

УДК 531.38

ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА С УПРУГИМ СТЕРЖНЕМ С ПОМОЩЬЮ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ СВОБОДНОЙ СИСТЕМЫ

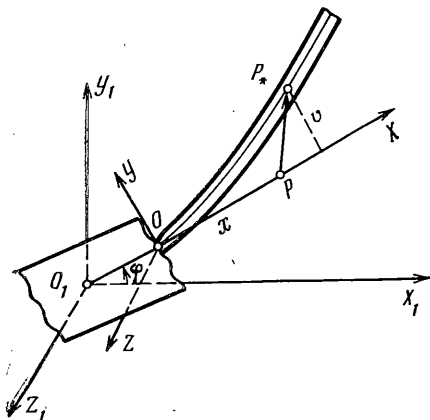
БЕРБЮК В. Е.

Исследуются задачи оптимального управления плоскими вращательными движениями твердого тела и жестко связанного с ним упругого стержня. Для оценки качества процесса управления применяются функционалы: квадратичный по управлению, быстродействия и функционал типа Больца [1]. Движение рассматриваемой системы описывается интегродифференциальными уравнениями и граничными условиями [2, 3] в рамках предположений линейной теории тонких прямолинейных нерастяжимых упругих стержней [4]. Ставятся задачи: перевести систему из заданного начального в заданное конечное фазовое состояние и минимизировать квадратичный по управлению функционал или время процесса управления; определить управляющее воздействие, минимизирующее функционал Больца на движениях системы при фиксированном времени процесса управления и свободном правом конце фазовой траектории. Эти постановки возникают при рассмотрении ряда прикладных задач управления системами с упругими связями, такими, как роботы и манипуляторы, грузоподъемные машины и др. В развитие результатов [5] доказаны утверждения, дающие решения поставленных задач оптимального управления на основе использования первых интегралов уравнений движения свободной системы. В качестве примера рассмотрена задача оптимального по квадратичному функционалу поворота твердого тела с упругим стержнем из состояния покоя на заданный угол с гашением упругих колебаний стержня с точностью до нижней моды.

Задачам оптимизации управляемых движений механических систем с упругими связями в различных постановках посвящен ряд работ [1–14 и др.]

1. Рассматривается механическая система, состоящая из твердого тела и жестко связанного с ним упругого нерастяжимого прямолинейного стержня (фигура). Система может совершать вращательные движения в плоскости $O_1X_1Y_1$ инерциального пространства $O_1X_1Y_1Z_1$. Перпендикулярная плоскости движения ось O_1Z_1 — ось вращения, относительно которой приложен момент управляющих сил M . Введем вращающуюся в инерциальном пространстве вместе со стержнем систему координат $OXYZ$ с началом в центре шарнира крепления (точка O). Ось OX зададим по направлению касательной к нейтральной линии стержня в точке O , ось OZ — по направлению оси вращения O_1Z_1 .

Уравнения и граничные условия, описывающие управляемые движения рассматриваемой механической системы, имеют вид [2, 3]:



$$J\varphi'' + \int_0^l \rho(x)(x+a)v_{tt}(x,t)dx = M \quad (1.1)$$

$$E[I(x)v_{xxx}]_{xx} + \rho(x)v_{tt} = -\rho(x)(x+a)\varphi'' + \varphi'^2[\rho(x)v + (b_*v_x)_x] \quad (1.2)$$

$$v(0,t) = v_x(0,t) = 0 \quad (1.3)$$

$$v_{xx}(l,t) = v_{xxx}(l,t) = 0 \quad (1.4)$$

$$b_*(x) = \int_x^l (a+\xi)\rho(\xi)d\xi,$$

$$J = J_1 + \int_0^l (x+a)^2 \rho(x)dx$$

В формулах (1.1)–(1.4) использованы обозначения (фигура): x – абсцисса точки P в подвижной системе координат $OXYZ$ ($0 \leq x \leq l$), l – длина стержня, $\rho(x)$ – линейная плотность, E – модуль Юнга, $I(x)$ – момент инерции поперечного сечения стержня относительно оси, перпендикулярной плоскости изгиба, J_1 – момент инерции твердого тела относительно оси вращения, a – расстояния от оси вращения до точки O , φ – угол поворота твердого тела, $v(x, t)$ – проекция на ось OY вектора перемещения точки P упругой оси стержня с координатой x в момент времени t . Точкой обозначается полная производная по времени t , индексами x или t – соответствующие частные производные.

