

УДК 539.3

ДЕФОРМАЦИЯ ТОНКОГО СЛОЯ ИЗ МАЛОСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА

МАЛЬКОВ В. М.

Большое прикладное значение, особенно для слабосжимаемых материалов типа резины, имеет создание двумерных теорий деформации тел малой толщины при кинематических или смешанных граничных условиях на лицевых поверхностях. Задачи деформации слоя эластомера, на лицевых поверхностях которого выполняются условия полного сцепления с абсолютно жесткими телами, исследованы в [1–5].

В данной работе с помощью асимптотического метода осуществлен переход от уравнений теории упругости к уравнениям двух переменных, описывающим деформацию криволинейного слоя из резиноподобного материала при весьма общих граничных условиях на лицевых поверхностях. Учитывается сжимаемость материала. На основе полученных уравнений предложен метод расчета многослойных элементов, состоящих из чередующихся слоев резины и более жесткого материала, например металла. Такие элементы широко применяются в машиностроении в качестве шарниров, виброзащитных устройств, подшипников и т. д.

1. Теорию деформации упругого тела малой толщины (тонкого слоя) из слабосжимаемого материала будем строить с помощью асимптотических разложений из уравнений Ламе [6]:

$$(\lambda + 2\mu) \nabla e - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{U} + \mathbf{F} = 0 \quad (1.1)$$

при следующих граничных условиях: на боковой поверхности Γ известна распределенная внешняя нагрузка \mathbf{p} ; в точках лицевых поверхностей S задан вектор перемещений \mathbf{U} или поставлены условия другого типа, в частности условия упругого сопряжения.

Введем ортогональные координаты (α_1, α_2, z) , нормально связанные со срединной поверхностью тела; α_1 и α_2 являются линиями главной кривизны параллельных поверхностей $z = \text{const}$ ($-0,5h \leq z \leq 0,5h$, h — толщина тела). Для радиуса-вектора материальной точки получим $\mathbf{R} = \mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2) + z\mathbf{n}$, $\partial \mathbf{R} / \partial \alpha_i = H_i \mathbf{e}_i = A_i (1 + z/R_i) \mathbf{e}_i$, $\partial \mathbf{R} / \partial z = \mathbf{n}$.

Уравнения (1.1) и последующие соотношения проектируются на оси ортогонального базиса $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n})$.

Предполагая, что искомое решение не имеет быстрой изменчивости в параллельных поверхностях $z = \text{const}$, сделаем замены переменных в уравнениях (1.1):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= R\xi, \quad \alpha_2 = R\eta, \quad z = \varepsilon R\zeta; \quad \varepsilon = h/R \ll 1 \\ H_i &= A_i (1 + \varepsilon k_i \zeta), \quad k_i = R/R_i \end{aligned} \quad (1.2)$$

где R — линейный размер срединной поверхности слоя.

Используемый далее итерационный процесс позволяет определить основное напряженно-деформированное состояние в теле. Наличие пограничных условий боковой поверхности не учитывается. Поэтому не все граничные условия на Γ могут быть выполнены, а только главные. На лицевых поверхностях возможен учет всех условий.

2. Для слабосжимаемых материалов в уравнениях (1.1) помимо параметра тонкослойности ε имеется второй малый параметр, характеризующий отношение модулей сдвига и объемного сжатия. Полагаем $G/K = O(\varepsilon^q)$, $q > 0$ ($\mu = G$, $\lambda = K - 2G/3 \approx K$).

Относительное приращение объема будем рассматривать в качестве искомой функции наряду с компонентами вектора перемещений $U = Ue_1 + Ve_2 + Wn$, а соотношение $e = \text{div } U$ — как дополнительное уравнение.

Решение уравнений (1.1) представим в виде

$$(U, V, W, e) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (u_i, v_i, \varepsilon^m w_i, \varepsilon^n e_i) \quad (2.1)$$

Асимптотический анализ уравнений (1.1) и граничных условий для различных значений параметров m, q и n показывает, что предельные уравнения ($\varepsilon \rightarrow 0$) имеют наиболее полный вид и учитывают влияние сжимаемости материала на деформацию слоя, если принять $m=1, q=n=2$. Отметим, что значение $q=2$ соответствует средним характеристикам резин, используемых в тонкослойных резинометаллических элементах: $G = 10^6 \text{ Н/м}^2, K = 25 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2, \varepsilon = 0,02$.

