**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1987**

УДК 539.3

ПРИБЛИЖЕНИЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЛОИСТОГО МАССИВА

САЛГАНИК Р. Л.

В работе рассматривается в приближении сплошной среды деформирование слоистого массива в условиях, когда существенную роль играет взаимное проскальзывание слоев и связанный с ним их изгиб. Вопросы деформирования слоистых массивов рассматривались во многих работах как общего характера, так и ориентированных на различные приложения от механики слоистых композитов до геомеханики и геофизики. Для массивов, состоящих из большого числа слоев (в общем случае криволинейных), целесообразно использовать приближение сплошной среды. Такое приближение применимо в тех частях массива, где толщина слоев значительно меньше характерных расстояний L, на которых заметно меняются действующие на слои нагрузки, и характерных радиусов кривизны слоев (места, где радиусы кривизны и толщины слоев сравнимы, представляются в таком приближении особыми поверхностями или линиями). При этом, если между слоями имеется и сохраняется при деформировании сильная связь, не возникает качественных отличий деформирования слоистого массива, рассматриваемого в приближении сплошной среды, от обычного, в той или иной мере неоднородного и анизотропного упругого тела (считаем слои упругими), обладающего соответствующими эффективными деформационными характеристиками.

Качественные отличия от обычного упругого тела возникают в случаях, когда сдвиговое сопротивление межслойных границ в массиве достаточно мало или становится малым в ходе деформирования массива, так что слои могут в значительной мере проскальзывать (один относительно другого). При отсутствующем или слабом сопротивлении межслойных границ на отрыв к проскальзыванию может добавляться отставание слоев (отслоение). В местах, где градиенты нагрузок на слои значительны, при проскальзывании слоев может стать существенным их изгибное деформирование. Если, вместе с тем, эти градиенты не слишком велики, эффекты изгибного деформирования можно учесть в приближении сплошной среды, считая слои тонкими пластинами.

В теории изгиба тонких пластин часто пренебрегают влиянием на прогиб касательных напряжений (которые могут быть приложены к поверхностям пластины) вследствие относительной малости этого влияния по сравнению с тем, что дают нормальные к пластине напряжения. В таких условиях нормальные усилия в расчете на единицу площади, вызывающие изгиб какого-либо слоя (в отсутствие отслоений), вызываются относительным различием прогибов непосредственно контактирующих с ним слоев, причем в приближении сплошной среды это различие характеризуется производной от прогиба по нормали к слоям; в простейшем случае давление на слои пропорционально этой производной. Такой подход был применен к рассмотрению слабого изгиба массива из контактирующих упругих балок в [1]. В результате для нормального давления на балки при равновесии в отсутствие отслоений в [1] было получено дифференциальное уравнение в частных производных, согласно которому вторая производная от давления, взятая по нормали к балкам, пропорциональна четвертой производной от него, взятой параллельно осям балок. На основе этого уравнения в [1] была решена задача о действии на границу полуплоскости периодически изменяющейся вдоль границы нормальной нагрузки. Другие задачи с периодически изменяющимся вдоль осей балок нормальным давлением были рассмотрены для упомянутого уравнения (с учетом также касательных напряжений на контактах балок) в [2–4].

В данной работе с использованием соображений, аналогичных примененным в [1], рассматривается приближение сплошной среды и решаются некоторые задачи для слоистого массива в более общем случае слоев-пластин с учетом также их продольного нагружения. Подчеркнем, что при таком описании сдвиговое взаимодействие слоев считается пренебрежимо малым лишь в том отношении, что можно не принимать во внимание непосредственное влияние связанных с ним касательных напряжений на прогиб. Влияние упругого сдвигового взаимодействия между слоями на их прогиб рассмотрено в приближении сплошной среды в [5] в предположении, что прогиб всех слоев один и тот же. Это случай, когда характерные расстояния, на которых заметно изменяются приложенные нагрузки, велики по сравнению с поперечным размером тела.

Имеются и другие подходы к описанию слоистого массива в приближении сплошной среды (см. [6] и цитированную там литературу).

