

УДК 539.3

ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ

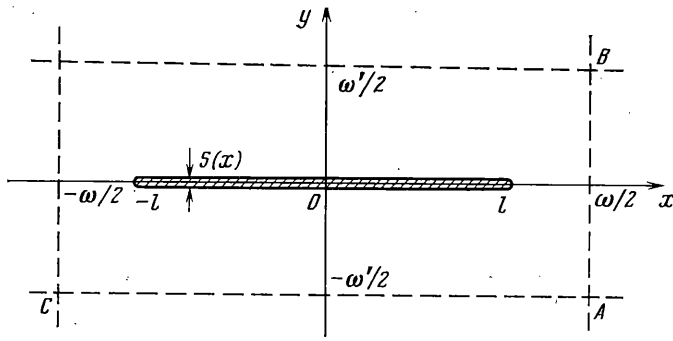
КОБЕЛЕВ В. В.

Предлагается новая постановка задач оптимизации внутренней структуры линейно-армированных композиционных материалов. Исследованы некоторые проблемы, связанные с минимизацией максимальных напряжений в армирующих волокнах и минимизацией массы силового материала при ограничениях на величины эффективных модулей упругости. Принята модель композиционного материала, в которой композит представляет собой упругую изотропную (или ортотропную) среду (матрицу), подкрепленную двоякопериодически расположенными упругими армирующими включениями переменного сечения. Эффективные модули среды определяются методом приведения [1]. Показано, что в рассматриваемой модели усредненные модули упругости эффективно ортотропного материала связаны между собой алгебраическими зависимостями, и поэтому достаточно учитывать ограничение на величину одной из упругих постоянных. Выведены условия оптимальности и сопряженные уравнения в задаче минимизации массы армирующего материала и установлено, что эти уравнения удовлетворяются тождественно, если напряжения постоянны вдоль волокна, т. е. армирующие волокна равнонапряжены. В этом случае интегриродифференциальное уравнение типа Прандтля, описывающее распределение напряжений в волокнах произвольного поперечного сечения, сводится к сингулярному интегральному уравнению, возникающему при изучении краевой задачи теории упругости в перемещениях для плоскости, ослабленной двоякопериодической системой разрезов. Существование решения и методы поиска решения такого уравнения известны [2]. Найдены точные решения задачи оптимизации в предельных случаях, когда один из периодов много больше другого. В приближении изолированных неоднородностей включение представляет собой эллипс, сильно вытянутый вдоль оси (иглу). Доказано, что максимум интенсивности напряжений по длине волокна достигает при этом минимального значения. В случае, когда матрица ортотропная, найдено точное решение задачи оптимизации в двоякопериодическом случае. Полученные формулы могут быть использованы при определении предельных значений эффективных жесткостей и прочности волокнистых композитов.

1. Основные уравнения модели волокнистого композита и постановка задачи оптимизации. Рассмотрим отдельный монослой слоисто-волокнистого материала (фиг. 1). Композит представляет собой упругую изотропную матрицу толщины h с включениями в виде тонких вытянутых прямолинейных волокон с переменной площадью сечения $S(x)$ и длины $2l$, расположенных в шахматном (двоякопериодическом) порядке. Основные периоды в плоской области, занимаемой композитным материалом, обозначим ω и $i\omega'$ ($\text{Im } \omega = \text{Im } \omega' = 0$, $\omega\omega' = D$). Модуль упругости волокна E_f существенно превосходит по величине модуль сдвига G и модуль упругости $E = 2G(1+\nu)$ матрицы, так что волокно можно считать обладающим конечной сосредоточенной жесткостью на растяжение [1, 3]. Обозначим через $\tau(x)$ касательное усилие взаимодействия матрицы с включением, отнесенное к единице длины волокна, действующее на границе раздела сред. Через $\sigma(x)$ обозначим напряжение в волокне

$$\sigma(x) = \frac{1}{S(x)} \int_{-l}^x \tau(y) dy \quad (1.1)$$

Передача нагрузки через торцы волокон отсутствует: $S\sigma(-l) = S\sigma(l) = 0$. Усилие взаимодействия $\tau(x)$ определяется из сингулярного интегро-