Приняв $m=1, q=2, n=0$, на основании (2.1) найдем разложения по параметру ε компонентов тензора деформаций и вектора поворота $2\omega = \text{rot } U$ [6]:

$$\begin{aligned} Re_{11} &= a_0 + \varepsilon(a_1 - \xi k_1 a_0 + k_1 w_0) + \dots, \quad Re_{22} = b_0 + \varepsilon(b_1 - \xi k_2 b_0 + k_2 w_0) + \dots \\ Re_{33} &= w_{0\xi}' + \varepsilon w_{1\xi}' + \dots, \quad 2Re_{12} = c_0 + d_0 + \varepsilon(c_1 + d_1 - \xi k_1 c_0 - \xi k_2 d_0) + \dots \\ 2he_{13} &= u_{0\xi}' + \varepsilon(u_{1\xi}' - k_1 u_0) + \dots, \quad 2he_{23} = v_{0\xi}' + \varepsilon(v_{1\xi}' - k_2 v_0) + \dots \quad (2.2) \\ 2h\omega_1 &= -v_{0\xi}' - \varepsilon(v_{1\xi}' + k_2 v_0) + \dots, \quad 2h\omega_2 = u_{0\xi}' + \varepsilon(u_{1\xi}' + k_1 u_0) + \dots \\ 2R\omega_3 &= c_0 - d_0 + \varepsilon(c_1 - d_1 - \xi k_1 c_0 + \xi k_2 d_0) + \dots \\ A_1 A_2 a_i &= A_2 u_{i\xi}' + A_{1\eta}' v_i, \quad A_1 A_2 b_i = A_1 v_{i\eta}' + A_{2\xi}' u_i \\ A_1 A_2 c_i &= A_2 v_{i\xi}' - A_{1\eta}' u_i, \quad A_1 A_2 d_i = A_1 u_{i\eta}' - A_{2\xi}' v_i \end{aligned}$$

Подставив в уравнения (1.1) выражения (1.2), (2.2), получим приближения по ε (объемные силы отсутствуют):

$$\begin{aligned} Re_{i\xi}' + c A_1 u_{i\xi}'' &= F_{1,i}, \quad Re_{i\eta}' + c A_2 v_{i\xi}'' = F_{2,i} \quad (2.3) \\ Re_{i\xi}' &= F_{3,i}, \quad Re_i - L(u_i, v_i) - w_{i\xi}' = F_{4,i} \\ c &= GR^2/Kh^2, \quad A_1 A_2 L(u, v) = (A_2 u)_{\xi}' + (A_1 v)_{\eta}' \end{aligned}$$

Правые части уравнений (2.3) зависят от приближений, предшествующих i -му. Для нулевого приближения уравнения однородны, а для первого

$$\begin{aligned} F_{1,1} &= \xi k_1 Re_{0\xi}' - c k A_1 u_{0\xi}', \quad F_{2,1} = \xi k_2 Re_{0\eta}' - c k A_2 v_{0\xi}' \\ F_{3,1} &= 0, \quad F_{4,1} = k w_0 - \xi k_1 a_0 - \xi k_2 b_0 \quad (k = k_1 + k_2) \end{aligned}$$

Уравнения (2.3) позволяют найти зависимость решения от переменных ξ в явном виде. Интегрируя (2.3) по ξ , получим

$$\begin{aligned} U_i &= u_i e_1 + v_i e_2 + \varepsilon w_i n = (0,5 + \xi) U_i^+ + (0,5 - \xi) U_i^- + \\ &+ 1/8 R^2 c^{-1} (1 - 4\xi^2) \nabla e_i^{\circ} + 1/8 \varepsilon (1 - 4\xi^2) [4\xi (W_i^+ - W_i^- - Re_i^{\circ}) + \\ &+ R(1 + 2\xi) \text{div } U_i^+ - R(1 - 2\xi) \text{div } U_i^-] n + U_i^* \quad (2.4) \end{aligned}$$

$$R^2 \Delta e_i^{\circ} - 12 c e_i^{\circ} = - (12 c / R) (W_i^+ - W_i^-) - 6 c \text{div } (U_i^+ + U_i^-) + f_i^*; \quad e_i = e_i^{\circ} + e_i^* \quad (2.5)$$