1. Основное уравнение при заданных продольных напряжениях. Рассмотрим горизонтально-слоистый массив. Введем систему декартовых координат с горизонтальными осями x, y и вертикальной осью z, направленной вниз. Обозначим через w прогиб какого-либо слоя, через h — толщину этого слоя, через E, ν — его модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно. В предположении о малости деформаций слоя, считая что он находится в равновесии и что на прогиб влияют лишь нормальные к слою нагрузки, имеем следующее уравнение равновесия для слоя [7, 8]:

$$D\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\beta^2}\right)^2 w-h\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}\right)=P+f \tag{1.1}$$

Здесь $D={}^1/_{12}Eh^3(1-\nu^2)$ — цилиндрическая жесткость слоя, P, f — нормальные к слою нагрузка и компонента объемной силы, отнесенные к единице площади поверхности слоя, $\sigma_{\alpha\beta}$ — средние по толщине слоя продольные компоненты тензора напряжений (греческие индексы принимают значения 1, 2, по повторяющимся индексам производится суммирование).

Будем здесь и в пп. 2, 3 считать напряжения $\sigma_{\alpha\beta}$ заданными (приближение Сен-Венана). Тем самым пренебрегается геометрическим влиянием прогиба на продольные деформации и влиянием (через коэффициент Пуассона) нормального к слоям давления, связанного с прогибом, на продольные напряжения в них.

Для слоистого массива можно записать, что P представляет собой разность давлений q на данный слой со стороны выше- и нижележащего слоев. В приближении сплошной среды можно считать q плавной функцией всех трех координат, и таким образом, принять, что

$$P=-h\partial q/\partial z \tag{1.2}$$

Произведем в (1.2) усреднение по пакету слоев в пределах от $z-\lambda$ до $z+\lambda$, $\lambda>0$, т. е. выполним суммирование (1.2) по n слоям в этих пределах и результат поделим на n. При использовании операции «размазывания» (см. [5]) суммирование заменяется интегрированием в указанных пределах; соответственно среднее получается делением результата на 2λ. В рамках рассматриваемого приближения масштаб усреднения 2λ должен быть намного меньше L, но заведомо превышать толщины слоев. В результате из (1.2) получим

$$P=-h_a\partial q/\partial z,\quad h_a=\langle h\rangle \tag{1.3}$$

Здесь и в дальнейшем угловыми скобками обозначается указанная выше операция усреднения.

Положим $q=q_0+q_d$, где q_0 — начальное давление в массиве на глубине z в отсутствие изгиба, q_d — дополнительное давление, связанное с различием прогибов соседних слоев, т. е. (с учетом предположенной плавности изменения прогибов) с величиной соответствующей этому различию поперечной деформации $\partial w/\partial z$ рассматриваемого пакета слоев. Таким образом, полагаем

$$q_d=-E_a\varphi(\partial w/\partial z) \tag{1.4}$$

где E_a — постоянная с размерностью напряжения. В случае упругого деформирования пакета слоев между $z-\lambda$ и $z+\lambda$ имеем $\varphi=\partial w/\partial z$ и E_a представляет собой эффективный модуль упругости пакета (знак минус в (1.4) учитывает, что q_d — давление). Предполагается, что φ может также явно зависеть от z.

Нелинейность связи q_d с $\partial w/\partial z$ может быть вызвана изменением площадей контактов между слоями при их взаимном надавливании, а также другими причинами. Если прочность межслойных границ на отрыв пренебрежимо мала, нелинейность связи q_d с $\partial w/\partial z$ проявляется в том, что φ обращается в нуль, когда давление становится отрицательным (поперечное растяжение). Предположим, что наряду с прогибом и давлением изменение продольных напряжений также заметным образом происходит лишь на расстояниях, не меньших L.

Тогда, приняв во внимание равенства (1.2)—(1.4) и выполнив в (1.1) указанное выше усреднение (при этом плавно изменяющиеся величины выносятся за знак усреднения и заменяются их значениями в центре пакета слоев, по которому производится усреднение), получим (D_a, f_a, h_a могут зависеть от z).

$$D_a\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\beta{}^2}\right)^2 w-h_a\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}\right)-h_aE_a\frac{\partial}{\partial z}\varphi\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-h_a\frac{\partial q_0}{\partial z}+f_a \tag{1.5}$$

$$D_a=\langle {}^1/_{12}Eh^3/(1-\nu^2)\rangle,\qquad f_a=\langle f\rangle \tag{1.6}$$

При отсутствии зависимости w от одной из координат x_α, а также при обращении в нуль $\sigma_{\alpha\beta}$ и правой части в уравнении (1.5) это уравнение переходит в уравнение [1] (надо еще опустить в (1.6) множитель $(1-\nu^2)$, положить $\varphi'=1$ и воспользоваться (1.4)).

