МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1987

УДК 539.3

О КОРРЕКТНОСТИ ОДНОЙ КОНТИНУАЛЬНОЙ МОДЕЛИ УПРУГОЙ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ

БОГАН Ю. А.

В [1] предложена модель слоистой упругой среды, в которой явно учитывается роль изгиба слоев, существенной при слабой связи слоев. В публикуемой работе поставлена проблема математического обоснования предложенной модели. Система уравнений в [1] имеет составной тип и не принадлежит к какому-либо хорошо изученному классу систем составного типа. Аналогичные системы уравнений возникают в механике композиционных материалов при изучении сред с сильной анизотропией упругих свойств [2].

Как доказано в публикуемой работе, предложенная в [1] модель является предельной для модели ортотропного упругого тела с несимметричным тензором напряжений в предположении, что малы некоторые коэффициенты при моментных напряжениях. Изучены стационарные краевые задачи. Исследована краевая задача для тонкого тела. Доказана слабая сходимость решений исходных задач к решениям предельных.

1. Используем в качестве исходной двумерную модель ортотропного упругого тела с несимметричным тензором напряжений [3]:

$$\begin{gathered}\sigma_{11}=a_{11}\varepsilon_{11}+a_{12}\varepsilon_{22},\qquad \sigma_{22}=a_{12}\varepsilon_{11}+a_{22}\varepsilon_{22}\\ \sigma_{12}=a_{77}\varepsilon_{12}+a_{78}\varepsilon_{21},\qquad \sigma_{21}=a_{78}\varepsilon_{12}+a_{88}\varepsilon_{21}\qquad \varepsilon_{\alpha\beta}=u_{\beta,\alpha}+\varepsilon_{\beta\alpha3}\varphi,\\ m_{13}=b_{66}\partial\varphi/\partial x_1,\qquad m_{23}=b_{44}\partial\varphi/\partial x_2\end{gathered}\tag{1.1}$$

где $\varepsilon_{\beta\alpha3}$ — тензор Леви-Чивита, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — тензор деформации, u_1, u_2 — перемещения, φ — функция вращения, m_{13}, m_{23} — моментные напряжения. Положим $k_1=a_{78}-a_{88}$, $\varkappa=k_2-k_1$, $k_2=a_{77}-a_{78}$, $\varphi=u_3$. Необходимые и достаточные условия положительности потенциальной энергии деформации имеют вид: a_{11}, a_{22}, a_{77}, $a_{88}>0$, b_{66}, $b_{44}>0$, $\varkappa>0$, $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$, $a_{77}a_{88}-a_{78}^2>0$. Предположим, что

$$b_{44}/b_{66}=\varepsilon^2\ll 1,\qquad k_1\ll 1\tag{1.2}$$

С механической точки зрения малость ε означает, что моментные напряжения в направлении оси x_1 значительно превышают таковые в направлении оси x_2. Малость k_1 означает, что в пределе при $k_1\to 0$ симметричная часть касательного напряжения пропорциональна симметричной деформации сдвига (можно было бы с самого начала постулировать, что $k_1=0$). Введем безразмерные напряжения, положив (l — характерный линейный размер тела): $\sigma_{ij}^*=\sigma_{ij}a_{22}^{-1}$, $m_{i3}^*=m_{i3}lb_{66}^{-1}$, $b_{ij}=a_{ij}a_{22}^{-1}$ (i, $j=1, 2$). Сохраним в дальнейшем для безразмерных напряжений прежние обозначения.

2. Рассмотрим стационарную задачу при заданных на границе нулевых перемещениях. Пусть Q — ограниченная область на плоскости с кусочно-гладкой границей. Вариационная задача ставится следующим образом: определить $u^\varepsilon=(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, u_3^\varepsilon)\in V=[H_0^1(Q)]^3$, удовлетворяющую для каждой $v\in V$ интегральному тождеству (по повторяющимся индексам производится суммирование от единицы до трех):

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon, v)=\int_Q f_k v_k\,dx=(f, v),\qquad f_k\in L^2(Q)\qquad (k=1, 2, 3)$$

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon, v)=\int_Q [\sigma_{ij}(u^\varepsilon)\varepsilon_{ij}(v)+m_{i3}(u_3^\varepsilon)m_{i3}(v_3)]\,dx\tag{2.1}$$

Согласно [3], вариационная задача (2.1) имеет единственное решение $u^\varepsilon \in V$. Пусть W — гильбертово пространство, полученное пополнением функций класса $C_0^\infty(Q)$ по норме

$$\|u\|_W = \left[\int_Q \left(u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2\right) dx\right]^{1/2}$$

Функции из W допускают след на любой части границы, не имеющей горизонтальной касательной, при этом для функций из W справедливо неравенство типа Пуанкаре: $\|u\|_0^2 \leqslant c\|\partial u/\partial x_1\|_0^2$, где постоянная c зависит только от области и не зависит от функции u.

