

УДК 539.3.01

**КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ  
В МАТРИЧНЫХ КОМПОЗИТАХ**

БУРЯЧЕНКО В. А.

Предложены явные зависимости для дисперсий и двухточечных корреляционных функций полей напряжений в линейно-упругих матричных композитах, состоящих из однородной матрицы и случайного множества эллипсоидальных включений. Рассчитаны тензоры концентраций напряжений первого и второго порядков для композита: несжимаемая матрица — шаровые включения.

Ранее [1—3] для решения подобных задач использовался вариант метода эффективного поля, согласно которому каждое рассматриваемое включение находится в некотором случайном эффективном поле [1—3]. По найденному эффективному полю однозначно восстанавливаются случайные поля напряжений на включениях. Существенным допущением метода является предположение о независимости параметров распределения эффективного поля от геометрических и упругих характеристик выбранного включения. В публикуемой работе метод обобщен: принято, что любое конечное число включений находится в своем эффективном поле, зависящем, вообще говоря, от расстояния между включениями. Поэтому рассматриваемое включение находится в поле, зависящем от формы и упругих характеристик выбранного включения. Бинарное взаимодействие включений оценивается методом последовательных приближений [4] в предположении однородности поля напряжений внутри каждого включения.

**1. Общее уравнение.** Пусть в бесконечной однородной матрице с модулями  $L_0$  содержится случайное множество  $X = (v_k, x_k, \omega_k)$  эллипсоидальных точечных [1, 2] включений  $v_k$  с характеристическими функциями  $V_k(x)$ , центрами  $x_k$  и совокупностью эйлеровых углов  $\omega_k$  с тензорами модулей упругости  $L(x) = L_0 + L_1(x) = L_0 + L_1^{(k)}$  при  $x \in v_k$ . На бесконечности задано однородное поле напряжений  $\sigma^0$ . Интегральное уравнение для смещений  $u$  имеет вид [5]:

$$u(x) = u^0(x) + \int G(x-x') L_1(x') V(x') \nabla u(x') dx' \quad (1.1)$$

где  $V(x) = \bigcup_k V_k(x)$ ,  $u^0(x)$  — смещение однородной среды с модулем  $L_0$

под действием напряжения  $\sigma^0$ ,  $G(x)$  — функция Грина однородной среды с модулем  $L_0$ . Переходя к тензорам деформаций  $\epsilon$ , а затем напряжений  $\sigma$ , из (1.1) получим в индексной форме

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x) = & L_{0ijkl} \langle \epsilon_{kl} \rangle + \int \Gamma_{k(i,j)l}(x-x') M_{ijklmn}(x') V(x') \sigma_{mn}(x') dx' + \\ & + \oint L_{0ijpq} G_{k(p,q)}(x-x') L_{0klr} M_{ijklmn}(x') V(x') \sigma_{mn}(x') ds_l \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$M_1(x) = (L_0 + L_1(x))^{-1} - L_0^{-1}, \quad \Gamma(x-x') = -L_0(\delta(x-x') + \nabla \nabla G(x-x')) L_0$$

— тензор внутренних напряжений в среде с модулями  $L_0$ ,  $\nabla$  — операция симметризованного градиента. Интегрирование в (1.2) проводится по макрообъему  $W$  (содержащему статистически большое число включений) с характеристической функцией  $W^-$  и макрогранице  $\partial W$ . Расстояние от  $x$  до границы  $\partial W$   $\rho(x, \partial W)$  много больше характерного размера включений с полуосями  $a_i^{(k)}$ . Центрируем формулу (1.2), т. е. вычтем из обеих частей равенства их первые моменты

$$\sigma = \sigma^0 + \int \Gamma(x-x') \{M_1(x') V(x') \sigma(x') - \langle M_1 \sigma^0 v^- \rangle\} dx' \quad (1.3)$$

где учтено, что операцию поверхностного интегрирования по макрогранице  $\partial W$  в силу условия  $\rho(x, \partial W) \gg a = \max_{i,k} a_i^{(k)}$  можно считать усреднением;  $v^- = \text{mes } v$ ;  $\langle \sigma \rangle = \sigma^\circ$  и  $\sigma^+$  — поле напряжений внутри включений. Здесь и ниже  $\langle \cdot \rangle$ ,  $\langle \cdot | x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_m \rangle$  обозначают среднее и условное среднее по ансамблю  $X$  при условии, что в точках  $x_1, \dots, x_m$  находятся включения и  $x_1, \dots, x_n \neq x_{n+1}, \dots, x_m$ .

Формула (1.3) отличается от аналогичных зависимостей [1–3] наличием члена  $\langle M_1 \sigma^+ v^- \rangle$ . Поэтому при  $r = |x - x'| \rightarrow \infty$ , когда изменение  $\Gamma(x - x')$  на характерном размере включения мало, под знаком интеграла в (1.3) можно провести частичное усреднение по объему быстро осциллирующих членов. Тогда при  $r \rightarrow \infty$  выражение в фигурных скобках стремится к нулю и интеграл в (1.3) абсолютно сходится во всей области интегрирования. Поэтому отпадает необходимость постулировать форму области  $W$  [6] или учитывать ту или иную регуляризацию расходящихся на бесконечности интегралов [1, 3], выбор которой неоднозначен и определяется тем смыслом, который имеет регуляризация в рассмотренной задаче.