Переход к динамическому случаю осуществляется добавлением сил инерции, т. е. к f_a в (1.5) прибавляется член $-m_a\partial^2w/\partial t^2$, где $m_a=\langle\rho h\rangle$, ρ — плотность, t — время. В динамике по причине проявления скоростных эффектов (вязкость) может оказаться необходимым учет сдвигового взаимодействия между слоями, бывшего несущественным в статике. В частности, его влияние может вообще сделать невозможным распространение достаточно высокочастотных изгибных волн. Когда распространение изгибных волн возможно, оно будет сопровождаться дополнительным затуханием вследствие потерь на трение при проскальзывании слоев, сопровождающем их изгиб. Правая часть (1.5) записана в предположении, что слои прижаты один к другому. При этом для горизонтально-слоистого массива она обращается в нуль (если единственной объемной силой является сила тяжести), поскольку f_a/h_a представляет собой средний удельный вес слоев на данной глубине.

В зонах отслоения, где нормальная сила взаимодействия слоев обращается в нуль, в уравнении (1.5) исчезает член с φ, а в правой части остается только объемная сила f_a и оно переходит в обычное уравнение изгиба пластины.

Для решения задач должны быть заданы граничные, а в динамическом случае — также начальные условия (если это не задачи об установившихся колебаниях). В результате решения задачи находятся прогиб и нормальное к слоям давление, по которым можно при помощи известных формул найти остальные компоненты напряженно-деформированного состояния в любом слое. Действующие вдоль слоев нормальные напряжения от изгиба могут приводить к разрушению слоев или переходу их деформирования в пластическое, что можно учесть введением подходящих «шарниров» (при достаточной локализации участков пластичности).

Создаваемые изгибом касательные напряжения внутри слоев в плоскостях, параллельных их границам, могут приводить к дополнительному расслоению (в тех случаях, когда среди этих плоскостей есть обладающие достаточно низкой сдвиговой прочностью) и тем самым — к уменьшению сдвиговой жесткости (см. примеры, приведенные в [9], § 30). Как образование шарниров, так и добавочное расслоение создают дополнительные источники нелинейности уравнения для прогиба.

Требование плавности (медленности) изменения искомых величин, выдвигаемое для обеспечения применимости описания слоистого массива как сплошной среды, не исключает постановок задач, в которых эти величины изменяются резко (быстро), а означает лишь, что приближением сплошной среды для слоистого массива можно пользоваться всюду, за исключением мест и моментов времени, где такие изменения происходят, и оно становится слишком грубым.

2. Волновые решения и потеря устойчивости. Будем считать массив однородным (в масштабах, превышающих 2λ), безграничным, сжатым по нормали к слоям давлением q_0, достаточно большим, чтобы предотвратить их отставание, и постоянным, одинаковым по всем направлениям продольным давлением p. Рассмотрим в таком массиве распространение плоской волны, которое в силу симметрии всегда можно считать происходящим перпендикулярно оси y, так что $w=w_0\exp[i(k_xx+k_zz-\omega t)]$, где w_0, k_x, k_z, ω — константы, $i^2=-1$ (диссипацией пренебрегаем). Учитывая в (1.5) силы инерции и равенство $\partial q_0/\partial z=f_a/h_a$, получаем в предположении, что $\varphi'=1$, уравнение

$$m_a\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+D_a\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+h_ap\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-h_aE_a\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0 \qquad (2.1)$$

Здесь все параметры — постоянные. Пренебрежение изменением p с глубиной означает, что длины рассматриваемых волн предполагаются достаточно малыми по сравнению с характерными расстояниями, на которых заметно изменяется p. Подставляя приведенное выше выражение для w в (2.1), находим

$$\omega=[m_a^{-1}(D_ak_x^4-h_apk_x^2+h_aE_ak_z^2)]^{1/2} \qquad (2.2)$$

Отсюда видно, что по нормали к слоям ($k_x=0$) волна распространяется как продольная волна в стержне, а вдоль слоев ($k_z=0$) — как волна изгиба в пластине. Видно также, что при любом $p<0$ (продольное растяжение) или $p=0$ частота ω получается действительной.