Лемма 1. Справедливы равномерные по ε, k_1 оценки:

$$\|u_\alpha^\varepsilon\|_{[H_0^1(Q)]^2} \leqslant c \qquad (\alpha=1,2), \qquad \|u_3^\varepsilon\|_W \leqslant c, \qquad \varepsilon^2\left\|\frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_2}\right\|_0^2 \leqslant c \tag{2.2}$$

Рассмотрим интегральное тождество (2.1) на подпространстве L_1 пространства V, выделяемом условием $v_3=0$. Положим $u_\alpha^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)$, обозначим норму u_α^ε в L_1 через $\|u_\alpha^\varepsilon\|_1$, а норму в $L^2(Q)$ — через $\|u\|_0$. Интегральное тождество (2.1) на L_1 примет вид

$$\int_Q [(b_{11}\varepsilon_{11}(u^\varepsilon)+b_{12}\varepsilon_{22}(u^\varepsilon))\varepsilon_{11}(v)+(b_{12}\varepsilon_{11}(u^\varepsilon)+b_{22}\varepsilon_{22}(u^\varepsilon))\varepsilon_{22}(v)+$$
$$+(b_{77}u_{2,1}+b_{78}u_{1,2})v_{2,1}+(b_{78}\overset{\varepsilon}{u}_{2,1}+b_{88}\overset{\varepsilon}{u}_{1,2})v_{1,2}]\,dx=$$
$$=\int_Q (f_1v_1+f_2v_2)\,dx + k_2\int_Q u_3^\varepsilon v_{2,1}\,dx + k_1\int_Q u_3^\varepsilon v_{1,2}\,dx \tag{2.3}$$

Положим в (2.3) $v_1=u_1^\varepsilon$, $v_2=u_2^\varepsilon$; так как $b_{11}b_{22}-b_{12}^2>0$, $b_{77}b_{88}-b_{78}^2>0$, из (2.3) при помощи первого неравенства Корна в двумерной теории упругости [4], компактности вложения $H_0^1(Q)$ в $L^2(Q)$ и неравенства Коши с ε получим оценку

$$c_1\|u_\alpha^\varepsilon\|_1^2 \leqslant c_2 + c_3\|u_3^\varepsilon\|_W^2 \tag{2.4}$$

Интегральное тождество (2.1) на подпространстве L_2, выделяемом условием $v_1=v_2=0$, имеет вид

$$\int_Q [\overset{\varepsilon}{u}_{3,1}v_{3,1}+\varkappa u_2^\varepsilon v_3+\varepsilon^2 u_{3,2}v_{3,2}]\,dx = \int_Q f_3v_3\,dx - k_2\int_Q v_3\overset{\varepsilon}{u}_{2,1}\,dx + k_1\int_Q v_3\overset{\varepsilon}{u}_{1,2}\,dx \tag{2.5}$$

Из (2.5) следует оценка

$$c_4\|u_3^\varepsilon\|_W^2 + \varepsilon^2\|\partial u_3^\varepsilon/\partial x_2\|_0^2 \leqslant c_5 + c_6\|u_\alpha^\varepsilon\|_1^2 \tag{2.6}$$

Из оценок (2.4) и (2.6) получаем, что равномерно по ε, k_1 имеют место оценки (2.2). Поэтому из последовательности $\varepsilon^\circ=(\varepsilon, k_1)$ можно выделить подпоследовательность, такую, что при $\varepsilon\to+0$, $k_1\to 0$, $u_\alpha^\varepsilon \to u_\alpha^\circ$ слабо в $[H_0^1(Q)]^2$, $u_3^\varepsilon \to u_3^\circ$ слабо в W. Оценки (2.2) позволяют совершить предельный переход при ε, $k_1\to 0$ в интегральных тождествах (2.3) и (2.5). Переходя к пределу в (2.3) и (2.5), получим, что u_α° и u_3° удовлетворяют интегральным тождествам