Фиг. 1

дифференциального уравнения типа Прандтля [1]:

$$\int_{-l}^l K(x-y) \tau(y) dy + \alpha S^{-1}(x) \int_x^l \tau(y) dy + \beta \int_{-l}^l y \tau(y) dy = -1/2(\sigma_1 - \nu \sigma_2) \pi (1 + \kappa)^2 \quad (1.2)$$

$$K(x) = (1 - 2\kappa) \zeta(x) - xP(x) + P_1(x)$$

$$\alpha = 4\pi h G (1 + \kappa) E_f^{-1}, \quad \kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$$

$$\beta = 1/2 \pi (1 + \kappa)^2 D^{-1} - 2(2\kappa - 1) \omega^{-1} \zeta(\omega/2) + 2\omega^{-1} P_1(\omega/2) - P(\omega/2)$$

Здесь $\zeta(x)$ — дзета-функция, $P(x)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, а $P_1(x)$ — специальная мероморфная функция, введенная в [4]:

$$P_1(z) = \sum \left\{ \frac{\bar{p}}{(z-p)^2} - \frac{2z\bar{p}}{p^3} - \frac{\bar{p}}{p^2} \right\}, \quad p = m\omega + n\omega'$$

где суммирование ведется по всем возможным парам целых чисел m и n , исключая пару $m=0, n=0$. Все функции ζ, P, P_1 в рассматриваемом случае прямоугольной ячейки периодов принимают на действительной оси вещественные значения. Правая часть уравнения (1.2) выражается через средние напряжения в матрице σ_1 и σ_2 , которые определяются по формулам: $\sigma_1 = X/\omega', \sigma_2 = Y/\omega$, где X — проекция на ось x главного вектора сил, действующих на отрезок AB , Y — проекция на ось y главного вектора сил, действующего на отрезок AC . Исключая усилия взаимодействия $\tau(x)$ в (1.2) через (1.1) получаем уравнение относительно $\sigma(x)$:

$$\alpha \sigma(x) + \beta \int S \sigma(y) dy - \int K(x-y) (S \sigma)_y dy = 1/2(\sigma_1 - \nu \sigma_2) (1 + \kappa)^2 \pi \quad (1.3)$$

Здесь и в дальнейшем, если явно не указаны пределы интегрирования, все интегралы вычисляются на отрезке $-l \leq x \leq l$.

Вычисляя главные векторы сил, действующие на стороны прямоугольника, и смещения в точках A, B, C (фиг. 1) через функции напряжений плоской задачи теории упругости, можно определить деформации и выразить их через компоненты напряжения

$$e_1 = E^{-1}(\sigma_1 + AD^{-1} - \nu \sigma_2), \quad e_2 = E^{-1}(\sigma_2 - \nu \sigma_1 - \nu AD^{-1}), \quad e_{12} = 1/2 \tau_{12} G^{-1},$$

$$A = - \int y \tau(y) dy \quad (1.4)$$

Из (1.1)–(1.2) следует, что величина A является линейной функцией σ_1 и σ_2 . Преобразуя выражение A из (1.4) по частям и используя (1.1), получим $A = (\sigma_1 - \nu \sigma_2) a$, $a = \int S t dy$, где $t(x)$ — решение уравнения

$$\int K(x-y) (S t)_y dy - a t(x) + \beta \int S t dy = 1/2 (1 + \kappa)^2 \pi$$

Итак, среда ведет себя как эффективно ортотропная с модулями упругости

$$\begin{aligned} E_1^e &= E(1-aD^{-1})^{-1}, & E_2^e &= E(1-v^2aD^{-1})^{-1} \\ v_{21}^e &= v, & E_2^e v_{12}^e &= E_1^e v_{21}^e \end{aligned} \quad (1.5)$$