где U_i^+, U_i^- — неизвестные векторы, зависящие от переменных ξ и η , W_i^+, W_i^- — проекции этих векторов на направление n ; выражения, отмеченные звездочкой, отвечают частным решениям уравнений (2.3), причем в нулевом приближении они отсутствуют. Относительное приращение объема в срединной поверхности слоя e_i° является решением неоднородного уравнения Гельмгольца (2.5). В нулевом и первом приближениях e_i постоянно по толщине, т. е. $e_{0\xi}^* = e_{1\xi}^* = 0$, следующее приближение имеет зависимость до ξ^2 включительно ($Re_{2\xi}' = -c w_{0\xi}''$).

Используя формулы (2.2) и соотношения закона Гука [6]: $\sigma_{ii} = \lambda e + 2\mu e_{ii}$, $\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij}$, оценим порядки величин компонентов тензоров деформаций и напряжений $O(e_{12}) = O(e_{ii}) = O(\varepsilon e_{j3})$, $O(\sigma_{12}) = O(\varepsilon \sigma_{j3}) = O(\varepsilon^2 \sigma_{ii})$.

Наибольшими являются нормальные напряжения, равные между собой в нулевом и первом приближении $\sigma_{ii} = Ke$. На порядок меньше напряжения сдвига в поперечном направлении σ_{j3} , а касательные напряжения τ_{12} — на два порядка.

Из полученных результатов следует, что для деформации сжатия слоя эластомера, когда относительное приращение объема e одного порядка с компонентами деформации e_{ii} , напряжения σ_{ii} с точностью до членов порядка ε^2 постоянны по толщине слоя, а напряжения σ_{12} равны нулю.

3. Введем единичные векторы нормали \mathbf{v} и касательной \mathbf{t} к боковой поверхности тела ($\mathbf{v} \times \mathbf{t} = \mathbf{n}$). В проекциях на эти направления краевые условия для перемещений на Γ :

$$\lambda e + 2\mu e_{vv} = p_v, \quad 2\mu e_{vt} = p_t, \quad 2\mu e_{vn} = p_n \quad (3.1)$$

Из соотношений (2.4), (2.5) следует, что в каждом приближении можно задать только одно граничное условие. Главные члены выражений (3.1) соответствуют краевой задаче для уравнения Гельмгольца (2.5). В нулевом и первом приближении получим $Ke_i = p_v^i$.

Краевые условия на лицевых поверхностях $\xi = \pm 0,5$ используются для нахождения векторов U_i^+ и U_i^- в (2.4), (2.5). Если известны перемещения в точках этих поверхностей, то определение данных векторов не вызывает затруднений. Частные решения U_i^* всегда можно выбрать такими, чтобы они обращались в нуль на лицевых поверхностях, тогда U_i^+ и U_i^- — заданные векторы.

Пусть на одной из поверхностей S известна распределенная нагрузка q . Для перемещений имеем условия, аналогичные (3.1):

$$\lambda e + 2\mu e_{33} = q_n, \quad 2\mu e_{31} = q_1, \quad 2\mu e_{32} = q_2 \quad (3.2)$$

Отсюда получим в нулевом и первом приближении ($i=0,1$):

$$Ke_i = q_n^i, \quad Gu_{i\tau} = hq_1^i + ik_1 u_0, \quad Gv_{i\tau} = hq_2^i + ik_2 v_0 \quad (3.3)$$

Из (3.3) следует, что в каждой точке известно относительное приращение объема e , поэтому уравнение (2.5) используется как граничное условие. Решение (2.4) позволяет задать на одной из лицевых поверхностей кинематические условия, а на другой — статические. Возможно рассмотрение на поверхности или ее части условий смешанного типа. Такие условия имеют место в тонкослойных резинометаллических элементах, когда происходит частичное отслоение резинового слоя от металлического.

