

УДК 539.3.01

**О ВДАВЛИВАНИИ В УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ШТАМПА СО СКРУГЛЕННЫМ КРАЕМ**

ШИШКАНОВА С. Ф.

В инженерной практике с целью снижения концентрации напряжений возле отверстий, галтелей, кольцевых выточек, у шпоночных и шлицевых пазов, основания резьбы, а также там, где одна деталь напрессовывается или давит на другую, выполняют радиусы закругления ρ . Обычно коэффициент концентрации напряжений зависит от соотношений размеров сопрягаемых тел и определяется методами теории упругости или экспериментально [1]. Практически на реальных узлах ρ реализуется ручной или механической зачисткой сопрягаемых деталей.

При необходимости аналитической оценки эффекта скругления возникают определенные трудности. Скругление на телах вращения можно аппроксимировать торообразной поверхностью. Однако это связано с рассмотрением поверхностей четвертого порядка, и поэтому для имитации круговой выточки иногда используются поверхности второго порядка — гиперболоиды вращения [2]. Вопрос о снижении концентрации напряжений в контактных задачах рассматривался в [3], где для круглого в плане штампа при имитации радиуса скругления использовалась поверхность параболоида вращения.

Необходимо отметить, что задача об аналитическом выражении радиуса скругления ρ в настоящее время становится актуальной в связи с использованием станков с программным управлением и созданием для них систем автоматизированного проектирования. Возникает необходимость максимально простого и точного аналитического описания сопрягаемых поверхностей и одновременного определения распределения напряжений и деформаций.

В публикуемой работе для эллиптического в плане штампа [3, 4] удалось определить аналитическую форму скругления, для которой найдено точное и простое по форме распределение давлений под штампом. Решение задачи в частном случае сравнивается с результатами, полученными в [3] для круглого в плане штампа.

1. Из зависимостей [5] определяем, что выражения объемных потенциалов с ядрами Рисса первого и третьего порядков для m -мерных тел, ограниченных $(m-1)$ -мерными поверхностями эллипсоидов, имеют вид

$$\int_{\Omega} \frac{p_1 dx}{r^{m-1}} = \frac{\pi^{(m+1)/2} c_m}{2\Gamma((m+1)/2-1)} \int_0^{\infty} \left(1 - \sum_{i=1}^m \frac{\xi_i^2}{a_i^2+s}\right) \frac{ds}{\sqrt{s} R(s)} \quad (1.1)$$

$$\int_{\Omega} \frac{p_3 dx}{r^{m-3}} = \frac{\pi^{(m+1)/2} c_m}{\Gamma((m-1)/2-1)} \int_0^{\infty} \left(1 - \sum_{i=1}^m \frac{\xi_i^2}{a_i^2+s}\right) \frac{\sqrt{s} ds}{R(s)} \quad (1.2)$$

$$p_1 = \left(1 - \sum_{i=1}^m \frac{x_i^2}{a_i^2}\right)^{1/2}, \quad p_3 = \left(1 - \sum_{i=1}^m \frac{x_i^2}{a_i^2}\right)^{-1/2}$$

$$c_m = \prod_{i=1}^m a_i, \quad R^2(s) = \prod_{i=1}^m (a_i^2+s)$$

Здесь p_1, p_3 — плотности распределения массы, $x = (x_1, \dots, x_m)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ — точки m -мерного евклидова пространства (ξ — внутри эллипсоида), Ω — область, ограниченная поверхностью эллипсоида с уравнением $\sum (x_i^2/a_i^2) = 1$ ($i=1, \dots, m$), $\Gamma(n/2-1)$ — гамма-функция; $r =$

$=|x-\xi|$. Если ξ — внешняя точка области Ω , то в интегралах (1.1) и (1.2) нижним пределом является положительный корень λ уравнения $1 - \sum \xi_i^2 / (a_i^2 + \lambda) = 0$ ($i=1, \dots, m$).

Рассмотрим подобные и подобно расположенные концентрические эллипсоиды. Обозначим через a_i ($i=1, \dots, m$) полуоси внешнего эллипсоида Ω , $a_i' = ka_i$ — полуоси внутреннего эллипсоида Ω' , $k < 1$. Используя выражения (1.1) и (1.2), можно показать, что для потенциалов с ядрами Рисса первого и третьего порядков имеет место теорема, подобная теореме для ньютонового потенциала однородного трехмерного эллипсоида [6].