Уравнение (1.1) выражает теорему об изменении момента количества движения всей системы относительно оси O_1Z_1 , (1.2) описывает малые упругие отклонения точек стержня от своего равновесного состояния. Граничные условия (1.3) – кинематического характера и следуют из свойств введенной системы координат $OXYZ$, (1.4) – динамического характера и выражают отсутствие изгибного момента и поперечной силы на конце стержня при $x=l$. Вывод уравнений (1.1), (1.2) при более общих предположениях приведен в [2, 3]. При отсутствии несущего твердого тела, т. е. при $J_1=a=0$, из (1.1), (1.2) следуют уравнения для управляемого вращения упругого стержня [12].

Возможна постановка следующих задач управления.

Задача 1.1. Определить управляющий момент $M(t)$, перемещающий систему в силу уравнений и граничных условий (1.1)–(1.4) за заданное время $T-t_0$ из начального состояния

$$\varphi(t_0)=\varphi_0, \varphi^*(t_0)=\varphi_0^*, v(x, t_0)=f_0(x), v_t(x, t_0)=g_0(x) \quad (1.5)$$

в конечное

$$\varphi(T)=\varphi_T, \varphi^*(T)=\varphi_T^*, v(x, T)=f_T(x), v_t(x, T)=g_T(x) \quad (1.6)$$

и минимизирующий функционал

$$\Phi_1(M) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T M^2(t) dt, \quad |M(t)| < \infty \quad (1.7)$$

Задача 1.2. Найти управляющее воздействие $M(t)$, удовлетворяющее ограничению

$$\int_{t_0}^T M^2(t) dt \leq L, \quad 0 \leq t_0 < T < \infty, \quad 0 < L < \infty \quad (1.8)$$

и перемещающее систему (1.1)–(1.4) из начального состояния (1.5) в конечное (1.6) за наименьшее время.

Задача 1.3. Определить управляющее воздействие $M(t)$, $|M(t)| < \infty$, минимизирующее функционал

$$\Phi_2(M) = F_2[\varphi(T), \varphi^*(T), v(l, T), v_t(l, T)] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T M^2(t) dt \quad (1.9)$$

при дифференциальных связях (1.1), (1.2), граничных условиях (1.3), (1.4), начальном состоянии (1.5) и заданном времени управления $T-t_0$.

Здесь t_0, T – моменты начала и окончания процесса управления, $f_0(x), g_0(x), f_T(x), g_T(x)$ – заданные функции, согласованные с граничными условиями (1.3), (1.4). Конечные условия (1.6) довольно общие и позволяют рассмотреть ряд задач управления движением рассматриваемой системы, представляющих интерес для приложений. В частности, можно поставить задачу о повороте твердого тела на заданный угол с гашением колебаний стержня: $\varphi(T)=\varphi_T, \varphi^*(T)=0, v(x, T)=v_t(x, T)=0$. В задаче 1.3 конечные условия не заданы, т. е. рассматривается вариационная задача с фиксированным временем процесса управления и свободным правым концом.

Управляющее воздействие $M(t)$ в задачах 1.1 и 1.2 выбирается из достаточно широкого класса кусочно-гладких интегрируемых с квадратом функций. Величины функционала $\Phi_1(M)$ и ограничение на момент $M(t)$ вида (1.8) в случае электромеханических приводов управления может играть роль соответственно оценки и ограничения энергии, затрачиваемой в процессе управления [9]. Функционал $\Phi_2(M)$ позволяет оценить качество управления движением системы с учетом упругих смещений незакрепленного конца стержня. Терминальная составляющая функционала $\Phi_2(M)$ – заданная дифференцируемая функция фазовых координат системы при $x=l$ и $t=T$.