$$\int_Q [(b_{11}\varepsilon_{11}(u^\circ)+b_{12}\varepsilon_{22}(u^\circ))\varepsilon_{11}(v)+(b_{12}\varepsilon_{11}(u^\circ)+b_{22}\varepsilon_{22}(u^\circ))\varepsilon_{22}(v)+$$
$$+(b_{77}\overset{\circ}{u}_{2,1}+b_{78}\overset{\circ}{u}_{1,2})v_{2,1}+(b_{78}\overset{\circ}{u}_{2,1}+b_{88}\overset{\circ}{u}_{1,2})v_{1,2}]\,dx=$$
$$=\int_Q (f_1v_1+f_2v_2)\,dx + k_2\int_Q u_3^\circ v_{2,1}\,dx \tag{2.7}$$

$$\int_Q \left(\frac{\partial u_3^\circ}{\partial x_1}\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + k_2u_3^\circ v_3\right)dx = \int_Q f_3v_3\,dx - k_2\int_Q v_3\overset{\circ}{u}_{2,1}\,dx \tag{2.8}$$

Решения вариационных задач (2.7) и (2.8) единственны, поэтому и вся последовательность u^ε сходится к u°.

Теорема 1. При ε, $k_1 \to 0$ u_α^ε сходится слабо в $[H_0^1(Q)]^2$ к u_α°, причем u_α° удовлетворяет интегральному тождеству (2.7), а u_3^ε сходится слабо в W к $u_3^\circ \in W$ и удовлетворяет интегральному тождеству (2.8).

Аналогично можно исследовать вопрос о сходимости при граничных условиях смешанной задачи (на одной части границы задан вектор напряжения и момент, на другой — нулевые перемещения и нулевое вращение). Справедлива теорема, аналогичная теореме 1.

Сделаем ряд замечаний о гладкости решения предельной задачи. Так как f_1, $f_2 \in L^2(Q)$, $\partial u_3^\circ/\partial x_1 \in L^2(Q)$, то по известным теоремам о гладкости решения задач эллиптических систем уравнений [4] u_1°, $u_2^\circ \in H^2(Q)$, и поэтому почти всюду в Q имеет место система уравнений

$$b_{11}\frac{\partial^2 u_1^\circ}{\partial x_1^2} + b_{88}\frac{\partial^2 u_1^\circ}{\partial x_2^2} + (b_{12}+b_{78})\frac{\partial^2 u_2^\circ}{\partial x_1\,\partial x_2} = f_1 \tag{2.9}$$

$$(b_{12}+b_{78})\frac{\partial^2 u_1^\circ}{\partial x_1\,\partial x_2} + b_{77}\frac{\partial^2 u_2^\circ}{\partial x_1^2} + b_{22}\frac{\partial^2 u_2^\circ}{\partial x_2^2} - k_2\frac{\partial u_3^\circ}{\partial x_1} = f_2$$

Уравнение для u_3°, записываемое в виде

$$\partial^2 u_3^\circ/\partial x_1^2 - k_2 u_3^\circ + k_2 \partial u_2^\circ/\partial x_1 = f_3 \quad (k_2 \geqslant 0) \tag{2.10}$$

справедливо только в смысле распределений, так как, вообще говоря, $\partial^2 u_3^\circ/\partial x_1^2$ не принадлежит $L^2(Q)$. При $\lambda+2\mu = b_{11}$, $b_{88} = \mu^\circ$, $b_{12}+b_{78} = \lambda+\mu^\circ$, $g+\mu^\circ = b_{77}$ система уравнений (2.9) и (2.10) тождественна системе уравнений (1.5) из [1].

3. Построим асимптотику решения системы уравнений (2.9), (2.10) в тонкой области $Q_h = \{(x_1, x_2);\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ |x_2| \leqslant h\}$ при малом h. Введем в систему уравнений (2.9) растянутую координату $t = x_2/h$. Предположим, что u_3°, f_3 не зависят от x_2. Будем искать приближенное решение системы уравнений

$$b_{11}\frac{\partial^2 u_1^h}{\partial x_1^2} + b_{88}h^{-2}\frac{\partial^2 u_1^h}{\partial t^2} + (b_{12}+b_{78})h^{-1}\frac{\partial^2 u_2^h}{\partial x_1\,\partial t} = f_1 h \tag{3.1}$$

$$(b_{12}+b_{78})h^{-1}\frac{\partial^2 u_1^h}{\partial x_1\,\partial t} + b_{77}\frac{\partial^2 u_2^h}{\partial x_1^2} + b_{22}h^{-2}\frac{\partial^2 u_2^h}{\partial t^2} - k_2\frac{\partial u_3^h}{\partial x_1} = f_2$$