**2. Эффективное поле.** Фиксируем реализацию множества  $X$  и рассмотрим включение в точке  $x_k$  с эффективным полем  $\sigma^-(x)$ ,  $x \in v_k$ , в котором находится это включение

$$\sigma^-(x) + \int \Gamma(x - x') \{M_1(x') \sigma(x') V(x'; x) - \langle M_1 \sigma^+ v^- \rangle\} dx' \quad (2.1)$$

$$V(x'; x) \equiv V(x') \setminus V_k(x)$$

Для нахождения момента случайного тензора  $\sigma^-(x)$  введем гипотезы.

1) Поле  $\sigma^-(x)$  однородно в окрестности каждого точечного включения и зависит от геометрических и упругих характеристик этого включения.  
2) Каждые  $n$  ( $n < 1$ ) рассматриваемых включений находятся в своем, вообще говоря, неоднородном эффективном поле  $\sigma_{1, \dots, n}^-$ , не зависящем от модулей этих включений.

Первая гипотеза принята с целью приближенной оценки взаимодействия конечного числа  $n$  включений, находящихся в бесконечной матрице под действием поля  $\sigma_{1, \dots, n}^-$ . В принципе возможно принятие более общей гипотезы, допускающей полиномиальную зависимость со случайными коэффициентами от координаты для поля  $\sigma^-$ . Вторая гипотеза более содержательна и подобна ранее предложенному варианту метода эффективного поля [1–3, 5], который сводит задачу о взаимодействии многих частиц к решению одночастичной задачи с оценкой среднего поля  $\sigma_1^-$ . Основное отличие предлагаемой схемы от подхода [1, 2] в том, что в качестве одной «частицы» рассматривается не одиночное включение, а  $n$  включений, находящихся в поле  $\sigma_{1, \dots, n}^-$ .

Для эллипсоидальных включений по известному однородному эффективному полю  $\sigma^-(x)$  однозначно определяется поле напряжений в  $k$ -м включении [7]:

$$\sigma^+(x) = B_k \sigma^-(x), \quad B_k = (I + L_0(I - P_k L_0) M_1^{(k)})^{-1}, \quad x \in v_k$$

$$P_k = \int \nabla \nabla G(x - x') V_k(x') dx', \quad x' \in v_k. \quad (2.2)$$

Постоянный тензор  $P_k$  не зависит от  $x$ , упругих модулей и размеров (но не формы) эллипсоида  $v_k$ ; компоненты тензора  $P_k$  для изотропных матрицы и включений выражаются через эллиптические интегралы [3]. Подставляя (2.2) в (2.1), найдем

$$\sigma^-(x) = \sigma^\circ + \int \Gamma(x - x') \{B(x') M_1(x') \sigma^-(x') V(x'; x) - \langle B M_1 \sigma^+ v^- \rangle\} dx' \quad (2.3)$$

В (2.3) необходимо оценивать многочастичное взаимодействие включений.

**3. Оценка бинарного взаимодействия.** Рассмотрим задачу линейной теории упругости о двух эллипсоидах  $v_k, v_m$  в бесконечной упругой матрице с модулем  $L_0$ :

$$\sigma(x) = \sigma^\circ(x) + \int \Gamma(x - x') M_1(x') \sigma(x') [V_k(x') + V_m(x')] dx' \quad (3.1)$$

Предположим, что поле  $\sigma^\circ(x)$ , вообще говоря, неоднородное, меняется достаточно слабо (в окрестности включений  $v_k, v_m$  его можно считать однородным), и построим решение (3.1) методом последовательных приближений. Примем в нулевом приближении  $\sigma_0^+(x)=0, x \in v_k$ , тогда из (2.2)  $\sigma_0^+(x)=B_m \sigma^\circ(x) \quad (x \in v_m)$  и далее

$$\begin{aligned} \sigma_i^+(x) &= B_m \left( \sigma^\circ(x) + \int \Gamma(x-y) M_1(y) \sigma_{i-1}^+(y) V_k(y) dy \right) \\ \sigma_{i+1}^+(x) &= B_k \left( \sigma^\circ(x) + \int \Gamma(x-y) M_1(y) \sigma_i^+(y) V_m(y) dy \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

при  $x \in v_m$  и  $x \in v_k$  соответственно; здесь  $\sigma_i^+(x)$  — значение  $i$ -го приближения  $\sigma(x)$  по предположению однородно. Обозначим

$$S(r) = (v_k^- v_m^-)^{-1} \int V_k(x) \int V_m(y) \Gamma(x-y) dx dy, \quad R_k = B_k M_1^{(k)} v_k^- \quad (3.3)$$

тогда из (3.2), (3.3) при  $x \in v_k$ :

$$M_1^{(k)} \sigma^+(x) v_k^- = R_k J_{km}, \quad S(r) M_1^{(k)} \sigma^+(x) v_k^- = J_{mk} - \sigma^\circ(x_m) \quad (3.4)$$

$$J_{km} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^1 (SR_m SR_k)^i (SR_m)^j \sigma^{\circ j}(x_m) \sigma^{\circ i}(x_k) \quad (l = |1-j|) \quad (3.5)$$

в определении  $J_{mk}$  нужно индексы  $k$  и  $m$  поменять местами. При  $|r| \rightarrow \infty$  член ряда (3.5) убывает как  $|r|^{-3n}$ .