Пусть угловая скорость вращения твердого тела мала по сравнению с низшей частотой упругих колебаний стержня. Тогда в силу предположений линейной теории тонких упругих стержней в уравнении (1.2) члены с φ'^2 должны быть опущены как более высокого порядка малости [4, 13].

С учетом принятого предположения в практически важном случае $\rho, I = \text{const}$ с помощью линейных преобразований размерных переменных по формулам: $x' = x/l, t' = v(t - t_0), v' = v/l, a' = a/l, M' = M/(\rho l^3 v^2), J' = J/(\rho l^3), L' = L/(\rho^2 l^6 v^3), F_2' = F_2/(\rho^2 l^6 v^3), \Phi_1' = \Phi_1/(\rho^2 l^6 v^3), \Phi_2' = \Phi_2/(\rho^2 l^6 v^3), v^2 = EI/(\rho l^4)$ уравнения (1.1), (1.2) могут быть записаны в виде (штрихи в новых переменных опущены)

$$J\varphi'' + \int_0^1 (x+a) v_{tt}(x, t) dx = M \quad (1.10)$$

$$v_{xxxx} + v_{tt} = -(x+a)\varphi'' \quad (1.11)$$

Запись граничных условий для $v(x, t)$, начального и конечного фазовых состояний системы, ограничений на управление и функционалов $\Phi_i(M)$ остается прежней и определяется соотношениями (1.3)–(1.9) при $l=1, t_0=0$.

2. Для заданной функции $M(t)$ решение уравнений (1.10), (1.11) с граничными (1.3), (1.4) и начальными (1.5) условиями может быть построено методом Фурье. Разделение переменных позволяет с учетом краевых условий найти ортогональную систему собственных функций $\{X_n(x)\}$, $x \in [0, 1]$. В результате искомая функция $v(x, t)$ равна

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) X_n(x), \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, 1] \quad (2.1)$$

$$X_n(x) = D_n [\operatorname{ch} \lambda_n x - \cos \lambda_n x + \gamma_n (\sin \lambda_n x - \operatorname{sh} \lambda_n x)]$$

$$\gamma_n = (\operatorname{ch} \lambda_n + \cos \lambda_n) / (\operatorname{sh} \lambda_n + \sin \lambda_n) \quad (n=1, 2, \dots)$$

Здесь λ_n ($n=1, 2, \dots$) — занумерованные в порядке возрастания положительные корни характеристического уравнения $\cos \lambda \operatorname{ch} \lambda = -1$, D_n — произвольные постоянные, $v_n(t)$ — некоторые функции, подлежащие определению.

Подставляя (2.1) в соотношения (1.10), (1.11) и учитывая свойства собственных функций $X_n(x)$, после ряда преобразований уравнения (1.10), (1.11) и условия (1.5), (1.6) сводятся к следующей счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными и конечными условиями

$$J\varphi'' + \sum_{n=1}^{\infty} B_n v_n'' = M, \quad v_n'' + \lambda_n^4 v_n = -C_n \varphi'', \quad t \in [0, T] \quad (2.2)$$

$$C_n = \left[\int_0^1 (x+a) X_n(x) dx \right] \left[\int_0^1 X_n^2(x) dx \right]^{-1}, \quad B_n = C_n \int_0^1 X_n^2(x) dx$$

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \varphi'(0) = \varphi_0', \quad v_n(0) = f_{0n}, \quad v_n'(0) = g_{0n}$$

$$\varphi(T) = \varphi_T, \quad \varphi'(T) = \varphi_T', \quad v_n(T) = f_{Tn}, \quad v_n'(T) = g_{Tn} \quad (n=1, 2, \dots)$$

где $f_{0n}, g_{0n}, f_{Tn}, g_{Tn}$ — коэффициенты Фурье функций $f_0(x), g_0(x), f_T(x), g_T(x)$ по системе $\{X_n(x)\}$.

