

УДК 531.8

## К МОДЕЛИРОВАНИЮ ДИНАМИКИ УПРУГОГО МАНИПУЛЯТОРА

ЧЕРНЯВСКАЯ С. С.

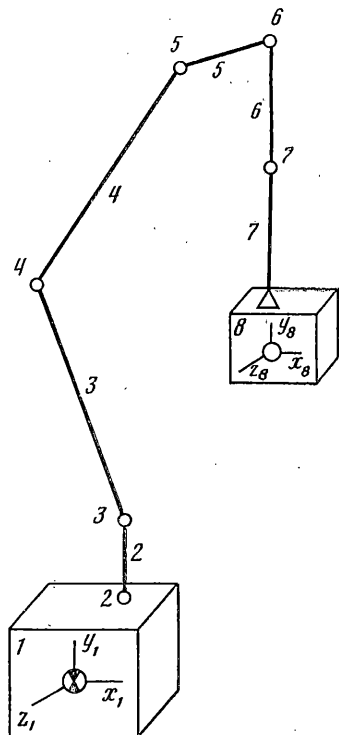
При исследовании динамики антропоморфных роботов-манипуляторов учитывается влияние упругости конструкции на точность выполнения рабочих операций. В большинстве математических моделей упругость звеньев нагруженного манипулятора описывается в квазистатической постановке [1, 2], а влияние податливости шарниров, соединяющих звенья, анализируется для манипулятора с жесткими звеньями [3, 4]. В [5, 6] приведена математическая модель с упругим последним звеном.

В данной работе рассматривается шестизвонный робот-манипулятор, установленный, в общем случае, на подвижном основании. Учитываются изгибные и крутильные упругие деформации двух звеньев (остальные звенья считаются жесткими стержнями) и податливость шарниров. Получена математическая модель манипулятора на основе представления решения в виде ряда по собственным функциям. Приведены уравнения для исследования замкнутой системы с учетом динамических свойств управляющих двигателей.

1. Рассмотрим механическую систему, состоящую из манипулятора, переносимого груза и подвижного основания. Манипулятор имеет антропоморфную структуру: шесть звеньев соединены между собой и с основанием цилиндрическими шарнирами. Выполнение транспортных операций обеспечивается двумя длинными звеньями, соответствующими плечу и локтю, звенья кисти и предплечья — короткие. Расчетная схема приведена на фигуре. Пронумеруем элементы системы следующим образом: 1 — основание, 2—7 — звенья манипулятора, 8 — переносимый груз. Шарнирам присвоим номера от 2 до 7. Основание, груз и короткие звенья считаем абсолютно твердыми телами, длинные звенья 3 и 4 — упругими стержнями с переменными по длине массовыми, инерционными и жесткостными характеристиками.

Для описания податливости шарниров примем схему, описанную в [4]. Упругость соединения звеньев  $(k-1)$  и  $k$  в шарнире  $k$  в направлении управляющего момента определяется жесткостью редуктора, в перпендикулярных направлениях — жесткостью конструкции. Получим уравнения, описывающие динамику такой упругой механической системы с учетом динамических свойств управляющих двигателей.

Движение элементов будем рассматривать относительно некоторого исходного положения, заданного углами  $\varphi_k$  ( $k=2, 7$ ) между звеньями манипулятора в плоскостях, перпендикулярных направлениям управляющих воздействий. Примем, что влияние упругости конструкции проявляется в линейных смещениях и поворотах жестких



звеньев и твердых тел, в изгибных и крутильных деформациях упругих звеньев. Упругие деформации конструкции считаем малыми и описываем их линейными зависимостями. Учитывая, в общем случае, подвижность основания, полагаем перемещение системы во время манипулирования медленным по сравнению с относительным движением элементов. Поэтому слагаемыми с центробежным и кориолисовым ускорениями пренебрегаем по сравнению со слагаемыми, содержащими ускорения относительного движения элементов.