Алгоритм вычисления  $\sigma^+(x)$  обобщается на любое конечное число включений. Зависимости (3.4), (3.5) получены для включений с конечными размерами. Поэтому  $S(r)$  зависит не только от  $r$ , но и от размеров  $v_k, v_m$ ; в работе [4] для изотропной матрицы получено выражение  $S(r)$  для одинаковых шаровых включений  $v_k, v_m$ . При  $|r| = |x_k - x_m| \rightarrow \infty$   $S(r) \rightarrow -L_0 \nabla \nabla G(r) L_0$ , поэтому для упрощения выкладок может быть использовано, как и в [1-3], точечное приближение включений

$$S(r) = -L_0 \nabla \nabla G(r) L_0 \quad (3.6)$$

которое использовалось в [8], где в методе эффективного поля при оценке бинарного взаимодействия включений влияние  $m$ -го включения при фиксированном  $k$ -м заменялось влиянием силового диполя, сосредоточенного в точке  $x_m$  и, тем самым, использовалось лишь два первых члена ряда в разложении (3.5).

В дальнейшем нам понадобится оценка  $\langle J_{km} \rangle_{km}$  — значение  $J_{km}$ , осредненное по ориентации  $\omega_k, \omega_m$  и положениям  $x_m$  на сфере радиуса  $|r| = |x_k - x_m|$  с центром в  $x_k$ . Ввиду независимости ориентаций  $\omega_k, \omega_m$  имеет место равенство  $\langle J_{km} \rangle_{km} = \langle J_{km} \rangle_{mk}$ ; нужно учесть также, что  $\langle S \rangle_{km} = 0$ .

**4. Построение корреляционной функции эффективного поля.** Для оценки моментов  $\sigma^-(x)$  зададим структуру композитной среды с помощью бинарной функции распределения  $\varphi(x_m, \omega_m | x_k, \omega_k)$  вероятного расположения  $m$ -го включения во множества  $X$  при фиксированном  $k$ -м включении. В некоторой окрестности  $v_k'$  с характеристической функцией  $V_k'$  области  $v_k'$  имеет место равенство  $\varphi(x_m, \omega_m | x_k, \omega_k) = 0$ . В достаточно общем случае  $v_k'$  гомогенна  $v_k$  [6], но, чтобы воспользоваться центральной симметрией задачи, будем считать область  $v_k'$  шаровой. Если множество включений однородно в пространстве, то  $\varphi$  зависит только от разности  $|r| = |x_k - x_m|$  и

$$\varphi(x_m, \omega_m | x_k, \omega_k) = \psi(\omega_m) f(|r|), \quad f(|r|) = g(|r|) \text{mes}^{-1} W \quad (4.1)$$

Из условия нормировки  $\langle \psi(\omega_m) \rangle_m = 1$ , где  $\langle \cdot \rangle_m$  означает осреднение по ориентациям  $m$ -го включения,  $g(|r|) = 0$  при  $x \in v_k'$  и  $g(|r|) \rightarrow n$  при  $|r| \rightarrow \infty$ , где  $n$  — счетная концентрация включений — связана с объемной концентрацией включений  $c = \frac{4}{3} \pi \langle a_1 a_2 a_3 n \rangle$ . Осредним (2.3) на множестве

$X(\cdot | x_k, \omega_k)$  с помощью функции  $\varphi$ :

$$\sigma^1(x) = \sigma^\circ + \int \Gamma(x-x') \{ \langle B(x') M_1(x') \sigma^-(x') V(x', x) \rangle - \langle R \rangle \sigma^1(x') \} dx' \quad (4.2)$$

где для  $n$ -точечных и первых моментов эффективного поля приняты обозначения

$$\begin{aligned} & \sigma^n(x_1, \dots, x_n | x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_m) \equiv \\ & \equiv \langle \sigma^-(x_1) \otimes \dots \otimes \sigma^-(x_n) | x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_m \rangle \\ \sigma^2(x_1 | x_2) & \equiv \sigma^2(x_1, x_2 | x_1; x_2), \quad E(x_1 | x_2) \equiv \sigma^1(x_1 | x_1; x_2) \\ D(x_1 | x_2) & \equiv \sigma^2(x_1, x_2 | x_1; x_2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$D_\infty(x_1) \equiv \lim_{|x_1 - x_2| \rightarrow \infty} D(x_1 | x_2), \quad E_\infty(x_1) \equiv \sigma^1(x_1) = \lim_{|x_1 - x_2| \rightarrow \infty} \sigma^1(x_1 | x_1; x_2)$$

при условии  $x_1, \dots, x_m \in X$ ,  $m \geq n$ ;  $\otimes$  — знак тензорного произведения.

Для замыкания (4.2) достаточно принять приближение  $\sigma^1(x' | x'; x) = \sigma^1 = \text{const}$ , тогда из (4.2) найдем

$$\sigma^1 = \sigma^0 + L_0 P_0 L_0 \langle R \rangle \sigma^1, \quad \sigma^1 = (I - L_0 P_0 L_0 \langle R \rangle)^{-1} \sigma^0 \quad (4.4)$$

что совпадает с результатом [3].