В случае $p>0$ частота ω получается действительной лишь при условии, что

$$k_z^2\geqslant[(p/E_a)-(D_a/h_aE_a)k_x^2]k_x^2 \qquad (2.3)$$

Область, где это условие выполняется, представляет собой на плоскости k_x, k_z внешность «восьмерки», симметрично расположенной относительно осей k_x, k_z, пересекающей ось k_x в точках $k_x=0$ и $k_x=\mp k_x^{(0)}$, где $k_x^{(0)}=(ph_a/D_a)^{1/2}$, и достигающей максимальной ширины $p(h_a/D_aE_a)^{1/2}$ (в направлении, параллельном оси k_z) при $k_x=\mp 2^{-1/2}k_x^{(0)}$. Вектор групповой скорости, как видно из (2.2), в общем случае не коллинеарен волновому вектору $\{k_x, k_z\}$.

Поскольку $k_x^{(0)}\sim 3(p/E)^{1/2}h^{-1}$, где E, h — характерные модуль упругости и толщина слоев и p/E — малая величина, восьмерка находится в области применимости описания слоистого массива как сплошной среды. Из (2.2) видно, что при приближении изображающей точки (k_x, k_z) извне к границе восьмерки частота колебаний ω уменьшается и влияние продольного давления возрастает. Изображающим точкам на самой восьмерке соответствуют волны с частотой, равной нулю. Это статические волны потери устойчивости вследствие продольного сжатия слоев. Наименьшая длина статической волны $\Lambda=2\pi/k_x^{(0)}$ соответствует волне в пластине ($k_z=0$). Формы потери устойчивости в рассмотренном линейном приближении определяются наложением статических волн, в том числе с различно ориентированными плоскостями, проходящими через их волновые векторы и ось z. Формально согласно проведенному выше анализу потеря устойчивости массивом при его продольном сжатии давлением p происходит при любом как угодно малом значении p. Это связано с принятым предположением о бесконечной протяженности слоев. Учет наличия границ (внешних и внутренних) приведет к тому, что потеря устойчивости станет возможной лишь, начиная с некоторого значения p. Чтобы определить действительные формы потери устойчивости, необходимо учесть нелинейные эффекты, включая возможность разрушения слоев.

Рассматривая слоистый массив бесконечной протяженности, можно представить себе следующую картину потери им устойчивости при приложении продольного давления p (слои считаем хрупкими).

Потеряв устойчивость по формам, соответствующим самым большим длинам статических волн, массив разрушится от вызванных изгибом слоев напряжений в них на блоки соответствующих размеров и будет далее терять устойчивость и разрушаться на блоки меньших размеров, пока отвечающие этим размерам изгибные напряжения не упадут настолько, что дальнейшее разрушение при данном p станет невозможным.

Можно ожидать, что в результате разрушений, вызванных потерей устойчивости, произойдет разбиение массива на блоки, характерный размер которых будет определяться наименьшей возможной при данном p длиной статической волны. Согласно проведенному анализу, эта длина равна Λ. Однако в действительности, надо было бы при рассмотрении вопроса о потере устойчивости учитывать образование в массиве внутренних границ разрушения и сдвиговое взаимодействие между слоями, которое (даже будучи незначительным, как предполагалось выше, при достаточном изгибе слоев) может играть существенную роль как фактор, препятствующий потере устойчивости. Поэтому с учетом возможного влияния также других стабилизирующих факторов характерные размеры блоков, на которые разобьется массив в результате потери устойчивости, должны превышать Λ.

Рассмотрим условия, в которых это превышение не очень велико, так что характерный размер блоков составляет, например, $(2-3)\Lambda$.

В рассматриваемом случае изотропного продольного давления следует ожидать, что размеры блоков по разным направлениям, параллельным плоскости xy, будут не сильно различаться, поскольку в противном случае для направления сильной вытянутости блоков сохранилась бы возможность потери устойчивости.

Оценим Λ для массива из слоев типа песчаника с толщиной (мощностью) $h=1$ м, модулем упругости $E=2\cdot10^4$ МПа, приняв продольное давление $p=20$ МПа (считаем, что слои могут проскальзывать). Учитывая, что $\Lambda=2\pi/k_x^{(0)}$, и принимая во внимание выражения для $k_x^{(0)}$ и D, находим $\Lambda\simeq2h(E/p)^{1/2}$. При подстановке указанных численных значений параметров получаем $\Lambda\simeq60$ м. Отсюда для минимальных размеров блоков, считая, что они в 2–3 раза больше Λ, получаем оценку 120–180 м.