Продольный и поперечный модули упругости в такой среде связаны соотношением $v^2/E_1^e - 1/E_2^e = (1-v^2)/E$. Значит, если один из модулей равен определенной константе (например, $E_1^e = E_1^0$), то величина другого модуля также фиксирована: $E_2^e = E_2^0 = [v^2/E_1^e + (v^2-1)/E]^{-1}$. Кроме того, эффективные модули являются строго возрастающими функциями величины a . Следовательно, любое ограничение снизу на величины упругих модулей $E_1^e \geq E_1^0$ или $E_2^e \geq E_2^0$ эквивалентно неравенству

$$a \geq a_0, \quad a_0 = D \max [1 - E/E_1^0, (1 - E/E_2^0)v^{-2}] \quad (1.6)$$

Сформулируем задачу оптимизации. Требуется отыскать такое распределение площади поперечного сечения волокна $S = S(x)$, $-l \leq x \leq l$, чтобы объем волокна был минимальный

$$I = \int S(x) dx \rightarrow \min_{S(x)} \quad (1.7)$$

а эффективные модули были не меньше заданных значений $E_1^e \geq E_1^0$, $E_2^e \geq E_2^0$, т. е. выполнялось неравенство (1.6). Очевидно, плотность композитной среды прямо пропорциональна массе волокна в одной ячейке, отнесенной к массе матрицы в этой ячейке $\rho^e = \rho + (\rho_f - \rho)\eta$, $\eta = I/Dh$, где ρ , ρ_f — плотности матрицы и волокна соответственно, η — концентрация армирующих волокон. Поэтому задача оптимизации (1.6), (1.7) имеет смысл снижения плотности композита при ограничениях на величину упругих постоянных.

2. Условия оптимальности и сопряженные уравнения. Прежде чем переходить к выводу условий оптимальности, установим необходимые для дальнейшего формулы перемены порядка интегрирования в повторном интеграле и формулу дифференцирования интеграла с ядром $K(x-y)$. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ таковы, что $u(x) \in L_p(-l, l)$, $v(x) \in L_p(-l, l)$, $p > 1$, $p' > 1$, т. е. существуют интегралы $\int |u(x)|^p dx < \infty$, $\int |v(x)|^{p'} dx < \infty$. Выделим сингулярную часть ядра $K(x-y)$, представив его в виде суммы: $K(x-y) = (x-y)^{-1} + k(x-y)$, $\iint |k(x-y)|^2 dx dy < \infty$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \int u(y) dy \int K(x-y) v(x) dx &= \int u(y) dy \int (x-y)^{-1} v(x) dx + \\ + \int u(y) dy \int k(x-y) v(x) dx &= \int v(x) dx \int (x-y)^{-1} u(y) dy + \\ + \int v(x) dx \int k(x-y) u(y) dy &= \int v(x) dx \int K(x-y) u(y) dy \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь использованы формулы замены порядка интегрирования в сингулярном интеграле с ядром Коши [5, 6] и теорема о замене переменных в двойном интеграле.

Установим правило дифференцирования интеграла по параметру. Пусть $u(x)$ непрерывна на отрезке $-l \leq x \leq l$, $u'(x) \in L_p(-l, l)$, $p > 1$, $u(l) = u(-l) = 0$, тогда

$$\frac{d}{dy} \int K(x-y) u(x) dx = \int K(x-y) u'(x) dx \quad (2.2)$$

Для доказательства выпишем цепочку равенств

$$\begin{aligned} (d/dy) \int [(x-y)^{-1} + k(x-y)] u(x) dx &= \int [(x-y)^{-1} u'(x) + \\ + (dk(x-y)/dy) u(x)] dx &= \int [(x-y)^{-1} u'(x) - u(x) dk(x-y)/dx] dx = \\ &= \int K(x-y) u'(x) dx \end{aligned}$$

При выводе были применены формулы дифференцирования интегралов с ядром Коши [6] и формулы интегрирования по частям.