Следующее приближение  $\sigma^1$  строим с помощью  $E(x' | x)$  (4.3), найденного для двух фиксированных включений

$$\begin{aligned} E(x_1 | x_2) & = \sigma^0 + \int \Gamma(x_1 - x') \{ \langle B(x') M_1(x') \sigma^-(x') V(x'; x_1) | x', x_2; x_1 \rangle - \\ & - \langle R \rangle \sigma^1(x') \} dx' \end{aligned} \quad (4.5)$$

замкнуть которое можно при любом из предположений

$$\begin{aligned} & \langle B(x') M_1(x') \sigma^-(x') V(x'; x_1) | x', x_2; x_1 \rangle = \\ & = \langle B(x') M_1(x') \sigma^-(x') V(x'; x_1) | x'; x_2 \rangle \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} & \langle B(x') M_1(x') \sigma^-(x') V(x'; x_1) | x', x_2; x_1 \rangle = \\ & = \langle B(x') M_1(x') \sigma^-(x') V(x'; x_1) | x'; x_1 \rangle \end{aligned} \quad (4.7)$$

Для вычисления вторых моментов  $\sigma^2$ ,  $D$  домножим (2.3) тензорно на  $\sigma^-(x_2)$  и  $\sigma^-(x_1)$  соответственно, а результат осредним при условии  $x_1, x_2 \in X$ :

$$\begin{aligned} \sigma^2(x_1 | x_2) & = \sigma^0 \otimes E(x_2 | x_1) + \int \Gamma(x_1 - x') \{ \langle B(x') M_1(x') \sigma^-(x') \otimes \sigma^-(x_2) \times \\ & \times V(x'; x_1) | x', x_2; x_1 \rangle - \langle R \rangle \sigma^1(x') \otimes E(x_2 | x') \} dx' \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} D(x_1 | x_2) & = \sigma^0 \otimes E(x_1 | x_2) + \int \Gamma(x_1 - x') \{ \langle B(x') M_1(x') \sigma^-(x') \otimes \sigma^-(x_1) \times \\ & \times V(x'; x_1) | x', x_2; x_1 \rangle - \langle R \rangle \sigma^1(x') \otimes E(x_1 | x') \} dx' \end{aligned} \quad (4.9)$$

Зависимости (4.8), (4.9) замыкаются с помощью выражений для  $\sigma^2$ , аналогичных (4.6), (4.7). В уравнениях (4.5), (4.8), (4.9) для определенности примем предположение типа (4.7) и выделим в правых частях слагаемые с  $x' = x_2$  при помощи равенства  $V(x'; x_1) = V(x'; x_1, x_2) + V(x_2)$ :

$$E(x_1 | x_2) = \sigma^0 + \Gamma(x_1 - x_2) [R_2 E(x_2 | x_1) - v_2^{-1} f(|r|) \langle B_2 M_1^{(2)} \sigma^-(x_2) | x_1; x_2 \rangle] + \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} & + \int \Gamma(x_1 - x') \{ \langle B(x') M_1(x') \sigma^-(x') V(x'; x_1) | x'; x_1 \rangle - \langle R \rangle \sigma^1(x') \} dx' \\ \sigma^2(x_1 | x_2) & = \sigma^0 \otimes E(x_2 | x_1) + \Gamma(x_1 - x_2) [R_2 D(x_2 | x_1) - \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$- v_2^{-1} f(|r|) \langle B_2 M_1^{(2)} \sigma^-(x_2) \otimes \sigma^-(x_2) | x_1; x_2 \rangle] +$$

$$\begin{aligned} & + \int \Gamma(x_1 - x') \{ \langle B(x') M_1(x') \sigma^-(x') \otimes \sigma^-(x_2) V(x'; x_1) | x'; x_1 \rangle - \\ & - \langle R \rangle \sigma^1(x') \otimes E(x_2 | x') \} dx' \end{aligned}$$

$$D(x_1|x_2) = \sigma^0 \otimes E(x_1|x_2) + \Gamma(x_1-x_2) [R_2 \sigma^2(x_1|x_2) - \quad (4.12)$$

$$-v_2^{-1} f(|r|) \langle B_2 M_1^{(2)} \sigma^-(x_1) \otimes \sigma^-(x_2) | x_1; x_2 \rangle ] +$$

$$+ \int \Gamma(x_1-x') \{ \langle B(x') M_1(x') \sigma^-(x') \otimes \sigma^-(x_1) V(x'; x_1) | x'; x_1 \rangle - \\ - \langle R \rangle \sigma^1(x') \otimes E(x_1|x') \} dx'$$

Поскольку при  $|x'-x_1|, |x'-x_2| \rightarrow \infty$  корреляция между напряжениями на включениях отсутствует, то интегралы в формулах (4.10)–(4.12) абсолютно сходятся. Заметим, что в (4.10)–(4.12)  $\langle B(x') M_1(x') \sigma^-(x') \rangle \times \langle V(x'; x_1) | x'; x_1 \rangle \neq \langle B M_1 \rangle E(x'|x_1)$  и так далее;  $v_2^{-1} = \text{mes } v_2$ .