Разрешая уравнения (2.2) относительно старших производных и вводя новые переменные $y_{2m-1} = v_m, y_{2m} = v_m', v_0 = \varphi, v_0' = \varphi', m=0, 1, 2, \dots$, окончательно получим

$$y_i' = f_i(y) + b_i M \quad (i=-1, 0, 1, \dots) \quad (2.3)$$

$$y_i(0) = y_{0i} \quad (2.4)$$

$$y_i(T) = y_{Ti} \quad (2.5)$$

В формулах (2.3):

$$f_{2m-1}=y_{2m}, \quad b_{2m-1}=0, \quad y=(y_{-1}, y_0, y_1, \dots) \quad (2.6)$$

$$f_0 = \frac{1}{J_*} \sum_{k=1}^{\infty} B_k \lambda_k^4 y_{2k-1}, \quad b_0 = \frac{1}{J_*}, \quad J_* = J - \sum_{k=1}^{\infty} C_k B_k$$

$$f_{2n} = -\lambda_n^4 y_{2n-1} - \frac{C_n}{J_*} \sum_{k=1}^{\infty} B_k \lambda_k^4 y_{2k-1}, \quad b_{2n} = -\frac{C_n}{J_*} \quad (n=1, 2, \dots)$$

Таким образом, задачи 1.1–1.3 оптимального управления движением распределенной системой (1.1)–(1.6) сведены к соответствующим задачам управления (ниже обозначаются номерами 2.1–2.3) для счетной линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.3) с начальными (2.4) и конечными (2.5) условиями.

Функционалы и ограничения на управления в задачах 2.1, 2.2 те же, что и в задачах 1.1, 1.2.

В силу введения новых переменных y_i функционал Φ_2 в задаче 2.3 примет вид

$$\Phi_2(M) = F[y(T)] + \frac{1}{2} \int_0^T M^2(t) dt \quad (2.7)$$

где $F[y(T)]$ определяется по функции $F_2[\varphi(T), \varphi'(T), v(1, T), v_i(1, T)]$ с помощью (2.1) и формул перехода к переменным y_i .

3. При изучении изгибных колебаний стержней в рамках линейной теории и принятых предположений достаточно ограничиться рассмотрением конечного числа мод упругих колебаний. В дальнейшем будут учитываться только первые N мод упругих колебаний стержня и в соотношениях (2.3)–(2.6) полагается $i=-1, 0, \dots, 2N$; $m=0, 1, \dots, N$; $k, n=1, 2, \dots, N$, $y=(y_{-1}, y_0, \dots, y_{2N})$.

Для решения задач 2.1–2.3 применим подход, основанный на использовании первых интегралов уравнений движения свободной системы, являющийся развитием результатов [5]. Пусть известны $w_i(y, t, T)$ ($i=-1, \dots, 2N$) – линейные по фазовым координатам независимые первые интегралы уравнений движения свободной системы

$$y_i^* = f_i(y_{-1}, y_0, \dots, y_{2N}) \quad (i=-1, 0, \dots, 2N) \quad (3.1)$$

удовлетворяющие условиям

$$w_i(y, T, T) = y_i \quad (i=-1, 0, \dots, 2N) \quad (3.2)$$

Если $G(t, T)$ – фундаментальная матрица линейной стационарной системы уравнений (3.1), то для первых интегралов, удовлетворяющих вышеперечисленным требованиям, имеем выражения

$$w_i(y, t, T) = \sum_{m=-1}^{2N} g_{im}^{-1}(t, T) y_m \quad (i=-1, \dots, 2N) \quad (3.3)$$

где $g_{im}^{-1}(t, T)$ – элементы матрицы $G^{-1}(t, T) = G(T, t)$.

Рассмотрим управляющую функцию вида

$$M(t, A) = - \left(\text{grad}_y \sum_{i=-1}^{2N} A_i w_i(y, t, T), b \right) \quad (3.4)$$

где $A=(A_{-1}, A_0, \dots, A_{2N})$ – некоторый вектор, $b=(b_{-1}, \dots, b_{2N})$, grad_y – оператор градиента по переменным $y_{-1}, \dots, y_{2N}$, $(\cdot)$ – скалярное произведение векторов.