4. Рассмотрим задачу о деформации тонкого слоя, у которого боковая поверхность свободна или нагружена постоянным по толщине нормальным давлением p , а лицевые поверхности не деформируясь могут смещаться одна относительно другой. К решению такой задачи обычно сводятся существующие методы расчета жесткостных характеристик резинометаллических элементов. Ограничимся нулевым приближением решения. В выражениях (2.4), (2.5) пропадают слагаемые, содержащие операцию div (индекс нуль опущен):

$$U = (0,5 + \xi) U^+ + (0,5 - \xi) U^- + \frac{1}{8}(1 - 4\xi^2) [R^2 \nabla e / c + 4\xi (W^+ - W^- - h e) \mathbf{n}] \\ R^2 \Delta e - 12ce = - (12c/h) (W^+ - W^-), \quad Ke|_{\Gamma} = p \quad (4.1)$$

где U^+ , U^- — векторы, характеризующие поступательные перемещения и повороты поверхностей $\xi = \pm 0,5$.

Формулы (4.1) лишь малыми слагаемыми отличаются от аналогичных выражений, полученных в работе [1], где использовался вариационный метод решения задачи.

Двумерная теория деформации тонкого слоя, эквивалентная по точности и общности нулевому приближению асимптотического метода, может быть построена вариационным путем на основе принципа возможных пе-

ремещений [6]. Вектор перемещений точек тела будем искать в виде

$$\mathbf{U} = (0,5+\xi)\mathbf{U}^+ + (0,5-\xi)\mathbf{U}^- + (1-4\xi^2)[u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + (w_0 + \xi w)\mathbf{n}]$$

Перемещения точек лицевых поверхностей \mathbf{U}^+ и \mathbf{U}^- считаются заданными и не варьируются. На возможных перемещениях $\delta\mathbf{U} = (1-4\xi^2)[\delta u\mathbf{e}_1 + \delta v\mathbf{e}_2 + (\delta w_0 + \xi\delta w)\mathbf{n}]$ работа внешних и внутренних сил равна нулю. Произведя необходимые вычисления и пренебрегая членами порядка ε , придем к выражениям (2.4), (2.5) и соответствующим граничным условиям.

5. Актуальной проблемой является разработка теории многослойных элементов, учитывающей совместную деформацию мягких и жестких слоев. Возможный путь построения такой теории состоит в использовании соотношений (2.4), (2.5) для описания деформации слоев эластомера, а для тонких слоев металла или другого жесткого материала — уравнений теории оболочек и пластин, основанной на гипотезах Кирхгофа — Лява [7]. Вектор перемещений точек жесткого слоя (оболочки):

$$\mathbf{U} = (u + z\vartheta_1)\mathbf{e}_1 + (v + z\vartheta_2)\mathbf{e}_2 + w\mathbf{n} \quad (5.1)$$

$$\vartheta_1 = -\partial w / A_1 \partial \alpha_1 + u / R_1, \quad \vartheta_2 = -\partial w / A_2 \partial \alpha_2 + v / R_2$$

Здесь $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{n}$ — вектор перемещений точек срединной поверхности, ϑ_1, ϑ_2 — углы поворота. На краях можно задать один из вариантов граничных условий теории оболочек. Типичными для многослойных элементов являются условия свободного края. Поскольку в классической теории оболочек компоненты деформации $e_{j3} = 0$ ($j=1, 2, 3$), то статические условия сопряжения имеют особенность. Векторы напряжений действующие на лицевых поверхностях слоев резины, для жестких слоев следует рассматривать как распределенную внешнюю нагрузку, приведенную к срединной поверхности. Условия упругого сопряжения на поверхностях контакта жесткого k -го слоя с соседними слоями эластомера, имеющими номера $k-1$ и $k+1$ (возрастание номеров k идет в направлении \mathbf{n}) имеет вид

$$\mathbf{U}_k^- = \mathbf{U}_{k-1}^+, \quad \mathbf{U}_k^+ = \mathbf{U}_{k+1}^- \quad (5.2)$$

$$\mathbf{q}_k = \boldsymbol{\sigma}_{k+1}^- + \boldsymbol{\sigma}_{k-1}^+, \quad 2\mathbf{m}_k = h_k \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\sigma}_{k+1}^- - \boldsymbol{\sigma}_{k-1}^+)$$

($\mathbf{q}_k, \mathbf{m}_k$ — поверхностные силы и моменты, участвующие в уравнениях равновесия элемента оболочки, h_k — толщина слоя). Координатные базисы ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$) одинаковы для всех слоев.

Уточненная теория деформации армирующих слоев, основанная на асимптотических разложениях и учитывающая поперечное обжатие и сдвиг, рассматривалась в работе [8].