Для конкретизации выражений  $E, \sigma^2, D$  воспользуемся второй гипотезой при  $n=2$  и формулами (3.4), (3.5):

$$E(x_1|x_2) = \langle J_{12} \checkmark \rangle, \quad \sigma^2(x_1|x_2) = \langle J_{12} \checkmark \otimes J_{21} \checkmark \rangle, \quad D(x_1|x_2) = \langle J_{12} \checkmark \otimes J_{12} \checkmark \rangle \quad (4.13)$$

где  $J_{12} \checkmark$  определено по аналогии  $J_{12}$  (3.5) с заменой  $\sigma^0(x_1), \sigma^0(x_2)$  на компоненты случайного эффективного поля  $\sigma_{12} \checkmark(x_1), \sigma_{12} \checkmark(x_2)$ , в котором находится фиксированная пара включений  $v_1, v_2$ . Из общих соображений следует, что поле  $\langle \sigma_{12} \checkmark \rangle$  определяется средним влиянием остальных включений и поэтому зависит от вектора  $x_2-x_1$ , имеет симметрию эффективного модуля и не зависит от модулей  $L_1^{(1)}, L_1^{(2)}$ :

$$\langle \sigma_{12} \checkmark(x_1) \rangle = \langle \sigma_{12} \checkmark(x_2) \rangle = \langle \sigma_{12} \checkmark(x_2-x_1) \rangle, \quad \langle \sigma_{12} \checkmark^2(x_1) \rangle = \langle \sigma_{12} \checkmark^2(x_2) \rangle = \\ = \langle \sigma_{12} \checkmark^2(x_2-x_1) \rangle$$

Так как включения не пересекаются, то  $\langle \sigma_{12} \checkmark \rangle$  зависит, вообще говоря, от размеров и формы рассматриваемой пары  $v_1, v_2$ . При  $|x_1-x_2| \rightarrow \infty$  корреляция между напряжениями на включениях отсутствует  $\langle \sigma_{12} \checkmark(x_1) \rangle \otimes \langle \sigma_{12} \checkmark(x_2) \rangle \rightarrow \langle \sigma_{12} \checkmark(\infty) \rangle \otimes \langle \sigma_{12} \checkmark(\infty) \rangle$ . Поскольку результаты п. 3 обобщаются на любое конечное число включений, то можно получить выражения для  $n$ -точечных моментов поля  $\sigma^-$ , выраженных через поля  $\sigma_{1, \dots, n} \checkmark$  по аналогии с (4.13). Подставляя (4.13) в (4.10)–(4.12), найдем

$$\langle \sigma_{12} \checkmark(x_1) \rangle + v_2^{-1} f(|r|) \langle J_{12} \checkmark - \sigma_{12} \checkmark(x_1) \rangle = \sigma^0 + \int \{ H(|x_3-x_1| - \quad (4.14)$$

$$-a_0^{(1)} - \bar{a}_0^{(3)}) \langle J_{13} \checkmark - \sigma_{13} \checkmark(x_1) \rangle - \Gamma(x_1-x_3) \langle R_3 \rangle_3 \sigma^{-1}(x_3) \} dx_3$$

$$\langle \sigma_{12} \checkmark(x_1) \otimes J_{21} \checkmark \rangle + v_2^{-1} f(|r|) \langle (J_{12} \checkmark - \sigma_{12} \checkmark(x_1)) \otimes J_{21} \checkmark \rangle = \sigma^0 \otimes \langle J_{21} \checkmark \rangle + \quad (4.15)$$

$$+ \int \{ H(|x_3-x_1| - a_0^{(1)} - \bar{a}_0^{(3)}) (\langle J_{23} \checkmark \otimes J_{23} \checkmark \rangle - \langle \sigma_{13} \checkmark(x_3) \otimes J_{23} \checkmark \rangle) - \\ - \Gamma(x_1-x_3) \langle R_3 \rangle_3 \sigma^{-1}(x_3) \otimes \langle J_{12} \checkmark \rangle \} dx_3$$

$$\langle \sigma_{12} \checkmark(x_1) \otimes J_{12} \checkmark \rangle + v_2^{-1} f(|r|) \langle (J_{12} \checkmark - \sigma_{12} \checkmark(x_1)) \otimes J_{12} \checkmark \rangle = \sigma^0 \otimes \langle J_{12} \checkmark \rangle + \quad (4.16)$$

$$+ \int \{ H(|x_3-x_1| - a_0^{(1)} - \bar{a}_0^{(3)}) (\langle J_{13} \checkmark \otimes J_{13} \checkmark \rangle - \langle \sigma_{13} \checkmark(x_1) \otimes J_{13} \checkmark \rangle) - \\ - \Gamma(x_1-x_3) \langle R_3 \rangle_3 \sigma^{-1}(x_3) \otimes \langle J_{13} \checkmark \rangle \} dx_3$$

где  $H(|y|-a)$  – функция Хевисайда;  $\bar{a}_0^{(h)} = \min_i a_i^{(h)}$ ,  $a_0^{(h)} = \max_i a_i^{(h)}$ ; в (4.14)  $v_2^{-1} f(|r|) \ll 1$ .

Решение интегральных уравнений (4.14)–(4.16) может быть проведено численно методом последовательных приближений; при этом (4.14) решают независимо и решение подставляют в совместно решаемые уравнения (4.15), (4.16).