Объемные потенциалы U_1 и U_3 с ядрами Рисса первого и третьего порядков для m -мерного тела, состоящего из двух подобных и подобно расположенных концентрических эллипсоидов с плотностями ρ_1, ρ_1' для ядра первого порядка и ρ_3, ρ_3' для ядра третьего порядка, в точках, внутренних для обоих эллипсоидов, имеют постоянные значения, не зависящие от координат точки, причем (суммирование приводится по $i=1, \dots, m$):

$$\rho_1' = -k \left(1 - \sum x_i^2 / a_i'^2 \right)^{1/2}, \quad \rho_3' = - \left(1 - \sum x_i^2 / a_i'^2 \right)^{-1/2} / k$$

Действительно, во внутренних для обоих эллипсоидов точках имеем

$$U_1 = \int_{\Omega} r^{1-m} \left(1 - \sum_{i=1}^m \frac{x_i^2}{a_i^2} \right)^{1/2} dx - \int_{\Omega'} k r^{1-m} \left(1 - \sum_{i=1}^m \frac{x_i^2}{a_i'^2} \right)^{1/2} dx$$

Используя выражение (1.1) и производя замену переменной во втором интеграле $s = k^2 s'$, получим

$$U_1 = \frac{\pi^{(m+1)/2} c_m}{2\Gamma((m+1)/2-1)} \int_0^{\infty} \frac{(1-k^2) ds}{\sqrt{s} R(s)} \quad (1.3)$$

Аналогично будем иметь

$$\begin{aligned} U_3 &= \int_{\Omega} r^{3-m} \left(1 - \sum_{i=1}^m \frac{x_i^2}{a_i^2} \right)^{-1/2} dx - \int_{\Omega'} \frac{1}{k} r^{3-m} \left(1 - \sum_{i=1}^m \frac{x_i^2}{a_i'^2} \right)^{-1/2} dx = \\ &= \frac{\pi^{(m+1)/2} c_m}{\Gamma((m-1)/2-1)} \int_0^{\infty} \frac{(1-k^2) \sqrt{s} ds}{R(s)} \end{aligned}$$

2. В случае $m=2$ приходим к рассмотрению потенциала эллиптической пластинки, ограниченной эллипсом с полуосями a и b , на которой распределен простой слой с плотностью распределения

$$\begin{aligned} p(x, y) &= c \left([1 - x^2/a^2 - y^2/b^2]^{1/2} - \right. \\ &\quad \left. - k [1 - x^2/a'^2 - y^2/b'^2]^{1/2} \right), \quad x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq k^2 \\ p(x, y) &= c [1 - x^2/a^2 - y^2/b^2]^{1/2}, \quad k^2 \leq x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $k < 1$, $a' = ka$, $b' = kb$, c — постоянная.

Вычислим внутренний потенциал простого слоя такой пластинки. Пользуясь выражением (1.3), получим постоянное значение потенциала для $\xi^2/a^2 + \eta^2/b^2 \leq k^2$:

$$U_1 = c(1-k^2) \pi ab \int_0^{\infty} [(a^2+t^2)(b^2+t^2)]^{-1/2} dt = c(1-k^2) \pi b K(e) \quad (2.2)$$

где $K(e)$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем e , равным эксцентриситету эллипса.

В точках (ξ, η) , для которых $k^2 \leq \xi^2/a^2 + \eta^2/b^2 \leq 1$, получаем следующее выражение для искомого потенциала:

$$\begin{aligned}
 U_1 = & c \frac{\pi ab}{2} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\xi^2}{a^2+s} - \frac{\eta^2}{b^2+s} \right) \frac{ds}{\sqrt{s(a^2+s)(b^2+s)}} - \\
 & - c \frac{\pi a' b'}{2} k \int_{\lambda}^{\infty} \left(1 - \frac{\xi^2}{a'^2+s} - \frac{\eta^2}{b'^2+s} \right) \frac{ds}{\sqrt{s(a'^2+s)(b'^2+s)}} = \\
 = & c\pi b(1-k^2)K(e) + c\pi b k^2 F(\gamma, e) - c\pi b \frac{\xi^2}{a^2 e^2} [F(\gamma, e) - E(\gamma, e)] - \\
 & - c\pi b \xi^2 \lambda_1 [(\lambda_1^2 + a^2)(\lambda_1^2 + b^2)]^{-1/2} / a - c\eta^2 [a^2 E(\gamma, e) - b^2 F(\gamma, e)] / (a^2 b e^2)
 \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $F(\gamma, e)$, $E(\gamma, e)$ — эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем e ($e^2 = 1 - b^2/a^2$), λ_1 — положительный корень уравнения $k^2 - \xi^2/(a^2 + \lambda_1^2) - \eta^2/(b^2 + \lambda_1^2) = 0$, $\gamma = \arctg(\lambda_1/b)$.

Для малых значений e и k , близких к единице, потенциал (2.3) можно, пользуясь разложением в ряды входящих в (2.3) функций, приближенно записать в виде

$$U_1 = c\pi b(1-k^2)K(e) - 4/3 c\pi a' b' k (\xi^2/a'^2 + \eta^2/b'^2 - 1)^{3/2} / (a'^2 + b'^2) \quad (2.4)$$

3. Таким образом, если на поверхности эллиптического диска Ω распределен простой слой с плотностью (2.1), то точное выражение для потенциала такого слоя

$$U_1 = \iint_{\Omega} \frac{p(x, y)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} dx dy \quad (3.1)$$

определяется выражениями (2.2), (2.3) или приближенным (2.4).