В случае неизотропного продольного давления появляются направления, в которых статические волны имеют увеличенные длины, что соответствующим образом должно отразиться на форме, размерах и ориентации блоков, образующихся вследствие потери устойчивости.

Подобные явления, по-видимому, при соответствующих условиях могли играть роль в процессах разбиения слоистых массивов горных пород на блоки.

В отношении динамики заметим, что в массиве, разбитом на блоки, дисперсионное уравнение (2.2) имеет смысл применять лишь для волн с длинами, значительно меньшими размеров блоков. При этом должны приниматься во внимание граничные условия на контактах блоков. В отношении потерь на трение на межслойных границах более благоприятные условия распространения будут для не слишком коротких волн, которым соответствуют относительно небольшие частоты колебаний.

3. Равновесие при заданном возмущающем воздействии. Рассмотрим достаточно крупный блок слоистого массива, не затронутый явлением потери устойчивости, и предположим, что внутри этого блока прогиб изменяется скачком в плоскости xy при переходе через ось y на одну и ту же постоянную величину $2b$ (глубину, на которой находится плоскость xy, будем считать достаточно большой для того, чтобы допустимо было не учитывать возможность отставания слоев).

При этом прогиб w не будет зависеть от y и при сохранении прочих предположений, принятых в предыдущем параграфе, будет удовлетворять уравнению

$$D_a\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+h_a p\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-h_a E_a\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0 \qquad (3.1)$$

получающемуся из (2.1) отбрасыванием инерционного члена. В силу симметрии достаточно рассмотреть область $z>0$. При $z=0$ имеем

$$w=bH(-x) \qquad (3.2)$$

где $H(x)=0$ при $x<0$ и $H(x)=1$ при $x>0$ (при отсутствии воздействия (3.2) считаем прогиб равным нулю). Скачком прогиба (3.2) можно моделировать воздействие на массив, созданное в результате извлечения из него прямолинейным фронтом или забоем (ось y) некоторого слоя либо пласта или вызванное геологическими причинами. В любом случае имеются в виду расстояния от фронта, значительно превышающие размеры области сосредоточения воздействия, в силу чего эту область («ядро») можно считать стянувшейся в ось y.

Считая, что прогибы слоев, вызванные рассматриваемым воздействием, практически исчезают, не дойдя до границ блока, можно предполагать массив бесконечным и прогибы обращающимися в нуль на бесконечности (в противном случае надо было бы учитывать наличие в массиве внутренних границ или одной границы, наиболее близко расположенной к месту воздействия).

Можно убедиться, что решение уравнения (3.1), удовлетворяющее указанному условию на бесконечности и условию (3.2), имеет вид

$$w=b\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\int_0^{k_*}\cos[\beta k(k_*^2-k^2)^{1/2}z]\,\frac{\sin kx}{k}\,dk-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi}\int_{k_*}^{\infty}\exp[-\beta k(k^2-k_*^2)^{1/2}z]\,\frac{\sin kx}{k}\,dk\right\} \qquad (3.3)$$

$$\beta=(D_a/h_aE_a)^{1/2},\qquad k_*=\beta^{-1}(p/E_a)^{1/2}=2\pi/\Lambda \qquad (3.4)$$

Рассмотрим случай, когда преобладающее влияние на прогиб оказывает изгибная жесткость. Выполнив в (3.3) предельный переход при $k_*\to 0$, находим (используем равенство $q=q_0-E_a\partial w/\partial z$, а для вычисления интеграла – соотношение (3.574,4) из [10]):

$$w=b\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\exp(-\beta k^2z)\,\frac{\sin kx}{k}\,dk\right] \qquad (3.5)$$

$$q=q_0-\frac{bE_ax}{4(\pi\beta)^{1/2}z^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\beta z}\right) \qquad (3.6)$$

Выражение (3.5) удовлетворяет уравнению (3.1) при $p=0$, т. е. уравнению Зонтага. Максимальное q_+ и минимальное q_- давления для данного z достигаются, как видно из (3.5), при $x=\mp(2\beta z)^{1/2}$ и составляют

$$q_\pm=q_0\pm bE_a(8\pi e)^{-1/2}z^{-1} \qquad (3.7)$$

Таким образом, как и должно быть, возмущение давления исчезает при $z\to\infty$, причем с ростом z ширина зоны этого возмущения увеличивается как $z^{1/2}$, а максимальные отклонения давления от q_0 уменьшаются как z^{-1}.