в виде

$$u_1^h = h\sum_{n=0}^{\infty} h^n u_1^n(x_1, t), \qquad u_2^h = \sum_{n=0}^{\infty} h^n u_2^n(x_1, t) \tag{3.2}$$

при граничных условиях смешанной задачи

$$\sigma_{2k}|_{t=\pm1} = 0 \quad (k=1, 2), \qquad u_k|_{x_1=0,1} = 0 \quad (k=1, 2, 3) \tag{3.3}$$

При подстановке (3.2) в (3.1) и (3.3) получим рекуррентно связанные системы уравнений и граничных условий. Для определения u_1°, u_2° имеем

$$\begin{gathered} b_{88}\partial^2 u_1^\circ/\partial t^2 + (b_{12}+b_{78})\partial^2 u_2^\circ/\partial x_1\partial t = 0 \\ \partial^2 u_2^\circ/\partial t^2 = 0, \qquad \partial u_2^\circ/\partial t|_{t=\pm1} = 0 \\ \partial u_1^\circ/\partial t + \partial u_2^\circ/\partial x_1|_{t=\pm1} = 0 \end{gathered} \tag{3.4}$$

Из (3.4) следует, что

$$u_2^\circ = u_2^\circ(x_1), \qquad u_1^\circ = -t\partial u_2^\circ/\partial x_1 + g(x_1) \tag{3.5}$$

Для определения u_1^2, u_2^2 получим

$$b_{88}\frac{\partial^2 u_1^2}{\partial t^2}+(b_{12}+b_{78})\frac{\partial^2 u_2^2}{\partial x_1\,\partial t}+b_{11}\frac{\partial^2 u_1^\circ}{\partial x_1^2}=f_1,$$

$$b_{77}\frac{\partial^2 u_2^\circ}{\partial x_1^2}+b_{22}\frac{\partial^2 u_2^2}{\partial t^2}-k_2\frac{\partial u_3^\circ}{\partial x_1}+(b_{12}+b_{78})\frac{\partial^2 u_1^\circ}{\partial x_1\,\partial t}=f_2 \qquad (3.6)$$

$$\left.\frac{\partial u_1^2}{\partial t}+\frac{\partial u_2^2}{\partial x_1}\right|_{t=\pm 1}=0,\qquad \left.b_{22}\frac{\partial u_2^2}{\partial t}+b_{12}\frac{\partial u_1^\circ}{\partial x_1}\right|_{t=\pm 1}=0$$

Краевые задачи для определения u_1^2, u_2^2 — это неоднородные задачи Неймана для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Использование условий разрешимости и формул (3.5) приводит к уравнениям для определения функций g, u_2°:

$$k_2\left(\frac{\partial^2 u_2^\circ}{\partial x_1^2}-\frac{\partial u_3^\circ}{\partial x_1}\right)=\langle f_2\rangle,\qquad \left(b_{11}-\frac{b_{12}^2}{b_{22}}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}=\langle f_1\rangle$$

$$\langle f_k\rangle=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f_k(x_1,t)\,dt \qquad (k=1,2) \qquad (3.7)$$

Присоединив к уравнениям (3.7) уравнение для определения u_3°:

$$\partial^2 u_3^\circ/\partial x_1^2+k_2(\partial u_2^\circ/\partial x_1-u_3^\circ)=f_3 \qquad (3.8)$$

получим полную систему уравнений для определения g, u_2°, u_3°.

Отметим, что эта система формально совпадает с системой уравнений изгиба балки Тимошенко. Однако механический смысл этой системы другой, так как формулы (3.5) соответствуют кинематическим гипотезам изгиба балки Бернулли — Эйлера. Формальное совпадение возникает ввиду наличия в исходной модели новой неизвестной функции — функции микровращения. Отметим далее, что асимптотика (3.2) является неполной, потому что в ней не учтены функции пограничного слоя, возникающие вблизи сторон $x_1=0$, 1. Их построение проводится стандартными методами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зволинский Н. В., Шхинек К. Н.* Континуальная модель слоистой упругой среды.– Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 1, с. 5–14.
2. *Боган Ю. А.* Некоторые плоские контактные задачи теории упругости для сильно анизотропных сред.– ПММ, 1983, т. 47, вып. 1, с. 147–151.
3. *Ieşan O.* The plane micropolar strain of orthotropic elastic solids.– Arch. Mech. 1977, No. 3, p. 547–561.
4. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 159 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию 7.IV.1986