Явные выражения для первых и вторых моментов  $\sigma_{12}^{-1}(x_1) \equiv \langle \sigma_{12} \checkmark(x_1) \rangle$ ,  $\sigma_{12}^{-2}(x_1-x_2) \equiv \langle \sigma_{12} \checkmark(x_1) \otimes \sigma_{12} \checkmark(x_2) \rangle$ ,  $D \equiv \langle \sigma_{12} \checkmark(x_1) \otimes \sigma_{12} \checkmark(x_1) \rangle$  удается получить в предположении  $\bar{a}_0^{(h)} = a_0^{(h)} = a \sqrt{k}$ ,  $\sigma_{12}^{-1}(x_1) = \sigma_{12}^{-1}(x_2) = \sigma^{-1} = \text{const}$ ,  $D = \text{const}$ ,  $\sigma_{12}^{-2}(x_1-x_2) = \sigma^{-1} \otimes \sigma^{-1}$ , последнее равенство не означает отсутствие корреляции между напряжениями на включениях  $v_1, v_2$ . Из (4.14)

при  $|x_1 - x_2| \rightarrow \infty$  найдем (с учетом  $S(|r|) = 0$  при  $|r| < 2a$ ):

$$\sigma^{-1} = \left( I - \int \left\{ \left\langle \left\langle \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^1 (SR_3 SR_1)^i (SR_3)^j \right\rangle \right\rangle_{13} - I - \Gamma(x_1 - x_3) \langle R_3 \rangle_3 \right\} dx_3 \right)^{-1} \sigma^{\circ} \quad (4.17)$$

Подставляя выражения для  $J_{12}^{\sim}$  (3.5) в (4.16) при  $|x_1 - x_2| \rightarrow \infty$ , получим

$$D^{\sim} = \sigma^{\circ} \otimes \sigma^{-1} + \int \left[ \langle SR_3 \sigma^{\sim}(x_3) \otimes \sigma^{\sim}(x_1) + SR_3 SR_1 \sigma^{\sim}(x_1) \otimes \sigma^{\sim}(x_1) + \right. \\ \left. + SR_3 SR_1 \sigma^{\sim}(x_1) \otimes SR_3 SR_1 \sigma^{\sim}(x_1) + SR_3 SR_1 SR_3 \sigma^{\sim}(x_3) \otimes \sigma^{\sim}(x_1) + \right. \\ \left. + SR_3 SR_1 SR_3 \sigma^{\sim}(x_1) \otimes \sigma^{\sim}(x_1) \right]_{13} - \Gamma(x_1 - x_3) \langle R_3 \rangle_3 \sigma^{\sim} \otimes \sigma^{-1} dx_3 \quad (4.18)$$

где использовано  $\langle SR_3 \rangle_{13} = 0$ ; в (4.18) для сокращения выкладок опущены члены, убывающие на бесконечности быстрее  $|x_3 - x_1|^{-15}$ , и выписаны только убывающие на бесконечности не быстрее  $|x_3 - x_1|^{-12}$ . Из (4.18) с учетом отсутствия корреляций между  $\sigma^{\sim}(x_1)$  и  $\sigma^{\sim}(x_2)$  найдем

$$D^{\sim} = \left\{ \sigma^{\circ} \otimes \sigma^{-1} + \int \left[ \langle SR_3 \rangle_{13} \sigma^{-1} \otimes \sigma^{-1} + \langle SR_3 SR_1 SR_3 \rangle_{13} \sigma^{-1} \otimes \sigma^{-1} - \right. \right. \\ \left. \left. - \Gamma(x_1 - x_3) \langle R_3 \rangle_3 \sigma^{-1} \otimes \sigma^{-1} \right] dx_3 \right\} \left\{ I \otimes I - \int \left[ \langle SR_3 SR_1 \rangle_{13} \otimes I + \right. \right. \\ \left. \left. + \langle SR_3 SR_1 \rangle_{13} \otimes \langle SR_3 SR_1 \rangle_{13} + \langle SR_3 SR_1 SR_3 SR_1 \rangle_{13} \otimes I \right] dx_3 \right\}^{-1} \quad (4.19)$$

или, подставляя (4.17) в (4.19)

$$D^{\sim} - \sigma^{-1} \otimes \sigma^{-1} = \int \langle SR_3 SR_1 \rangle_{13} \sigma^{-1} \otimes \langle SR_3 SR_1 \rangle_{13} \sigma^{-1} dx_3 \times \\ \times \left\{ I \otimes I - \int \left[ \langle SR_3 SR_1 \rangle_{13} \otimes I + \langle SR_3 SR_1 \rangle_{13} \otimes \langle SR_3 SR_1 \rangle_{13} + \right. \right. \\ \left. \left. + \langle SR_3 SR_1 SR_3 SR_1 \rangle_{13} \otimes I \right] dx_3 \right\}^{-1} \quad (4.20)$$

В (4.19), (4.20) приняты обозначения  $\{A_1 \otimes A_2\} \{A_3 \otimes A_4\} = (A_1 A_3) \otimes (A_2 A_4)$ ,  $A_3 \otimes A_4 = \{A_5 \otimes A_6\}^{-1}$ .