Введем следующие правые системы координат: 1.  $O^*X^*Y^*Z^*$  — инерциальная; 2.  $OXYZ$  — связанная с рассматриваемой механической системой жестких и упругих тел (начало в центре масс, оси координат направлены по главным центральным осям инерции системы); 3.  $O_kX_kY_kZ_k$  — связанные с элементами в исходной жесткой конфигурации (для  $k=1, 8$  начало в центре масс твердого тела, оси координат совпадают с главными центральными осями инерции; для  $k=2, 7$  начало в шарнире  $k$ , ось  $O_kX_k$  направлена вдоль звена, ось  $O_kY_k$  параллельна плоскости локтевого шарнира — плоскости, образованной звеньями 3 и 4) 4.  $O_k^\circ X_k^\circ Y_k^\circ Z_k^\circ$  — связанные с элементами системы при упругих колебаниях (для  $k=1, 2, 5, 8$  положения координатных осей аналогичны выбранным для систем  $O_kX_kY_kZ_k$ , для  $k=3, 4$  координатные оси связаны с сечением, положение которого задается координатой  $x_k$  в системе  $O_kX_kY_kZ_k$ : начало совпадает с точкой, в которую перемещается сечение при упругих колебаниях, ось  $O_k^\circ X_k^\circ$  направлена по касательной к нейтральной оси, ось  $O_k^\circ Y_k^\circ$  — по нормали в плоскости локтевого шарнира). Относительное положение систем координат определим векторами смещения начала координат и поворота осей:  $OXYZ$  относительно  $O^*X^*Y^*Z^*$  — векторами  $\mathbf{r}$  и  $\Phi$  перемещения и поворота системы тел в инерциальном пространстве;  $O_kX_kY_kZ_k$  относительно  $OXYZ$  — вектором смещения  $\mathbf{r}_{0k}$  и для  $k=2, 8$  относительно  $O_{k-1}X_{k-1}Y_{k-1}Z_{k-1}$  — вектором поворота  $\Phi_k^\circ$  элемента в исходной конфигурации;  $O_k^\circ X_k^\circ Y_k^\circ Z_k^\circ$  относительно  $O_kX_kY_kZ_k$  — векторами  $\mathbf{u}_k(x_k)$  и  $\Phi_k(x_k)$  линейных и угловых отклонений. В качестве независимых обобщенных координат выберем: для описания положения системы тел относительно инерциальной системы координат — проекции вектора смещения  $\mathbf{r}$  на оси системы координат  $O^*X^*Y^*Z^*$  и компоненты вектора поворота  $\Phi$ ; для описания перемещений твердых тел и жестких звеньев  $k=1, 2, 5, 8$  — компоненты векторов  $\Phi_k$ ; для описания перемещений упругих звеньев  $k=3, 4$  — проекции векторов  $\mathbf{u}_k(x_k)$  линейного смещения точек звена на оси системы координат  $O_kX_kY_kZ_k$  и углы кручения  $(\Phi_k)_x$ , являющиеся одной из компонент вектора-столбца  $\Phi_k$ :

$$\Phi_k(x_k) = [(\Phi_k)_x, -\partial(u_k)_z/\partial x_k, \partial(u_k)_y/\partial x_k]^T$$

Индексами  $x, y, z$  обозначены проекции векторов на оси системы координат  $O_kX_kY_kZ_k$ .