Для вывода условий оптимальности воспользуемся методом множителей Лагранжа. С этой целью к функционалу (1.7) присоединим ограничения и уравнения равновесия

$$J = \int S(x) dx + \lambda \left[\int S \sigma dx - a_0 (\sigma_1 - \nu \sigma_2) \right] + \int \psi(x) \left[\int K(x-y) (S \sigma)_y dy + \alpha \sigma(x) + \beta \int S \sigma dy - 1/2 (\sigma_1 - \nu \sigma_2) \pi (1 + \kappa)^2 \right] dx$$

где $\psi(x)$ — сопряженная функция, λ — множитель Лагранжа ($\lambda=0$, если $a > a_0$, и $\lambda > 0$, если $a = a_0$). Вычислим вариацию расширенного функционала, обусловленную вариацией толщин $S(x)$ и напряжений $\sigma(x)$:

$$\delta J = \int \left\{ \delta S(x) + \lambda \sigma(x) \delta S(x) + \lambda S(x) \delta \sigma(x) + \right. \\ \left. + \psi(x) \int K(x-y) (\sigma \delta S + S \delta \sigma)_y dy + \alpha \psi(x) \delta \sigma(x) + \beta [S \delta \sigma + \sigma \delta S] \int \psi(y) dy \right\} dx$$

Воспользуемся формулой (2.1) о замене порядка интегрирования и полученную вариацию преобразуем по частям с учетом краевых условий $S \sigma(-l) = S \sigma(l) = \psi(-l) = \psi(l) = 0$:

$$\delta J = \int \delta S(x) \left\{ 1 + \sigma(x) \left[\lambda + \beta \int \psi(y) dy + \int K(x-y) \psi_y(y) dy \right] \right\} + \\ + \delta \sigma(x) \left\{ S(x) \left[\lambda + \beta \int \psi(y) dy + \int K(x-y) \psi_y(y) dy \right] + \alpha \psi(x) \right\} dx$$

Требование равенства нулю первой вариации расширенного функционала приводит к необходимым условиям оптимальности и сопряженным уравнениям

$$1 + \sigma(x) \left[\lambda + \beta \int \psi(y) dy + \int K(x-y) \psi_y(y) dy \right] = 0 \quad (2.3)$$

$$\alpha \psi(x) + S(x) \left[\lambda + \beta \int \psi(y) dy + \int K(x-y) \psi_y(y) dy \right] = 0 \quad (2.4)$$

Уравнения (1.3), (2.3) и (2.4) вместе с соответствующими краевыми условиями образуют замкнутую нелинейную краевую задачу относительно функций $\sigma(x)$, $S(x)$ и $\psi(x)$. Эту систему можно свести к одному интегральному уравнению. В самом деле, положим $\sigma(x) = \sigma_0$, $\psi(x) = S(x) (\alpha \sigma_0)^{-1}$, где σ_0 — постоянная, определяемая из изопериметрического условия (1.6). Тогда система уравнений (1.3), (2.3), (2.4) переходит в уравнение относительно $S(y)$:

$$\alpha + \beta I - \int K(x-y) S_y(y) dy = 1/2 \pi (1 + \kappa)^2 (\sigma_1 - \nu \sigma_2) \sigma_0^{-1} \quad (2.5)$$

Поясним смысл полученного результата. Необходимые условия оптимальности сводятся к постоянству напряжений вдоль волокна ($\sigma = \sigma_0$). Следовательно, и деформации в волокне будут постоянными, а перемещения — линейными функциями координаты x . Таким образом, эта задача сводится к краевой задаче для прямоугольника с заданными на части границы перемещениями, т. е. к первой (кинематической) краевой задаче. Итак, для нахождения оптимального распределения толщин армирующего волокна следует решить краевую задачу для перемещениях для плоскости с двоякопериодической системой разрезов при заданных на берегах разрезов перемещениях ($u^+ = u^- = \sigma_0 x / E_f$, $v^+ = v^- = 0$; u^+ , v^+ , u^- , v^- — соответственно перемещения в направлениях x и y на верхнем и нижнем берегах разрезов), вычислить касательные усилия $\tau(x)$ и, пользуясь (1.1) и условием $\sigma = \sigma_0$, получить функцию $S(x)$. Способ приближенного решения краевых задач для внешности двоякопериодической системы разрезов известен [2] и, следовательно, задача сведена к уже исследованной. В некоторых частных случаях можно получить и точные решения и сделать качественные выводы об оптимальной структуре материала.