Имеет место следующее

Утверждение 1. Пусть $A_{-1}^*, \dots, A_{2N}^*$ — решение системы уравнений

$$y_i[t, M(t, A)]|_{t=T} = y_{Ti} \quad (i = -1, \dots, 2N) \quad (3.5)$$

где $y_i[t, M(t, A)]$ — решение задачи Коши (2.3), (2.4) при $M(t) \equiv M(t, A)$. Тогда управляющее воздействие (3.4) при $A_i = A_i^*$ ($i = -1, \dots, 2N$) доставляет функционалу (1.7) абсолютный минимум при дифференциальных связях (2.3) и граничных условиях (2.4), (2.5), т. е. является решением задачи 2.1. При этом

$$\min_M \Phi_1(M) = \frac{1}{2} \sum_{i=-1}^{2N} A_i^* [w_i(y_0, 0, T) - y_{Ti}] \quad (3.6)$$

Для доказательства сформулированного утверждения рассмотрим вспомогательный функционал

$$\begin{aligned} \Phi_1^0(M, A^*) = & \sum_{i=-1}^{2N} A_i^* y_i(T) + \frac{1}{2} \int_0^T M^2(t) dt + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T \left(\text{grad}_y \sum_{i=-1}^{2N} A_i^* w_i(y, t, T), \mathbf{b} \right)^2 dt \end{aligned} \quad (3.7)$$

Так как первые интегралы $w_i(y, t, T)$ линейны по переменным $y_{-1}, \dots, y_{2N}$, то из анализа (3.7) следует, что на множестве управляющих функций $M(t)$, для которых соблюдаются дифференциальные связи (2.3) и граничные условия (2.4), (2.5), функционалы $\Phi_1(M)$ и $\Phi_1^0(M, A^*)$ отличаются на постоянную величину. Следовательно, при одних и тех же дифференциальных связях (2.3) и граничных условиях (2.4), (2.5) их экстремали совпадают.

Определим экстремали функционала (3.7). Вычислим полную производную от функции $\sum A_i^* w_i(y, t, T)$ в силу уравнений движения (2.3). Получим

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=-1}^{2N} A_i^* w_i(y, t, T) \right] = \sum_{i=-1}^{2N} A_i^* \left\{ \frac{\partial w_i}{\partial t} + \sum_{m=-1}^{2N} \frac{\partial w_i}{\partial y_m} [f_m(y) + b_m M] \right\} \quad (3.8)$$

Функции $w_i(y, t, T)$ — первые интегралы уравнений (3.1), следовательно, имеют место соотношения

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + (\text{grad}_y w_i, \mathbf{f}) = 0 \quad (i = -1, \dots, 2N) \quad (3.9)$$

С учетом (3.9) из (3.8) окончательно имеем

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=-1}^{2N} A_i^* w_i(y, t, T) \right] = M(t) \left(\text{grad}_y \sum_{i=-1}^{2N} A_i^* w_i(y, t, T), \mathbf{b} \right) \quad (3.10)$$

Проинтегрируем (3.10) по времени в пределах от 0 до T и, учитывая (2.4), (3.2), получим

$$\sum_{i=-1}^{2N} A_i^* y_i(T) = \sum_{i=-1}^{2N} A_i^* w_i(y_0, 0, T) + \int_0^T M(t) \left(\text{grad}_y \sum_{i=-1}^{2N} A_i^* w_i(y, t, T), \mathbf{b} \right) dt \quad (3.11)$$

Подставляя (3.11) в (3.7), функционал $\Phi_1^0(M, A^*)$ примет вид

$$\Phi_1^0(M, A^*) = \sum_{i=-1}^{2N} A_i^* w_i(y_0, 0, T) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^T \left[M + \left(\operatorname{grad}_y \sum_{i=-1}^{2N} A_i^* w_i(y, t, T), \mathbf{b} \right) \right]^2 dt \quad (3.12)$$

Первое слагаемое в (3.12) не зависит от выбора управления M , поэтому из (3.12) непосредственно следует, что управление вида (3.4) при $A_i = A_i^*$ ($i = -1, \dots, 2N$) доставляет функционалу $\Phi_1^0(M, A^*)$ абсолютный минимум. При этом

$$\min_M \Phi_1^0(M, A^*) = \sum_{i=-1}^{2N} A_i^* w_i(y_0, 0, T) \quad (3.13)$$

Для доказательства соотношения (3.6) подставим в формулу (3.7) управление (3.4) при $A_i = A_i^*$ и с учетом (1.7), (2.5): получим

$$\min_M \Phi_1^0(M, A^*) = \sum_{i=-1}^{2N} A_i^* y_{Ti} + 2 \min_M \Phi_1(M) \quad (3.14)$$

Из формул (3.13), (3.14) следует справедливость соотношения (3.6), что и завершает доказательство утверждения 1.