В монолитном массиве рассмотренному воздействию соответствует краевая дислокация, расположенная вдоль оси y и имеющая вектор Бюргерса величины $2b$, направленный вдоль оси z [7]. Возмущения напряжений, создаваемые такой дислокацией, уменьшаются обратно пропорционально расстоянию до фронта (оси y) во всех направлениях. Причина различия – проскальзывание и связанный с ним изгиб слоев в слоистом массиве.

При моделировании скачком прогиба реальной картины деформирования в слоистом массиве имеет смысл рассматривать расстояния от фронта, не меньшие чем порядка h (на меньших расстояниях использованное приближение сплошной среды неприменимо). Изгибающий момент M (отнесенный к единице длины в направлении оси y) в каком-либо сечении слоя толщины h и наибольшее нормальное напряжение σ в этом сечении находятся по известным формулам: $M=-D(\partial^2w/\partial x^2)$, $\sigma=\sigma Mh^{-2}$. Отсюда и из (3.5) находим

$$M=D(q-q_0)/E_a\beta \qquad (3.8)$$

Максимальное значение $|\sigma|$ достигается при $x=\mp(2\beta z)^{1/2}$ и с учетом (3.7) составляет

$$\sigma_{\max}=bE[2\beta(1-\nu^2)(8\pi e)^{1/2}]^{-1}h/z \qquad (3.9)$$

При достаточно большом значении $\sigma_{\max}$ можно ожидать разрушения от изгиба, которое распространится от фронта скачка по двум расходящимся линиям (вверх и вниз), вероятно, в грубом соответствии с тем, как расходятся, по крайней мере близко от фронта, линии $x=\mp(2\beta z)^{1/2}$. Можно ожидать также, что разрушение в виде разламывания слоев на блоки распространится и на некоторое расстояние в стороны от этих линий.

Разрушения такого характера, сопровождающиеся также опусканием образовавшихся блоков под действием силы тяжести, обычно происходят при разработке пластов полезных ископаемых в слоистых массивах. Вопросы, относящиеся к слоистым массивам горных пород, включая теоретические модели, способы и результаты расчетов, рассмотрены в [11—14].

Рассмотрим теперь решение (3.3) в противоположном предельном случае, когда преобладает действие продольного давления p, т. е. $k_* \to \infty$. Главный член асимптотики решения (3.3) при этом соответствует полному пренебрежению влиянием изгибной жесткости на прогиб и получается, если отбросить в (3.3) второй интеграл, а в первом, считая его распространенным до бесконечности, пренебречь k по сравнению с k_*. Представив далее подынтегральное выражение как полусумму синусов, нетрудно убедиться, что искомый главный член асимптотики имеет вид

$$w = {}^1/_2 b\{1 - {}^1/_2[\operatorname{sgn}(x + \beta k_* z) + \operatorname{sgn}(x - \beta k_* z)]\} \tag{3.10}$$

Отсюда видно, что в таком приближении изменение прогиба происходит скачком на величину ${}^1/_2 b$ при пересечении каждой из линий $x = \mp\beta k_* z$ и на них сосредоточено все возмущение нормального к слоям давления. Эти линии являются характеристиками «волнового» уравнения, в которое переходит уравнение (3.1), если пренебречь в нем жесткостью слоев, т. е. положить $D_a = 0$.

Переход к асимптотике $k_* \to \infty$ соответствует сильному уменьшению роли изгибной жесткости, что формально должно приводить к потере устойчивости массивом всюду, включая и области, далекие от местонахождения скачка прогиба. Фактически же этому могут препятствовать неучтенные в данном рассмотрении стабилизирующие факторы, не настолько, однако, сильные, чтобы помешать реализоваться распределению прогибов согласно найденному решению для больших p при создании достаточно большого возмущения прогиба. Кроме того, если учесть практическое отсутствие изгиба вне узких зон, прилегающих к линиям $x = \mp\beta k_* z$, изгибную жесткость можно считать малой (вследствие разрушения, растрескивания или пластического деформирования слоев) только в этих зонах, перейдя тем самым по существу к рассмотрению нелинейной задачи. Если перемещения частей массива, сжимающих с боков данную его часть, достаточно затруднены, явления потери устойчивости в ней будут снижать продольное давление и тем самым способствовать прекращению дальнейшей потери устойчивости.