6. Рассмотрим задачу о плоской деформации трехслойной полосы, нагруженной симметрично относительно средней плоскости $z=0$ (фиг. 1). Наружные слои толщины h изготовлены из резины, внутренний слой толщины h_0 — из более жесткого материала с упругими постоянными E_0, ν_0 . Боковые поверхности $\xi = x/R = \pm 0,5$ свободны (R — ширина полосы). Поверхности $z = \pm(h+h_0/2)$ являются абсолютно жесткими.

Для симметричной деформации относительно приращение объема резиновых слоев одинаково, жесткий слой деформируется в своей плоскости, перемещения его точек — u . Лицевые поверхности полосы имеют поступательные перемещения a_z и повороты ω_y :

$$e'' - 12ce + 6c_2 u' / R = -12c(a_z - \xi R \omega_y) / h \quad (6.1)$$

$$u'' - 2du + dRe' / c = 0, \quad e|_{\Gamma} = u'|_{\Gamma} = 0, \quad d = (1 - \nu_0^2)GR^2 / E_0 h_0 h$$

Решение задачи (6.1) имеет вид

$$he = a_z - \xi R \omega_y - (\beta^2 - 12c)(B_1 \operatorname{sh} \alpha \xi_2 - B_2 \operatorname{sh} \alpha \xi_1) / \operatorname{sh} \alpha + \\ + (\alpha^2 - 12c)(B_1 \operatorname{sh} \beta \xi_2 - B_2 \operatorname{sh} \beta \xi_1) / \operatorname{sh} \beta \quad (6.2)$$

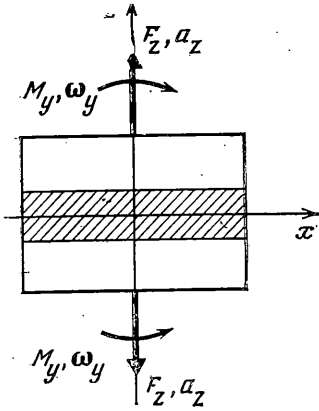
$$- \varepsilon u' = 12d_2(B_1 \operatorname{sh} \alpha \xi_2 - B_2 \operatorname{sh} \alpha \xi_1) / \operatorname{sh} \alpha - 12d_2(B_1 \operatorname{sh} \beta \xi_2 - B_2 \operatorname{sh} \beta \xi_1) / \operatorname{sh} \beta$$

$$\xi_{1,2} = \xi \pm 0,5, \quad B_{1,2} = (a_z \pm 0,5 R \omega_y) / (\alpha^2 - \beta^2)$$

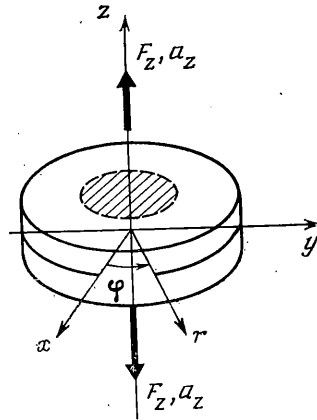
$$c_2 = ct, \quad d_2 = dt$$

$$t = 1 + \eta_0 / (1 - \eta_0) h_0 / h$$

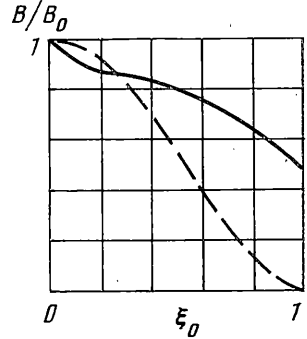
где α, β — большой и малый вещественные корни характеристического уравнения системы (6.1).



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

С точностью до величин порядка d/c из формул (6.2) найдем

$$\begin{aligned} he &= a_z - \xi R \omega_y + (D_1 \operatorname{sh} \alpha \xi_2 - D_2 \operatorname{sh} \alpha \xi_1) / \operatorname{sh} \alpha \\ cu' &= d_2 Re; \quad D_{1,2} = a_z \pm 0,5 R \omega_y \quad (\alpha^2 = 12c) \end{aligned} \quad (6.3)$$

Напряжения в слоях резины: $\sigma_{ii} = Ke$, $\sigma_{31} = -\xi \epsilon Ke'$; напряжения в жестких слоях: $\sigma_1 = Khe/h_0$, $\sigma_2 = \nu_0(\sigma_1 + \sigma_3)$, $\sigma_3 = Ke$, $\sigma_{13} = \xi \epsilon Ke'$.