Таким образом, решение задачи оптимального управления вращением твердого тела с упругим стержнем, определяемой формулами (2.3)–(2.6), (1.7), может быть получено следующей процедурой.

1°. Определяем линейные по фазовым координатам y независимые первые интегралы системы уравнений (3.1), удовлетворяющие условиям (3.2).

2°. Формируем управляющее воздействие по закону (3.4) и решаем задачу Коши (2.3), (2.4) при $M = M(t, A)$.

3°. Определив константы A_i^* из решения алгебраической системы уравнений (3.5), вычислим искомое оптимальное управление и минимальное значение функционала (1.7) по формулам (3.4), (3.6) при $A_i = A_i^*$.

Допустим, что решение задачи 2.1 существует при любом $T \in (0, \infty)$ и определяется формулами (3.4)–(3.6). Обозначим через T_* наименьшее положительное значение T

$$\sum_{i=-1}^{2N} A_i^*(T) [w_i(y_0, 0, T) - y_{Ti}] \leq L$$

где $A_i^*(T)$ определяется из решения (3.5) при $T = T_*$. Тогда из полученных выше результатов следует, что при $T = T_*$, $A_i = A_i^*(T_*)$ управляющее воздействие вида (3.4) удовлетворяет ограничению (1.8) и перемещает твердое тело с упругим стержнем из начального состояния (2.4) в конечное (2.5) за наименьшее время, т. е. является решением задачи 2.2.

Рассмотрим вариационную задачу 2.3. Имеет место следующее

Утверждение 2. Пусть $w(y, t)$ – первый интеграл уравнений движения свободной системы (3.1), удовлетворяющий условиям

$$w(y, t)|_{t=T} = F(y), \quad y \in \Omega \quad (3.15)$$

$$\operatorname{grad}_y(\operatorname{grad}_y w, \mathbf{b}) = 0, \quad \{y, t\} \in \Omega \times [0, T] \quad (3.16)$$

где Ω – некоторое открытое множество евклидова пространства E_{2N+2} .

Тогда управляющее воздействие вида

$$M_*(t) = -(\operatorname{grad}_y w(y, t), \mathbf{b}) \quad (3.17)$$

доставляет функционалу (2.7) абсолютный минимум при дифференциальных связях (2.3) и начальном условии (2.4). Минимум функционала (2.7) равен

$$\Phi_2(M_*) = w(y_0, 0) - \frac{1}{2} \int_0^T M_*^2(t) dt \quad (3.18)$$

В силу вида формул (2.6) и принятого предположения о терминальной составляющей функционала (1.9) функции $f(y)$ и $F(y)$ дифференцируемы по переменным $y_1, \dots, y_{2N}$, а значит, решение задачи Коши

$$\partial u(y, t)/\partial t + (\text{grad}_y u, \mathbf{f}) = 0, \quad u(y, t)|_{t=T} = F(y) \quad (3.19)$$

существует и единственно [15]. Следовательно, выполнение условия (3.15) можно обеспечить, так как решение задачи (3.19) определяет нужный первый интеграл $w(y, t)$ уравнений (3.1).

Ограничение (3.16) состоит в том, что в каждой точке $\{y, t\} \in \Omega \times [0, T]$ скорость изменения первого интеграла $w(y, t)$ в направлении вектора $\mathbf{b}$ не должна зависеть от фазовых координат $y_1, \dots, y_{2N}$, а быть неизменной или функцией только времени t . Из (3.16) следует, что управление (3.17) является программным, равно по модулю и обратно по знаку скорости изменения первого интеграла $w(y, t)$ в направлении вектора $\mathbf{b}$.