Аналогично находятся моменты более высокого порядка и центральные моменты. При предположениях, использованных в выводе (4.17), (4.20), могут быть найдены корреляционные функции  $E(x_1 | x_2)$ ,  $\sigma^{-2}(x_1 | x_2)$ ,  $D(x_1 | x_2)$  подстановкой (4.17), (4.20) в (4.13), при этом  $\sigma^{-1}$ ,  $D(\infty)$  совпадает с  $\sigma^{-1}(\infty)$ ,  $D^{\sim}(\infty)$ . Для вычисления второго момента поля напряжений  $\sigma$  в композите тензорно умножим значения  $\sigma(x)$ , взятые в различных точках  $x_1$ ,  $x_2$  и выраженные через корреляционные функции полей  $\sigma^{-}$ ,  $\sigma^{\sim}$  (2.2), (4.13). Осредняя результаты по возможным реализациям множества  $X$ , найдем

$$\langle \sigma(x_1) \otimes \sigma(x_2) \rangle = \langle B_1 J_{12}^{\sim} \otimes B_2 J_{21}^{\sim} \rangle \quad (4.21)$$

т. е. корреляция между напряжениями на включениях  $v_1$ ,  $v_2$  имеет место, несмотря на отсутствие корреляции между  $\sigma^{\sim}(x_1)$  и  $\sigma^{\sim}(x_2)$ .

Для соотношения  $\sigma^{\circ} = L^* \langle \varepsilon \rangle$  по найденному  $\sigma^{-1}$  (4.17) легко определить зависимость для эффективного модуля

$$L^* = L_0 (I + L_0 \langle R \rangle E)^{-1}, \quad \sigma^{-1} = E \sigma^{\circ} \quad (4.22)$$

**5. Пример.** Рассмотрим случай изотропных шаровых включений одного размера в изотропной матрице. Примем точечное приближение включений (3.6) и ограничимся тремя членами ряда  $\langle J_{12}^{\sim} \rangle_{12} = (J^{\circ} + I) \sigma^{-1}(x_1) \equiv \equiv (\langle SR_2 SR_1 \rangle_{12} + I) \sigma^{-1}(x_1)$ , где учтено, что  $\langle S \rangle_{12} = 0$ , т. е. пренебрежем членами, убывающими на бесконечности, как  $|r|^{-9}$  по сравнению с членами, убывающими на бесконечности, как  $|r|^{-6}$ . В [4] показано, что для изотроп-

ных матрицы и шаровых включений тензор  $J^\circ$  также изотропен  $J^\circ = J_1^\circ N_1 + J_2^\circ N_2$ , где

$$N_{1ijkl} = 1/3 \delta_{ij} \delta_{kl}, \quad N_{2ijkl} = 1/2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - 2/3 \delta_{ij} \delta_{kl})$$

$$J_1^\circ = 12 \xi (\eta + \gamma) (3k^\sim) (2\mu^\sim) a^6 / |r|^6$$

$$J_2^\circ = 2/5 [(\eta + \gamma) \{6\xi (3k^\sim) + 2\eta (2\mu^\sim)\} + (2\mu^\sim) (28\gamma^2 - \eta^2)] (2\mu^\sim) a^6 / |r|^6$$

$$3k^\sim = (k_0 + \bar{k}_0) / (k_0 + k_1 + \bar{k}_0), \quad 2\mu^\sim = (\mu_0 + \bar{\mu}_0) / (\mu_0 + \mu_1 + \bar{\mu}_0)$$

$$\bar{k}_0 = 4/3 \mu_0, \quad \bar{\mu}_0 = 3/2 (1/\mu_0 + 10/(9k_0 + 8\mu_0))^{-1}$$

$$\xi = k_1 / (3k_0 + 4\mu_0), \quad \eta = \mu_1 / 3\mu_0, \quad \gamma = -\mu_1 (3k_0 + \mu_0) / [3\mu (3k_0 + 4\mu_0)]$$

$a$  — радиус включений;  $L_i = 3k_i N_1 + 2\mu_i N_2$ ,  $i=0, 1$ . Из (4.17), (3.6) получим  $\sigma^{-1} = E \sigma^\circ$ ,  $E = E_1 N_1 + N_2 N_2$ ,  $E_1 = \{1 - [3k^\sim (1 + k_1/k_0)] c - J_1\}$ ,  $E_2 = \{1 - [1 - 2\mu^\sim \times$

$\times (1 + \mu_1/\mu_0)] c - J_2\}^{-1}$ ,  $J_i = 4\pi \int_{2a}^{\infty} J_i^\circ |r|^2 g(|r|) d|r|$ ,  $L^* = 3k^* N_1 + 2\mu^* N_2$ ,  $k^* = -k_0 (1 - 3k^\sim E_1 k_1/k_0)^{-1}$ ,  $\mu^* = \mu_0 (1 - 2\mu^* c E_2 \mu_1/\mu_0)^{-1}$ .