3. Оптимальные формы слабозаимодействующих включений. Приведем выражения для эффективных модулей и оптимальные формы слабозаимодействующих включений. Предположим, что $\omega' \gg \omega$, и получим

асимптотическое выражение для функции $K(x)$ при $\omega \rightarrow \infty$. В этом случае функции $\zeta(x)$, $P(x)$ и $P_1(x)$ вырождаются в комбинации тригонометрических функций [7]:

$$\begin{aligned} xP(x) - P_1(x) &= \frac{1}{3}(\pi/\omega)^2 x + (\pi/\omega) \operatorname{ctg}(\pi x/\omega) \\ \zeta(x) &= \frac{1}{3}(\pi/\omega)^2 x + (\pi/\omega) \operatorname{ctg}(\pi x/\omega) \end{aligned} \quad (3.1)$$

и уравнение (1.3) принимает вид

$$-\frac{2\kappa\pi}{\omega} \int \operatorname{ctg} \frac{\pi(x-y)}{\omega} (S\sigma)_y dy + \alpha\sigma(x) = \frac{1}{2} \pi(1+\kappa)^2 (\sigma_1 - \nu\sigma_2)$$

Как показано в п. 2, условие оптимальности сводится к требованию равнонапряженности волокон. Вводя обозначения $\delta = 2\pi l/\omega$, $\chi = [2\alpha\sigma_0 - (\sigma_1 - \nu\sigma_2)(1+\kappa)^2 \pi] / 8\pi^2 \sigma_0 \kappa$ и переходя к безразмерным переменным $s = 2\pi x/\omega$, $t = 2\pi y/\omega$, перепишем уравнение (2.3) в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \operatorname{ctg} \frac{s-t}{2} S_i(t) dt = \chi \quad (3.2)$$

Найдем решение этого уравнения. Известна [8, 9] формула обращения интегрального оператора

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \operatorname{ctg} \frac{s-t}{2} \varphi(s) ds = \psi(t) \quad (3.3)$$

которая имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\cos t - \cos \delta}} \left\{ \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sqrt{\cos s - \cos \delta}}{\sin[(t-s)/2]} \frac{\psi(s)}{2\pi} ds + \sqrt{2} A \cos(t/2) \right\}$$

причем, если $\psi(t) = 1$, то $\varphi(t) = \sqrt{2} [\sin(t/2) + A \cos(t/2)] [\cos t - \cos \delta]^{-1/2}$.

Поскольку функция $S(t)$ — четная, а ее производная нечетная, то $A = 0$ и $S_i(t) = -\chi \sqrt{2} \sin(t/2) [\cos t - \cos \delta]^{-1/2}$ откуда

$$S(t) = \frac{1}{2} \chi \operatorname{Arch} [\cos(t/2) / \cos(\delta/2)] \quad (3.4)$$

Интегрируя (3.4), найдем объем включения [10]:

$$I = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} S(t) dt = -\frac{\omega\chi}{2} \ln \cos \frac{\pi l}{\omega} \quad (3.5)$$

Из (3.2) и (3.5) определяется напряжение в оптимальном волокне — оно равно постоянной величине $\sigma_0 = \pi(1+\kappa)^2 [2\alpha + 16l\pi^2 \kappa \omega^{-2} \ln^{-1} \cos(\pi l/\omega)]^{-1}$. Эффективные модули вычисляются по формулам (1.4), (1.5):

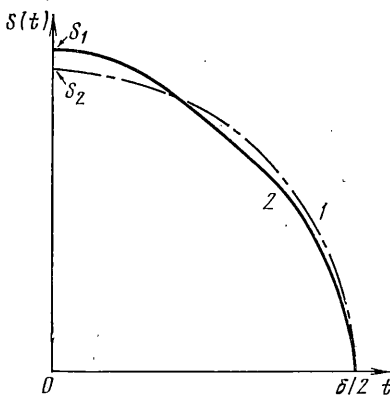
$$E_1^e = E[1 - \eta(1+\kappa)^2 g]^{-1}, \quad E_2^e = E[1 - \nu^2 \eta(1+\kappa)^2 g]^{-1} \quad (3.6)$$

$$g = \left[\frac{8G(1+\kappa)}{E_f} + \frac{16\pi\eta D\kappa}{\omega^2 \ln \cos(\pi l/\omega)} \right]^{-1} \quad (3.7)$$