Для доказательства утверждения 2 рассмотрим вспомогательный функционал

$$\Phi_2^0(M) = F[y(T)] + \frac{1}{2} \int_0^T [M^2(t) + (\text{grad}_y w, \mathbf{b})^2] dt \quad (3.20)$$

где $w(y, t)$ — первый интеграл уравнений (3.1), удовлетворяющий условиям (3.15), (3.16).

С учетом того, что функция $w(y, t)$ является решением задачи Коши (3.19), функционал $\Phi_2^0(M)$ преобразованиями, аналогичными как и при доказательстве утверждения 1, может быть записан в виде

$$\Phi_2^0(M) = w(y_0, 0) + \frac{1}{2} \int_0^T [M(t) + (\text{grad}_y w, \mathbf{b})]^2 dt \quad (3.21)$$

Так как y_0 задано, а $w(y, t)$ — первый интеграл уравнений движения свободной системы, то величина $w(y_0, 0)$ от выбора управления M не зависит. Из анализа (3.21) непосредственно следует, что управление вида (3.17) доставляет функционалу (3.20) абсолютный минимум, который равен

$$\Phi_2^0(M_*) = w(y_0, 0) \quad (3.22)$$

Из сравнения функционалов $\Phi_2(M)$ и $\Phi_2^0(M)$ следует, что имеет место соотношение

$$\Phi_2^0(M) = \Phi_2(M) + \frac{1}{2} \int_0^T (\text{grad}_y w, \mathbf{b})^2 dt \quad (3.23)$$

В силу условия (3.16) подынтегральная функция в (3.23) не зависит от фазовых координат. Следовательно, интегральная составляющая в формуле (3.23) может быть заранее вычислена и представляет собой известную постоянную. Таким образом, функционалы $\Phi_2(M)$ и $\Phi_2^0(M)$, определенные на одном и том же множестве управлений, при одних и тех же дифференциальных связях и граничных условиях отличаются на постоянную величину. Значит, их экстремали совпадают, т. е. управление (3.17) доставляет абсолютный минимум функционалу $\Phi_2(M)$. Справедливость соотношения (3.18) непосредственно следует из (2.7), (3.17), (3.22), (3.23).

Утверждение 2 доказано и задача 2.3 в рамках принятых предположений решена.

4. Для иллюстрации эффективности применения полученных в п. 3 результатов рассмотрим решение задачи оптимального управления вида (2.3) — (2.5), (1.7) в случае, когда требуется повернуть твердое тело с упругим стержнем из состояния покоя на заданный угол и погасить колебания стержня с точностью до низшей моды.

Уравнения движения и граничные условия следуют из (2.3) — (2.6) и имеют вид

$$\dot{y} = Ky + bM, \quad y_i(0) = 0 \quad (i = -1, 0, 1, 2) \quad (4.1)$$

$$y_{-1}(T) = \varphi_T, \quad y_0(T) = y_1(T) = y_2(T) = 0 \quad (4.2)$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & l_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{C_1}{J_*} \end{bmatrix}$$

$$l_1 = \lambda_1^4 B_1 / J_*, \quad l_2 = -\lambda_1^4 (1 + C_1 B_1 / J_*)$$

Фундаментальная матрица уравнений движения свободной системы ((4.1) при $M=0$) имеет вид

$$G(t, T) = \frac{\gamma - \text{sh } \gamma}{l_2 \sqrt{l_2}} K^3 + \frac{\text{ch } \gamma - 1}{l_2} K^2 - \frac{\gamma}{\sqrt{l_2}} K + E_1 \quad (4.3)$$

где $\gamma = \sqrt{l_2}(T-t)$, E_1 — единичная матрица размерности 4×4 .

