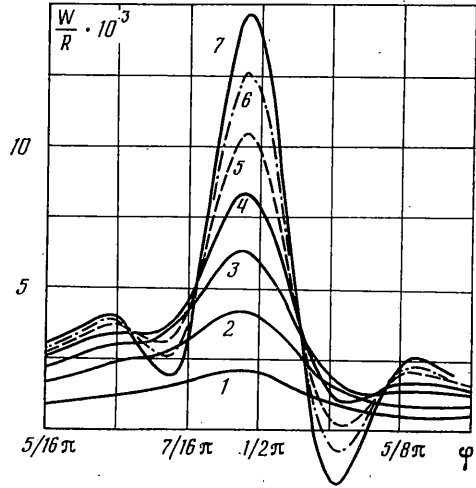
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Эти уравнения были использованы для описания деформированного состояния под равномерным давлением панели, составляющей половину кругового тора (фиг. 2). В этом случае в уравнениях (2.1) принято $s = \varphi$, $l = R$, $q_n = P$, $q_t = 0$.

Начальное (недеформированное) состояние оболочки при $P = P_0 = 0$ определяется выражениями $X_0 = \sin \varphi$, $Y_0 = d - \cos \varphi$, $\theta_0 = \varphi$, $N_0 = Q_0 = M_0 = 0$, $K_0 = 1$, $K_{s0} = 0$, $C_0 = 1$, $M_{\alpha 0} = N_{\alpha 0} = 0$, $d = R_1/R$.

На фиг. 3, а, б представлены характерная кривая деформирования тора, представляющая собой зависимость параметра давления P от нормального прогиба W вершины тора А, а также деформированные формы тора в окрестности вершины для точек, помеченных на кривой $P(W)$ ($R/h = 100$, $d = 2$). При $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ рассматривались условия на краях панели: шарнирное закрепление, защемление, условия симметрии, которые практически не сказались на приведенных здесь результатах.

На фиг. 4 сплошными линиями показаны величины максимальных давлений P_k в зависимости от параметра $d = R_1/R$ и для различных отношений R/h . Штриховыми линиями отмечены результаты [16], полученные при исследовании устойчивости замкнутого тора при осесимметричных деформациях с учетом моментности докритического состояния.

Докритическое осесимметричное состояние тора с самого начала является моментным в окрестности вершины тора А, где гауссова кривизна меняет знак. Поэтому в вершине тора с ростом давления постепенно развивается вмятина. Этот процесс проиллюстрирован на фиг. 5, где приведены кривые нормального прогиба $W(\varphi)$ в окрестности вершины тора для последовательно возрастающих давлений ($R/h = 100$, $d = 1,5$). Кривые 1-7 соответствуют $P = 0,761; 1,42; 1,91; 2,21; 2,37; 2,45; 2,49$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Шалашилин В. И. Метод продолжения по параметру в задачах нелинейного деформирования стержней, пластин и оболочек.— Успехи механики, Варшава, 1981, т. 4, вып. 2, с. 89—122.
2. Григолюк Э. И., Шалашилин В. И. Метод продолжения по параметру в задачах нелинейного деформирования стержней пластин и оболочек.— Исследования по теории пластин и оболочек: Сб. статей. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984, вып. 17, ч. 1, с. 3—58.
3. Kalnins A., Lestingi J. F. On nonlinear analysis of elastic shells of revolution.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1967, v. 34, No. 1, p. 59—64.
4. Петров В. В. К расчету пологих оболочек при конечных прогибах.— Науч. докл. высш. шк. Строительство, 1959, № 1, с. 27—35.
5. Шалашилин В. И. Метод сведения нелинейных краевых задач к задаче Коши. Большие прогибы непологих арок.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 5. 195 с.
6. Шалашилин В. И. Метод продолжения по параметру и его применение к задаче больших прогибов непологой круговой арки.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 4, с. 178—184.
7. Валишвили Н. В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М.: Машиностроение, 1976. 278 с.
8. Кармишин А. В., Ляковец В. А., Мясников В. И., Фролов А. Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М.: Машиностроение, 1975. 374 с.
9. Шалашилин В. И. Некоторые алгоритмы метода продолжения по параметру в нелинейных задачах теории упругости.— В кн.: Нелинейная теория оболочек и пластин. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980, с. 50—51.
10. Григолюк Э. И., Шалашилин В. И. О некоторых формах метода продолжения по параметру в нелинейных задачах теории упругости.— ПМТФ, 1980, № 5, с. 158—162.
11. Григолюк Э. И., Шалашилин В. И. Модифицированные формы метода продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела.— В кн.: Проблемы математики и механики. Новосибирск: Наука, 1983, с. 55—70.
12. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.— Успехи мат. наук, 1961, т. 16, № 3, с. 171—174.
13. Bellman R. E., Kalaba R. E. Quasilinearization and nonlinear boundary-value problems. N. Y.: Elsevier, 1965, 206 p.— Рус. перев.: М.: Мир, 1968, 183 с.
14. Reissner E. On the theory of thin elastic shells.— In: Reissner Anniv. Volume. Ann. Arbor: J. Edwards, 1949, p. 231—247.
15. Шалашилин В. И. Уравнение больших осесимметричных прогибов упругих оболочек вращения в координатной форме.— В кн.: Прочность элементов конструкций летательных аппаратов. М.: Изд-во Моск. авиац. ин-та, 1982, с. 70—73.
16. Фролов А. Н., Ходцева Т. И. Исследование нелинейного поведения тороидальной оболочки при внешнем давлении.— Тр. 10-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Кутаиси, 1975. Тбилиси: Мецниереба, 1975, т. 1, с. 698—703.

Москва

Поступила в редакцию
2.II.1986