Если при $z = 0$ задан не скачок прогиба, а некоторое его распределение $w = w_0(x)$, то соответствующее решение уравнения (3.1) при условии исчезновения прогиба на бесконечности находится путем замены в полученных выше формулах b на $-[dw_0(\xi)/d\xi]d\xi$, x на $x - \xi$ и интегрирования результата по ξ от $-\infty$ до $+\infty$. В частности, для давления при $z = 0$ в случае, когда действие продольного давления несущественно, из (3.5) находим

$$q = q_0 - E_a \beta w_0''(x) \tag{3.11}$$

В случае же, когда несущественна изгибная жесткость, для давления при произвольном z из (3.10) с учетом равенства $q = q_0 - E_a \partial w/\partial z$ находим

$$q = q_0 - {}^1/_4 (pE_a)^{1/2}[w_0'(x + \beta k_* z) - w_0'(x - \beta k_* z)] \tag{3.12}$$

Если $w_0(x)$ имеет вид размытого скачка прогиба, то распределение прогибов в массиве будет в каждом слое иметь вид двух размытых скачков прогиба, отстоящих один от другого тем дальше, чем более этот слой удален от плоскости $z = 0$, но теперь размытость скачков прогиба будет вызвана плавностью самого возмущающего воздействия, а не виянием изгибной жесткости, которое предполагается пренебрежимо малым. Соответственно плавным будет и распределение давления, выражаемое формулой (3.12).

Пользуясь геологической терминологией, можно сказать, что возмущающее воздействие в каком-либо слое в виде скачка или скачкообразного изменения прогиба вызывает в остальных слоях образование двух флексур, расстояние между которыми растет по мере удаления от этого слоя. При малых z из (3.12) получаем

$$q=q_0-{}^1/_2pzw_0''(x) \tag{3.13}$$

Поскольку минимально допустимые расстояния, при которых еще можно пользоваться рассматриваемым описанием, имеют порядок h, формула (3.13) для q аналогична формуле (3.11) (β при умеренных отличиях E_a от E имеет порядок h) с тем, однако, отличием, что вместо поперечного модуля E_a в ней стоит продольное давление p.

Рассмотрим теперь массив, состоящий из слоев материала, хорошо сопротивляющегося растяжению. Тогда, заменив в (3.1) p на $-p$ (всестороннее продольное растяжение напряжением p), для решения задачи с граничным условием (3.2) и прежним условием на бесконечности получим

$$w=b\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp[-\beta k(k^2+k_*^2)^{1/2}z]\,\frac{\sin kx}{k}\,dk\right\} \tag{3.14}$$

Здесь β и k_* определяются формулами (3.4). При $k_*\to\infty$ (большие p) получаем в качестве главного члена асимптотики мембранное приближение (в круглых скобках (3.14) опускаем k, используем (3.3) и соотношение (3.573; 3) из [10])

$$w=b\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left[\frac{x}{(p/E_a)^{1/2}z}\right]\right\} \tag{3.15}$$

Для нормального давления отсюда находим

$$q=q_0-\pi^{-1}(pE_a)^{1/2}bx[x^2+(p/E_a)z^2]^{-1} \tag{3.16}$$

4. Основные уравнения при продольном напряженном состоянии, зависящем от прогиба. Учтем влияние прогиба слоев на продольное напряженное состояние в них, которое при этом уже нельзя считать заданным. Считая по-прежнему деформации материала слоев малыми, имеем для средних продольных деформаций в каком-либо слое выражение [7, 8]

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}\frac{\partial w}{\partial x_\beta} \tag{4.1}$$

где u_α — средние продольные смещения.