С учетом (4.3) и соотношения $\bar{G}^{-1}(t, T) = \bar{G}(T, t)$ по формулам (3.3) определяем линейные по фазовым координатам независимые первые интегралы, удовлетворяющие условиям (3.2)

$$w_{-1}(y, t, T) = y_{-1} + \frac{\gamma}{\sqrt{l_2}} y_0 + \frac{l_1}{l_2} (\text{ch } \gamma - 1) y_1 + \frac{l_1}{l_2 \sqrt{l_2}} (\text{sh } \gamma - \gamma) y_2 \quad (4.4)$$

$$w_0(y, t, T) = y_0 + \frac{l_1 \text{sh } \gamma}{\sqrt{l_2}} y_1 + \frac{l_1 (\text{ch } \gamma - 1)}{l_2} y_2$$

$$w_1(y, t, T) = y_1 \text{ch } \gamma + y_2 \text{sh } \gamma / \sqrt{l_2}, \quad w_2(y, t, T) = \sqrt{l_2} y_1 \text{sh } \gamma + y_2 \text{ch } \gamma$$

На основании формул (3.4), (4.4) после преобразований искомое оптимальное управление можно записать в виде

$$M_*(t) = \xi_1 + \xi_2(T-t) + \xi_3 \text{sh } \sqrt{l_2}(T-t) + \xi_4 \text{ch } \sqrt{l_2}(T-t).$$

Константы ξ_j определяются исходя из решения краевой задачи (4.1), (4.2) при $M = M_*(t)$ и могут быть легко рассчитаны по формулам $\xi_j = \Delta_j / \Delta$ ($j = 1, 2, 3, 4$), где Δ — определитель матрицы $\|C_{ij}\|$, Δ_j — определитель матрицы, получаемой заменой j -го столбца в $\|C_{ij}\|$ вектором p . При этом элементы C_{ij} , p_j определяются формулами

$$C_{11} = C_{33} = (\text{ch } \eta - 1) / \sqrt{l_2}, \quad C_{12} = C_{43} = (\eta \text{ch } \eta - \text{sh } \eta) / l_2$$

$$C_{13} = 1/4 (\text{sh } 2\eta - 2\eta) / \sqrt{l_2}, \quad C_{14} = C_{23} = 1/2 \text{sh}^2 \eta / \sqrt{l_2}$$

$$C_{21} = C_{34} = \text{sh } \eta / \sqrt{l_2}, \quad C_{22} = C_{44} = (1 + \eta \text{sh } \eta - \text{ch } \eta) / l_2$$

$$C_{24} = 1/4 (\text{sh } 2\eta + 2\eta) / \sqrt{l_2}, \quad C_{31} = T, \quad C_{32} = C_{41} = T^2 / 2$$

$$C_{42} = T^3 / 3, \quad \eta = T \sqrt{l_2}, \quad p_1 = p_2 = p_3 = 0$$

$$p_4 = \varphi_T J_* l_2 / (l_2 + C_1 l_1)$$

Эти результаты могут быть получены также, исходя из принципа максимума [16].

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975. 528 с.
2. Бербюк В. Е. Об управляемом вращении системы двух твердых тел с упругими элементами. — ПММ, 1984, т. 48, вып. 2, с. 238–246.
3. Бербюк В. Е., Демидюк М. В. Об управляемом движении упругого манипулятора с распределенными параметрами. — Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 2, с. 59–67.
4. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
5. Бербюк В. Е. Использование первых интегралов в задачах синтеза оптимальных систем управления. — ПММ, 1986, т. 50, вып. 1, с. 17–23.
6. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
7. Троицкий В. А. Оптимальные процессы колебаний механических систем. Л.: Машиностроение, 1976. 248 с.

8. *Сиразетдинов Т. К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977. 479 с.
9. *Черноуцко Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
10. *Черноуцко Ф. Л.* Динамика управляемых движений упругого манипулятора.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1981, № 5, с. 142–152.
11. *Акуленко Л. Д.* Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 6, с. 1095–1103.
12. *Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н.* Об управляемом вращении упругого стержня.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 4, с. 587–595.
13. *Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н.* Об управлении поворотом упругого звена манипулятора.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1984, № 1, с. 167–173.
14. *Бербюк В. Е., Демидюк М. В.* Параметрическая оптимизация в задачах динамики и управления движением упругого манипулятора с распределенными параметрами.— Изв. АН СССР. МТТ, 1986, № 2, с. 81–89.
15. *Камке Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука, 1966. 260 с.
16. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.

Львов

Поступила в редакцию
7.V.1986