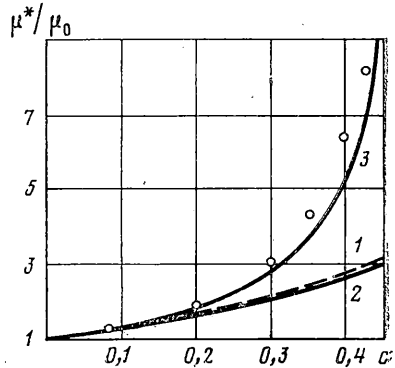
Центральный момент второго порядка равен  $D^\circ - \sigma^{-1} \otimes \sigma^{-1} = D^\circ \sigma^{-1} \otimes \sigma^{-1}$ , где  $D^\circ$  выражается через тензорное произведение  $N_1, N_2$ :

$$D^\circ = D_{11}^\circ N_1 \otimes N_1 + D_{12}^\circ N_1 \otimes N_2 + D_{21}^\circ N_2 \otimes N_1 + D_{22}^\circ N_2 \otimes N_2$$

$$D_{ij}^\circ = (1 - J_i - D_{ij})^{-1} D_{ij}, \quad D_{ij} = 4\pi \int_{2a}^{\infty} J_i^\circ J_j^\circ |r|^2 g(|r|) d|r|$$

при вычислении  $D_{ij}$  пренебрегли членами порядка  $|r|^{-15}$  по сравнению с  $|r|^{-12}$ .

Правомерность принятых в работе допущений может быть проверена косвенно, путем сравнения с экспериментом по изменению эффективной вязкости  $\eta^*$  суспензий со сферическими включениями одинакового размера [9] (фигура) при нулевой скорости сдвига, когда неньютоновскими эффектами можно пренебречь и имеет место формальная аналогия с композицией из несжимаемой матрицы и жестких сферических включений  $\mu_i = k_0 = \infty$ ,  $k_1 = 0$ ,  $\mu^* = \eta^*$ . Принимая  $g(|r|) = n$ , найдем  $J_1^\circ = 0$ ,  $J_2^\circ = 15a^6 / (2|r|^6)$ ,  $E_1 = 1$ ,  $E_2 = (1 - 15c/16)^{-1}$ ,  $\mu^*/\mu_0 = 1 + 5/2c (1 - 31/16c)^{-1}$ . Заметим, что полученные формулы переходят в аналогичные зависимости [1-3] при  $J_2^\circ = 0$ , т. е. когда используется допущение  $E(x_1/x_2) = \sigma^{-1}(x_1)$  [8]. Полученные ранее зависимости  $\mu^*/\mu_0 = 1 + 5/2c + 155c^2/49$  [4],  $\mu^*/\mu_0 = 1 + 5c/[2(1-c)]$  [8] (кривые 1, 2 соответственно) предсказывают существенно более низкие значения  $\mu^*$  с ростом  $c$  по сравнению с предложенной  $\mu^*/\mu_0 = 1 + 5/2c (1 - 31/16c)^{-1}$  (кривая 3) [10], что не согласуется с экспериментом (кружочки на фигуре). Рассчитанные по методу сингулярного приближения [5] значения  $\mu^*/\mu_0$  в данном случае совпадают с результатами [8].



В другом частном случае шаровых пор в несжимаемой матрице [11]  $k_1 = -k_0$ ,  $\mu_1 = -\mu_0$ ,  $k_0 = \infty$  получим  $E_1 = (1 - 29/24c)^{-1}$ ,  $E_2 = (1 - 35/24c)^{-1}$ ,  $D_{11} = 1,57 \cdot 10^{-3} c$ ,  $D_{12} = D_{21} = 3,44 \cdot 10^{-3} c$ ,  $D_{22} = 4,36 \cdot 10^{-3} c$ ; по данным работы [3]  $E_i = (1 - c)^{-1}$ ,  $i=1, 2$ . Заметим, что учет пяти, а не трех членов ряда в разложении  $J_{12}^\circ$  приводит к выражению  $E_1 = (1 - 1,263c)^{-1}$ , которое отличается от  $E_1 = (1 - 29/24c)^{-1}$  при  $c=0,4$  на 4,3%.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Канаун С. К. Метод эффективного поля в линейных задачах статике композитной среды.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 4, с. 655–665.
2. Канаун С. К. Корреляционная функция поля напряжений в упругой среде с точечными дефектами.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 4, с. 652–661.
3. Левин В. М. О концентрации напряжений на включениях в композитных материалах.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 4, с. 735–743.
4. Willis J. R., Acton J. R. The overall elastic moduli of a dilute suspension of spheres.— Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1976, v. 29, pt. 2, p. 163–177.
5. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
6. Гандельсман М. И., Будтов В. П. Концентрация термических напряжений на включениях в матричных композитах.— Механика композитн. материалов, 1982, № 4, с. 593–600.
7. Кунин И. А., Соснина Э. Г. Концентрация напряжений на эллипсоидальной неоднородности в анизотропной упругой среде.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 2, с. 306–315.
8. Левин В. М. К определению упругих и термоупругих постоянных композитных материалов.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 6, с. 137–145.
9. Krieger I. M. Rheology of monodisperse latices.— Adv. Colloid and Interface Sci., 1972, v. 3, № 2, p. 111–136.
10. Буряченко В. А., Липанов А. М. Концентрация напряжений на эллипсоидальных включениях и эффективные термоупругие свойства композитных материалов.— Прикл. механика, 1986, № 11, с. 105–111.
11. Буряченко В. А., Липанов А. М. Уравнение механики газонасыщенных пористых сред.— ПМТФ, 1986, № 4, с. 106–109.

Москва

Поступила в редакцию  
27.V.1985