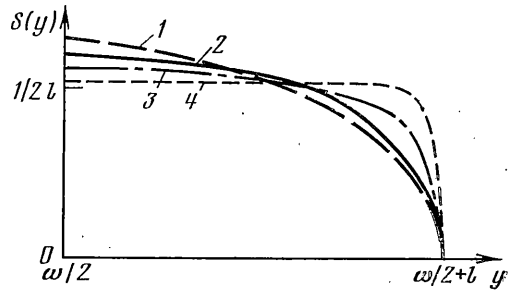
График функции (3.4) изображен на фиг. 2 сплошной линией. Толщина включения в точке $t=0$ равна $S_1 = \frac{1}{2} \chi \operatorname{Arch} [\cos^{-1}(\delta/2)]$. Аналогично можно найти точное решение и построить формы оптимальных включений и в другом предельном случае $\omega' \ll \omega$, однако для краткости это решение не приводится. Ограничимся лишь рассмотрением случая, когда $\omega \rightarrow \infty$, $\omega' \rightarrow \infty$. Это случай изолированного волокна, когда взаимодействием включений пренебрегается. Уравнение (1.3) принимает вид

$$\int (y-x)^{-1} (S\sigma)_y dy + \alpha\sigma(x) = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \nu\sigma_2)^2 \pi(1+\kappa)^2 \quad (3.8)$$

а выражения для эффективных модулей даются формулами (3.6), в которых следует положить $g = [8G(1+\kappa)E_f^{-1} + 32\eta D\kappa \pi^{-1} l^{-2}]^{-1}$. График функ-



Фиг. 2



Фиг. 3

ции $2^{-3/2}\chi\sqrt{\delta^2-t^2}$, дающей решение для изолированного волокна, показан на фиг. 2 штрихпунктирной линией. Через S_2 обозначена величина $2^{-3/2}\chi\delta$.

4. Снижение концентрации напряжений в изолированном включении. Изучим вопрос о пределах уменьшения максимальных напряжений в волокнах при ограничении на жесткость материала, т. е. величины эффективных модулей. Эта задача возникает в связи с проектированием композиционного материала с максимальной прочностью. Как известно, прочность композита лимитируется главным образом исчерпанием несущей способности и разрушением волокон, в то время как матрица служит связующей средой и перераспределяет напряжения между волокнами. Кроме того, разрушение матрицы обычно не приводит к полной потере несущей способности материала. Эти рассуждения приводят к постановке задачи о снижении максимального напряжения в волокнах за счет выбора оптимальных форм волокон $S(x)$ при ограничениях на величину эффективных модулей в виде (1.6):

$$\max_{-l \leq x \leq l} \sigma(x) \rightarrow \min_{S(x)} \quad (4.1)$$

Напряжения в изолированном волокне, помещенном в неограниченную матрицу, как следует из (1.1) и (3.8), равны

$$\sigma(x) = \alpha^{-1} \left[\frac{1}{2}\pi(1+\kappa)^2(\sigma_1 - \nu\sigma_2) + \int (x-y)^{-1} \tau(y) dy \right] \quad (4.2)$$

Поскольку все уравнения задачи не изменяются при замене координат x на $-x$, то распределение напряжений $\sigma(x)$ и площадей поперечных сечений $S(x)$ будут четными функциями, а усилий взаимодействия волокна и матрицы нечетной функцией координаты x . Будем искать распределение усилий взаимодействия волокна и матрицы в виде ряда по полиномам Чебышева

$$\tau(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos n\theta / \sin \theta, \quad x = -l \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (4.3)$$

Коэффициент C_0 равен нулю в силу условия $S\sigma(l) = 0$ и (1.1). Сингулярный интеграл в правой части (4.2) вычисляется [11]:

$$\int \frac{\tau(y) dy}{x-y} = - \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^{\pi} \frac{\cos n\gamma d\gamma}{\cos \gamma - \cos \theta} = - \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \quad (4.4)$$