Рассмотрим приближенный метод расчета полосы, состоящий в раздельном решении краевых задач для мягких и жестких слоев. Вначале определяется деформация слоев резины, средний слой считается абсолютно жестким. Напряжения σ_{33} и σ_{31} на поверхностях контакта являются внешней нагрузкой для жесткого слоя, на которую производится его расчет. Уравнения деформирования имеют вид

$$e'' - 12ce = -12c(a_z - \xi R \omega_y)/h, \quad cu'' + d_2 Re' = 0 \quad (6.4)$$

Граничные условия прежние. Решение уравнений (6.4) совпадает с формулами (6.3). Следовательно, возможность использования приближенного подхода при расчете многослойных элементов определяется величиной отношения $d/c = (1 - \nu_0^2)Kh/E_0h_0$. Если это отношение не мало, то краевая задача не распадается.

7. В качестве второго примера исследуем влияние отслоения на величину жесткости плоского слоя эластомера круговой формы, соединенного по лицевым поверхностям с жесткими обоймами (фиг. 2). Нижняя лицевая поверхность полностью привулканизирована к обойме, а верхняя — лишь частично, на участке $0 \leq r \leq R_0$ имеет место отслоение слоя резины от обоймы. Используется цилиндрическая система координат (r, φ, z) ; $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $|z| \leq h/2$. Поверхность $\xi = -0,5$ неподвижна, с учетом этого условия из соотношений (2.4), (2.5) получим в нулевом приближении

$$U = (0,5 + \xi) U^+ + (1 - 4\xi^2) \frac{R^2}{8c} e_r', \quad V = (0,5 + \xi) V^+ + (1 - 4\xi^2) \frac{R^2}{8c} \frac{e_\varphi'}{r} \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} W &= (0,5 + \xi) W^+ + (1 - 4\xi^2) \left[\frac{\xi}{2} (W^+ - he) + (1 + 2\xi) \frac{h}{8r} (r U_{r,r}^{++} + U^+ + V_\varphi^{++}) \right] \\ R^2 \Delta e - 12ce &= -12c W^+ / h - 6c (r U_{r,r}^{++} + U^+ + V_\varphi^{++}) / h \end{aligned} \quad (7.2)$$

Боковая поверхность слоя свободна $e|_r=0$. Ограничимся исследованием деформации сжатия и растяжения слоя. Эта задача является осесимметричной. На участке $S_1 (R_0 \leq r \leq R)$ верхней лицевой поверхности имеем условия $U^+=0$, $W^+=a_z$. А на участке $S_2 (0 \leq r \leq R_0)$ при сжатии: $\sigma_{13}^+=0$, $W^+=a_z$, при растяжении: $\sigma_{31}^+=\sigma_{33}^+=0$. Введем безразмерную переменную $r=R\xi$, $0 \leq \xi \leq 1$. При сжатии слоя уравнение (7.2) для участков S_1 и S_2 имеет вид

$$e''+e'/\xi-12ce=-12ca_z/h, \quad e''+e'/\xi-3ce=-3ca_z/h \quad (7.3)$$

Общие решения уравнений (7.3):

$$he/a_z=1+B_1I_0(\alpha\xi)+C_1K_0(\alpha\xi), \quad he/a_z=1+B_2I_0(\beta\xi)+C_2K_0(\beta\xi) \quad (7.4)$$

где I_0 , K_0 — модифицированные функции Бесселя, $\alpha=2\beta=\sqrt{12s}$. Постоянные решений (7.4) определяются из граничных условий при $\xi=0,1$ и условий непрерывности функций e и e' при $\xi_0=R_0/R$:

$$B_1/B_2=\alpha\xi_0I_0(\beta\xi_0)K_0'(\alpha\xi_0)-\beta\xi_0I_0'(\beta\xi_0)K_0(\alpha\xi_0)$$

$$C_1/B_2=\beta\xi_0I_0(\alpha\xi_0)I_0'(\beta\xi_0)-\alpha\xi_0I_0(\beta\xi_0)I_0'(\alpha\xi_0)$$