Для твердых тел и жестких звеньев запишем уравнения изменения количества движения и кинетического момента, для упругих звеньев — уравнения продольного смещения, изгибных и крутильных деформаций

$$m_k \mathbf{w}_k = \mathbf{R}_k - \mathbf{R}_{k+1} + \mathbf{P}_k^\circ \quad (k=1, 2, 5, 8) \quad (1.1)$$

$$I_{0k} \boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{M}_k - \mathbf{M}_{k+1} - \mathbf{L}_{Tk} \times \mathbf{R}_{k+1} - \mathbf{L}_{Tk} \times \mathbf{R}_k + \mathbf{M}_k^\circ \quad (k=1, 8)$$

$$I_{0k} \boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{M}_k - \mathbf{M}_{k+1} - \mathbf{L}_{Tk} \times \mathbf{R}_k - (\mathbf{L}_k - \mathbf{L}_{Tk}) \times \mathbf{R}_{k+1} + \mathbf{M}_k^\circ \quad (k=2, 5, 6, 7)$$

$$\int_0^{l_k} \mu_k(w_k)_x dx_k = (R_k)_x - (R_{k+1})_x + (P_k^\circ)_x$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left[ E_k I_k \frac{\partial^2 (u_k)_y}{\partial x_k^2} \right] = -\mu_k(w_k)_y + [p_k^\circ(x_k)]_y$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left[ E_k I_k \frac{\partial^2 (u_k)_z}{\partial x_k^2} \right] = -\mu_k(w_k)_z + [p_k^\circ(x_k)]_z$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ G_k I_{pk} \frac{\partial (\Phi_k)_x}{\partial x_k} \right] = i_{xk}(\varepsilon_k)_x + [m_k^\circ(x_k)]_x \quad (k=3, 4),$$

$$\varepsilon_k = \Phi'' + \overline{\Phi_k''} \quad (k=1, 8)$$

$$w_1 = u_3''(0) - \Phi_2'' \times L_2 - \Phi_1'' \times L_{T1} + r'' + \Phi'' \times r_{01}$$

$$w_2 = u_3''(0) - \Phi_2'' \times (L_2 - L_{T2}) + r'' + \Phi'' \times (r_{02} + L_{T2})$$

$$w_k = u_k''(l_k) + \sum_{j=5}^{k-1} (\Phi_j'' \times L_j) + \Phi_k'' \times L_{T_k} + r'' + \Phi'' \times (r_{0k} + L_{T_k}) \quad (k=5, 8)$$

$$w_k(x_k) = u_k''(x_k) + r'' + \Phi'' \times (r_{0k} + r_k) \quad (k=3, 4)$$

где точки сверху означают производные по времени, а результат суммирования аннулируется, если верхний предел меньше нижнего.

Граничные условия в соединениях звеньев имеют вид

$$E_k I_k \frac{\partial^2 (u_k)_y}{\partial x_k^2} \Big|_{x_k=0} = -(M_k)_z, \quad E_k I_k \frac{\partial^2 (u_k)_y}{\partial x_k^2} \Big|_{x_k=l_k} = -(M_{k+1})_z$$

$$E_k I_k \frac{\partial^2 (u_k)_z}{\partial x_k^2} \Big|_{x_k=0} = (M_k)_y, \quad E_k I_k \frac{\partial^2 (u_k)_z}{\partial x_k^2} \Big|_{x_k=l_k} = (M_{k+1})_y$$

$$G_k I_{pk} \frac{\partial (\Phi_k)_x}{\partial x_k} \Big|_{x_k=0} = -(M_k)_x, \quad G_k I_{pk} \frac{\partial (\Phi_k)_x}{\partial x_k} \Big|_{x_k=l_k} = -(M_{k+1})_x$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ E_k I_k \frac{\partial^2 (u_k)_y}{\partial x_k^2} \right] \Big|_{x_k=0} = (R_k)_y, \quad \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ E_k I_k \frac{\partial^2 (u_k)_y}{\partial x_k^2} \right] \Big|_{x_k=l_k} = (R_{k+1})_y$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ E_k I_k \frac{\partial^2 (u_k)_z}{\partial x_k^2} \right] \Big|_{x_k=0} = (R_k)_z, \quad \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ E_k I_k \frac{\partial^2 (u_k)_z}{\partial x_k^2} \right] \Big|_{x_k=l_k} = (R_{k+1})_z \quad (k=3, 4)$$