Полученные выражения для потенциала простого слоя используем для решения задачи о давлении на упругое полупространство плоского эллиптического в плане штампа со скругленным краем, когда поверхность скругления описывается выражением (2.3) или (2.4) (фиг. 1). Обозначим через a' и b' полуоси эллипса, в области которого осуществляется первоначальное касание штампа с упругим полупространством. При сжатии силой P полуоси области контакта a и b примут значения, несколько превышающие их первоначальные величины a' и b' ($a' = ka$, $b' = kb$, $k < 1$). Для первоначального расстояния $z(x, y)$ между точками, соприкасающимися при сжатии, имеем выражение

$$z(x, y) = 0, \quad x^2/a'^2 + y^2/b'^2 < 1 \quad (3.2)$$

$$z(x, y) = A [x^2/a'^2 + y^2/b'^2 - 1]^{3/2}, \quad k^2 \leq x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$$

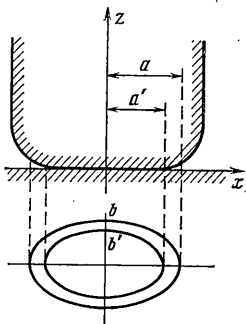
Обозначим через $p(x, y)$ нормальное давление, возникающее под штампом в точке с координатами (x, y) . В области контакта должно выполняться условие

$$\theta \iint_{\Omega} \frac{p(x, y) dx dy}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = \alpha - z(\xi, \eta), \quad \theta = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \quad (3.3)$$

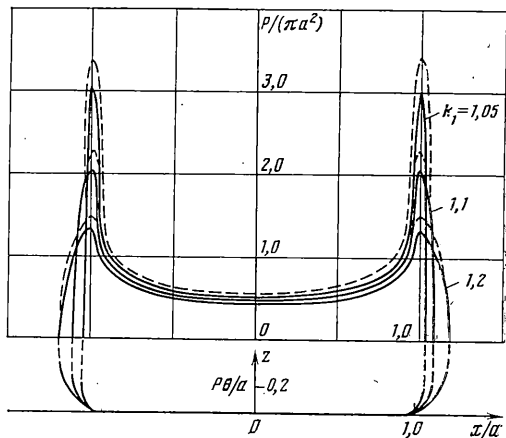
где E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона; α характеризует погружение штампа; $z(\xi, \eta)$ определяется формулами (3.2). Из сравнения выражений (3.2), (3.3) и (2.2), (2.4) с учетом (2.1), (3.1) следует, что нормальное давление под штампом $p(x, y)$ описывается функцией (2.1). Постоянную c определяем из условия

$$\iint_{\Omega} p(x, y) dx dy = P \quad (3.4)$$

Подставляя (2.1) в (3.4), находим $c = 3P/[2\pi ab(1-k^3)]$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Приравнявая коэффициенты справа и слева в выражении (3.3) с учетом зависимости (3.2) и равенства интеграла выражению (2.4) или (2.2) для точек первоначальной площадки соприкосновения, определяем сближение α и значение k , характеризующее размеры a и b площадки контакта: $\alpha = \pi b \theta (1 - k^2) K(e)$, $k = \{A(a'^2 + b'^2) / [2Pb'\theta + A(a'^2 + b'^2)]\}^{1/2}$.

На фиг. 2 показаны графики распределения давления $p(x, y)$ в плоскости, проходящей через фокальную ось эллипса, лежащего в основании штампа, и соответствующие различным значениям отношения $k_1 = a/a'$ (пунктирная линия). Сплошные кривые соответствуют случаю кругового штампа для сопряжения, выполненного по поверхности (2.4), которые под плоской частью штампа практически совпадают с результатами, полученными в [3]. В области сопрягаемых поверхностей максимальные значения давлений, полученные в данной работе, почти на 15% превышают полученные в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Биргер И. А., Шорр В. Ф., Иосилевич Г. Б. Расчет на прочность деталей машин. М.: Машиностроение, 1979. 702 с.
2. Нейбер Г. Концентрация напряжений. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 204 с.
3. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
4. Александров В. М. О действии эллиптического штампа на упругое полупространство. - В кн.: Авторефераты научн.-исслед. работ за 1959 г. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1960, с. 45-47.
5. Ройтман А. В., Шишканова С. Ф. К решению полигармонических уравнений. - Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 5, с. 433-437.
6. Дубошин Г. Н. Теория притяжения. М.: Физматгиз, 1961. 288 с.

Запорожье

Поступила в редакцию
11.II.1986