$$B_2=-1/[I_0(\alpha)B_1/B_2+K_0(\alpha)C_1/B_2], \quad C_2=0$$

Найдем зависимость между силой сжатия и осадкой слоя $F_z=Ba_z$:

$$F_z = \int \sigma_{33} dS = 2\pi R^2 \int_0^1 K e \xi d\xi$$

$$F_z = \frac{2\pi R^2 K a_z}{\alpha h} \left[\frac{\alpha}{2} + B_1(I_0'(\alpha) + 3\xi_0 I_0'(\alpha\xi_0)) + C_1(K_0'(\alpha) + 3\xi_0 K_0'(\alpha\xi_0)) \right]$$

Для задачи растяжения слоя эластомера получим, что его внутренняя часть ($0 \leq \xi \leq \xi_0$) не деформируется, а работает только кольцевой участок ($\xi_0 \leq \xi \leq 1$). Решение для кольцевого слоя при свободных боковых поверхностях $e(1)=e(\xi_0)=0$ известно [5]. В данной задаче для уравнения Гельмгольца необходимо задать следующие граничные условия $e(1)=e'(\xi_0)=0$, что обеспечивает выполнение условия $U(\xi_0)=0$. Относительное приращение объема кольцевого участка вычисляется по первой из формул (7.4), где

$$B_1 = -\frac{K_0'(\alpha\xi_0)}{K_0'(\alpha\xi_0)}, \quad C_1 = \frac{K_0'(\alpha\xi_0)}{I_0'(\alpha\xi_0)K_0(\alpha) - I_0(\alpha)K_0'(\alpha\xi_0)}$$

Величина растягивающей силы вычисляется по формуле

$$F_z = \frac{2\pi R^2 K a_z}{\alpha h} \left[\frac{\alpha}{2} (1-\xi_0^2) + B_1(I_0'(\alpha) - \xi_0 I_0'(\alpha\xi_0)) + C_1(K_0'(\alpha) - \xi_0 K_0'(\alpha\xi_0)) \right]$$

Перемещения основного состояния задачи растяжения слоя терпят разрыв на поверхности $r=R_0$. Этот разрыв устраняется, если учесть в окрестности поверхности быстро меняющееся решение типа погранслоя. На жесткостные характеристики элемента погранслоя не окажет существенного влияния.

На фиг. 3 показана величина отношения коэффициента жесткости B слоя эластомера при наличии отслоения к коэффициенту жесткости слоя без отслоения B_0 в зависимости от параметра ξ_0 . Сплошная линия соответствует сжатию слоя, пунктирная — растяжению, принято $s=1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черных К. Ф., Милякова Л. В. Тонкие резинометаллические элементы.— Вестн. ЛГУ, 1981, № 19, вып. 4, с. 88–96.
2. Гонца В. Ф. Влияние слабой сжимаемости на решение задачи теории упругости для несжимаемого материала.— В кн.: Вопросы динамики и прочности. Рига: Зинатне, 1970, вып. 20, с. 181–193.
3. Малый В. И., Гусятинская Н. С. Анализ поля перемещений слоя слабосжимаемого материала и расчет жесткости тонкослойных резинометаллических элементов при сжатии.— В кн.: Вопросы динамики и прочности. Рига. Зинатне, 1981, вып. 38, с. 64–78.
4. Лавендел Э. Э., Хричикова В. А., Лейканд М. А. Расчет жесткости сжатия тонкослойных резинометаллических элементов.— В кн.: Вопросы динамики и прочности. Рига: Зинатне, 1981, вып. 38, с. 57–63.
5. Малый В. И. Асимптотическое решение задачи о сжатии слоя из слабосжимаемого материала.— В кн.: Механика эластомеров. Краснодар: Изд-е Краснодар. политехн. ин-та, 1983, вып. 1, с. 38–44.
6. Новожилов В. В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
7. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судостроение, 1962. 431 с.
8. Мальков В. М. Асимптотическая теория деформации тонкого слоя эластомера и некоторые ее приложения. IV Научн.-техн. конф. Методы расчета изделий из высокоэластичных материалов. Тез. докл. Рига: Изд-е РПИ: 1986, т. 126–127.

Ленинград

Поступила в редакцию
12.III.1986