Таким образом, напряжения в волокне представляются в виде суммы постоянной величины σ_a и осциллирующей функции $\sigma_b(x)$:

$$\sigma(x) = \sigma_a + \sigma_b \quad (4.5)$$

$$\sigma_a = [(\sigma_1 - \nu\sigma_2)(1+\kappa)^2\pi - 2C_1]/2\alpha, \quad \sigma_b = -\frac{1}{\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} C_n \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}$$

Величина коэффициента C_1 однозначно определяется заданием эффективных модулей композита. Действительно, вычисляя постоянную A из (1.4), получим

$$A = - \int \gamma \tau(y) dy = -l^2 \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos n\theta \cos \theta d\theta = - \frac{C_1 \pi l^2}{2}$$

Эффективные модули ограничены, следовательно, величина A фиксирована. Функция $\sigma_b(x)$ осциллирующая и принимает как положительные, так и отрицательные значения и, если не все $C_i=0$ ($i=2, 3, 4, \dots$), то найдется такая точка, где $\sigma_b(x) > 0$. Минимальные же напряжения в волокне реализуются в случае, когда все $C_i=0$ ($i=2, 3, 4, \dots$), т. е. волокно равномерно напряжено.

5. Оптимизация в модели материала с ортотропной матрицей. Если матрица ортотропная, то задача оптимизации плотности при ограничении на величины эффективных модулей допускает точное решение в двоякопериодическом случае. Рассмотрим отдельный монослой слоисто-волокнистого композита. Приведенные модули податливости матрицы при плоском напряженном состоянии [12] обозначим a_{ij} . Для упрощения выкладок в дальнейшем будем считать, что волокно занимает отрезок длины $2l$ на оси x , задаваемый соотношениями $\omega/2-l \leq x \leq \omega/2+l$. Напряжения в волокне определяются из уравнения [13]:

$$\alpha \sigma(x) + \beta \int_{\omega/2-l}^{\omega/2+l} S \sigma(y) dy - \int_{\omega/2-l}^{\omega/2+l} \xi(x-y) (S \sigma)_y dy = 1/2 (a_{11} \sigma_1 + a_{12} \sigma_2) \mu \quad (5.1)$$

$$\alpha = \mu (2E_f)^{-1}, \quad \gamma = a_{11} \mu / 2D + 2\xi(\omega/2) \omega^{-1}$$

$$\mu = 4\pi a_{22} (p^2 - q^2) / [p(a_{12} - p^2 a_{11})(a_{22} - q^2 a_{12}) + q(p^2 a_{12} - a_{22})(a_{12} - q^2 a_{12})]$$

где p и q — положительные корни уравнения $a_{11} r^4 - (2a_{12} + a_{66}) r^2 + a_{22} = 0$. Эффективные модули, как и п.1, являются линейными функциями величины a_{ij} [13]. Нетрудно показать, что равнонапряженное волокно будет оптимальным по массе при ограничении на значения эффективных модулей. Найдем функцию распределения толщины вдоль равнонапряженного волокна. Уравнение (5.1) приводится к виду

$$\frac{1}{\pi} \int_{\omega/2-l}^{\omega/2+l} [\xi(x-y) - \xi(y)] S_y(y) dy = c \quad (5.2)$$

где c — постоянная, определяемая из условий равенства эффективных модулей заданным величинам, т. е. из изопериметрических условий. Найдем формулу обращения интегрального оператора

$$\frac{1}{\pi} \int_{\omega/2-l}^{\omega/2+l} [\xi(x-y) - \xi(y)] \varphi(y) dy = \psi(x) \quad (5.3)$$

действующего на симметричную функцию $\varphi(\omega/2+l) = -\varphi(\omega/2-l)$. Используя теорему сложения эллиптических функций [7] и свойства симметрии функции φ , приведем (5.3) к виду

$$\frac{1}{\pi} \int_{\omega/2}^{\omega/2+l} \varphi(y) \frac{P_y(y) dy}{P(y) - P(x)} = \psi(x)$$