Приняты следующие обозначения:  $m_k, I_{0k}$  — масса и тензор инерции в центре масс элемента системы,  $\mu_k(x_k), i_{xk}(x_k)$  — погонная масса и погонный момент инерции звена манипулятора,  $E_k I_k(x_k), G_k I_{pk}(x_k)$  — изгибная и крутильная жесткости звена,  $L_k$  — вектор, соединяющий точки  $k$  и  $(k+1)$ ,  $l_k = |L_k|$ ,  $L_{T1}$  — вектор, соединяющий центр масс тела 1 с точкой 2,  $L_{T8}$  — вектор, соединяющий схват с центром масс тела 8,  $r_k$  ( $k=3, 4$ ),  $L_{T_k}$  ( $k=2, 7$ ) — радиусы-векторы произвольного сечения и центра масс звена в системе координат  $O_k X_k Y_k Z_k$ ,  $R_k, M_k$  — силы и моменты в точках сопряжения элементов ( $R_1 = R_9 = 0, M_1 M_9 = 0$ ),  $P_k^\circ, M_k^\circ, p_k^\circ(x_k), m_k^\circ(x_k)$  — сосредоточенные и распределенные внешние силы и моменты. Силовые условия сопряжения в соединениях элементов учтены при выборе правил знаков сил и моментов в шарнирах, кинематические условия сопряжения — при определении ускорений  $w_k$ .

Управляющими воздействиями являются моменты в шарнирах. Выражения для моментов запишем в виде линейной функции разности двух векторов — вектора  $\Phi_{gk}$  отклонения вала управляющего двигателя, приведенного к оси шарнира, и вектора  $\Phi_k^\circ + \Phi_k(0) - \Phi_{k-1}(l_{k-1})$  относительного поворота звеньев, примыкающих к шарниру. Через  $C_k$  обозначим диагональную матрицу размерности  $(3 \times 3)$  жесткостей шарнира в трех взаимно перпендикулярных направлениях

$$M_k = C_k [\Phi_{gk} - \Phi_k^\circ - \Phi_k(0) + \Phi_{k-1}(l_{k-1})] \quad (1.2)$$

2. Преобразуем уравнения движения элементов к системе обыкновенных дифференциальных уравнений методом Бубнова — Галеркина. Решение записывается в виде ряда, каждый член которого представляет собой произведение двух функций, одна из которых характеризует распределение амплитуд перемещений по длине элементов, вторая — зависит от времени. Обозначим через  $v_{hi}$  и  $\alpha_{hi}$  векторы линейных и угловых координат

ных функций системы

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{hi} &= [\xi_{hi}, \eta_{hi}, \zeta_{hi}]^T \quad (k=\overline{1, 8}) \\ \alpha_{hi} &= [(\alpha_{hi})_x, (\alpha_{hi})_y, (\alpha_{hi})_z]^T \quad (k=1, 2, \overline{5, 8}) \\ \alpha_{hi} &= [(\alpha_{hi})_x, -\partial\zeta_{hi}/\partial x_h, \partial\eta_{hi}/\partial x_h]^T \quad (k=3, 4) \end{aligned}$$

где  $\xi_{hi}, \eta_{hi}(x_h), \zeta_{hi}(x_h)$  — координатные функции продольного и поперечных линейных смещений;  $(\alpha_{hi})_x, (\alpha_{hi})_y, (\alpha_{hi})_z$  — координатные функции поворотов относительно продольной и поперечных осей элемента. Через  $q_i(t)$  обозначим обобщенные координаты — функции времени. Упругие смещения представим в виде

$$\Phi_k = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{hi} q_i, \quad \mathbf{u}_k = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{v}_{hi} q_i \quad (2.1)$$