Напряжения $\sigma_{\alpha\beta}$ выражаются через $\varepsilon_{\alpha\beta}$ при помощи закона Гука для условий плоского напряженного состояния, но с учетом надавливания соседних слоев и действующих в массиве начальных напряжений

$$\sigma_{\alpha\beta}=-\nu(1-\nu)^{-1}q\delta_{\alpha\beta}+\overset{(0)}{\sigma}_{\alpha\beta}+\overset{(\varepsilon)}{\sigma}_{\alpha\beta} \tag{4.2}$$

$$\overset{(\varepsilon)}{\sigma}_{\alpha\beta}=\nu(1-\nu^2)^{-1}E\varepsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}+(1+\nu)^{-1}E\varepsilon_{\alpha\beta},\qquad q=q_0-E_a\varphi(\partial w/\partial z)$$

Здесь первое слагаемое выражает то продольное давление в слоях, которое возникло бы в них от сжатия по нормали давлением q в условиях, предотвращающих появление продольных деформаций ($\overset{(0)}{\sigma}_{\alpha\beta}$ будем считать постоянным). Будем, как принималось в п. 1, предполагать, что условия нагружения на границах массива, а также характер распределения объемных сил и начальных напряжений обеспечивают достаточную плавность распределения напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$.

Предположим, что можно пренебречь влиянием касательных напряжений на межслойных границах не только на прогиб (касательные напряжения могут в таких условиях быть еще довольно значительными), но и на продольное напряженно-деформированное состояние в слоях. Тогда, записав для $\sigma_{\alpha\beta}$ усредненные уравнения равновесия с учетом (4.1), имеем (f_α — объемные силы):

$$\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}-\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial q}{\partial x_\alpha}+f_\alpha=0 \tag{4.3}$$

В итоге в рассматриваемом приближении сплошной среды равновесие слоистого массива будет определяться системой уравнений (1.5), (4.1) — (4.3) с соответствующими граничными условиями. При вычислении продольных деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta}$ в каком-либо слое упругие постоянные берутся для этого слоя.

Переход к динамическому случаю, помимо того что было изложено в п. 1, требует добавления к f_α в (4.3) сил инерции $-\rho\partial^2 u_\alpha/\partial t^2$.

В приложениях, относящихся к разного рода конструкционным слоистым материалам, соединение прочных упругих слоев, будучи достаточно пластичным, может в то же время хорошо противостоять растяжению по нормали к слоям. В этих условиях и при отрицательных значениях q сохраняется взаимодействие между слоями (а не обращается в нуль как предполагалось выше, когда имелись в виду геомеханические приложения).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sonntag G.* Die in Schichten gleicher Dicke reibungsfrei geschichtete Halbebene mit periodisch verteilter Randbeelastung.— Forsch. Geb. Ingenieur wesens, 1957, B. 23, Nr. 1/2, S. 3–8.
2. *Картозия А. Л., Либерман Ю. М.* Напряженно-деформированное состояние слоистого массива горных пород с гладкими контактами при разработке угольного пласта.— Науч. сообщ. Ин-та горн. дела им. А. А. Скочинского, 1969, вып. 66, с. 3–13.
3. *Картозия А. Л.* Напряженно-деформированное состояние слоистого массива горных пород при наличии трения на контактах слоев.— Науч. сообщ. Ин-та горн. дела им. А. А. Скочинского, 1970, вып. 73, с. 3–12.
4. *Картозия А. Л.* Влияние слоистости массива на распределение напряжений под выработанным пространством.— Науч. сообщ. Ин-та горн. дела им. А. А. Скочинского, 1971, вып. 86, с. 40–44.
5. *Болотин В. В.* Об изгибе плит, состоящих из большого числа слоев.— Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 1, с. 61–66.
6. *Зволинский Н. В., Шхинек К. Н.* Континуальная модель слоистой упругой среды.— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 1, с. 5–14.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 203 с.
8. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
9. *Феодосьев В. И.* Сопротивление материалов. М.: Наука, 1970. 544 с.
10. *Рыжик И. М., Градштейн И. С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 464 с.
11. *Айзаксон Э.* Давление горных пород в шахтах. М.: Госгортехиздат, 1961. 176 с.
12. *Жуков В. В., Чернов Е. В., Довгенко Г. Н.* Напряженно-деформированное состояние слоистого массива. Л.: Наука, 1973. 132 с.
13. *Жуков В. В.* Расчет элементов систем подземной разработки по фактору прочности. Л.: Наука, 1977. 206 с.
14. *Борисов А. А.* Механика горных пород и массивов. М.: Недра, 1980. 360 с.

Москва

Поступила в редакцию 13.III.1986