Вводя переменные $z = P(y)$, $t = P(x)$, сводим его к уравнению с ядром Коши, решение которого известно

$$\varphi(y) = \frac{1}{\pi} \int_{e_1}^r \frac{\psi(x)}{t-z} \sqrt{\frac{(t-e_1)(r-t)}{(z-e_1)(r-z)}} dt$$

$$e_1 = P(\omega), \quad r = P(\omega/2+l)$$

Если функция ψ постоянная ($\psi=1$), то интеграл в правой части

$$\int_{e_1}^r \frac{dx}{\sqrt{(r-x)(x-e_1)}(x-y)} = -\pi y$$

и, таким образом (здесь d — некоторая постоянная):

$$\varphi(y) = (d - P(y)) [(P(y) - e_1)(r - P(y))]^{-1/2} \quad (5.4)$$

Возвращаясь к уравнению (5.2), с учетом (5.4) и симметрии функции $S_y(y)$ имеем

$$dS/dy = -[P(y) - P(\omega/2)]^{1/2} [P(\omega/2 + l) - P(y)]^{-1/2}$$

$$S(y) = \int_y^{\omega/2+l} \sqrt{\frac{P(t) - P(\omega/2)}{P(\omega/2+l) - P(t)}} dt \quad (5.5)$$

Графики функции $S(y)$, отвечающие различным значениям параметров l/ω , изображены на фиг. 3. Функции $S(y)$ нормированы условием $\int S(y) dy = 1$, где интеграл берется в пределах $\omega/2 - l \leq y \leq \omega/2 + l$. Функция Вейерштрасса вычислялась в «лемнискатном» случае, когда $\omega/\omega' = 1,854 \dots$, а инварианты равны $g_2 = 1$, $g_3 = 0$. Интеграл вычислялся с помощью адаптивной процедуры на ЭВМ. Кривые с номерами 1–4 построены при значениях параметров $l/\omega = 0,2; 0,3; 0,35; 0,45$ соответственно.

Сделаем несколько заключительных замечаний. Выше изучались задачи минимизации плотности и снижения концентрации напряжений в армирующих волокнах композитного материала. В обеих задачах условием оптимальности является равнонапряженность армирующего материала. Можно рассматривать «двойственные» [14] задачи оптимизации эффективных модулей при ограничениях на плотность материала и прочность волокон при заданных средних напряжениях. Условия оптимальности будут иметь вид, аналогичный (2.3)–(2.5), а активным будет одно из ограничений на величину напряжений в волокне или плотность материала. Отметим также факт очевидного существования решения задачи оптимизации в виде (2.5) — это следует из установленного ранее существования решения задачи теории упругости.

Автор благодарит Н. В. Баничука и Р. Л. Салганика за внимание, проявленное к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Долгих В. Н., Фильштинский Л. А. Об одной модели регулярной кусочно-неоднородной среды. — Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 2, с. 158–164.
2. Паргон В. Э., Перлин П. И. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 311 с.
3. Муки Р., Штернберг Э. Поглощение нагрузки разорванным включением в армированном волокнами композите. — Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1972, № 6, с. 150–165.
4. Натанзон В. Я. О напряжениях в растягиваемой пластинке, ослабленной одинаковыми отверстиями, расположенными в шахматном порядке. — Мат. сб., 1935, т. 42, № 5, с. 616–636.
5. Мизлин С. Г. Сингулярные интегральные уравнения. — Успехи мат. наук, 1948, т. 3, с. 29–112.
6. Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. и др. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.
7. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.
8. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками. — ПММ, 1969, т. 33, вып. 5, с. 813–843.
9. Чибрикова Л. И. О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений. — Учен. зап. Казан. ун-та, 1962, т. 122, кн. 3, с. 95–124.
10. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
11. Голубев В. В. Лекции по теории крыла. М.—Л.: Гостехиздат, 1949. 480 с.
12. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
13. Долгих В. Н., Фильштинский Л. А. Модель анизотропной среды, армированной тонкими лентами. — Прикл. механика, 1979, т. 15, № 4, с. 24–30.
14. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.