После преобразования получим уравнение

$$\sum_{i=1}^{\infty} (M_{ij} \ddot{q}_i + E_{ij} q_i) + \sum_{k=2}^7 [B_{kj} \cdot (\Phi_{gh} - \Phi_h^{\circ})] + R_j \cdot \mathbf{r}'' + F_j \cdot \Phi'' + h_j = 0 \quad (j=1, 2, \dots) \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \sum_{h=3}^4 \int_0^{l_k} [\mu_h \mathbf{v}_{hi} \cdot \mathbf{v}_{hj} + i_{xh} (\alpha_{hi})_x (\alpha_{hj})_x] dx_h + \\ &+ \sum_{h=1}^8 [I_{0h} \alpha_{hi} \cdot \alpha_{hj} + m_h \mathbf{v}_{hi}(x_{Th}) \cdot \mathbf{v}_{hj}(x_{Th})] \\ E_{ij} &= \sum_{h=3}^4 \int_0^{l_k} \left[ E_h I_h \left( \frac{\partial^2 \eta_{hi}}{\partial x_h^2} \frac{\partial^2 \eta_{hj}}{\partial x_h^2} + \frac{\partial^2 \zeta_{hi}}{\partial x_h^2} \frac{\partial^2 \zeta_{hj}}{\partial x_h^2} \right) + \right. \\ &+ G_h I_{ph} \frac{\partial (\alpha_{hi})_x}{\partial x_h} \frac{\partial (\alpha_{hj})_x}{\partial x_h} \left. \right] dx_h + \sum_{h=2}^7 C_h \delta_{hi} \cdot \delta_{hj} \\ B_{kj} &= -C_h \delta_{kj}, \quad R_j = \sum_{h=3}^4 \int_0^{l_k} \mu_h \mathbf{v}_{hj} dx_h + \sum_{h=1}^8 m_h \mathbf{v}_{hj}(x_{Th}) \\ F_j &= \sum_{h=3}^4 \int_0^{l_k} \mu_h [(\mathbf{r}_{0h} + \mathbf{r}_h) \times \mathbf{v}_{hj}] dx_h + \sum_{h=1}^8 [m_h \mathbf{r}_{0h} \times \mathbf{v}_{hj}(x_{Th}) + I_{0h} \alpha_{hj}] + F_j^* \\ F_j^* &= \left[ \sum_{h=3}^4 \int_0^{l_k} i_{xh} (\alpha_{hj})_x dx_h, 0, 0 \right]^T \\ h_j &= - \sum_{h=3}^4 \int_0^{l_k} (\mathbf{p}_h^{\circ} \cdot \mathbf{v}_{hj} + \mathbf{m}_h^{\circ} \cdot \alpha_{hj}) dx_h - \sum_{h=1}^8 [\mathbf{P}_h^{\circ} \cdot \mathbf{v}_{hj}(x_{Th}) + \mathbf{M}_h^{\circ} \cdot \alpha_{hj}] \end{aligned}$$

Здесь и далее знаки суммы со штрихом сверху не охватывают слагаемые  $k=3, 4$ ,  $x_{Th}$  — координата центра масс элемента, а через

$$\delta_{hi} = \alpha_{hi}(0) - \alpha_{(h-1)i}(l_{h-1}) \quad (2.3)$$

обозначен вектор относительных угловых поворотов в шарнире  $k$ .

3. Для определения собственных частот и координатных функций решим задачу о собственных колебаниях рассматриваемой системы, представляющей цепочку твердых тел и упругих стержней. Методы решения таких задач известны. Уравнения собственных колебаний системы получим из (1.1) при  $\mathbf{r}'' = \Phi'' = \mathbf{P}_h^{\circ} = \mathbf{M}_h^{\circ} = \mathbf{p}_h^{\circ} = \mathbf{m}_h^{\circ} = 0$  и  $\Phi_h^{\circ} = \Phi_{gh}$ . Граничные условия определяются условиями функционирования робота: для свободно

перемещающихся основания и груза — это условия равенства нулю сил и моментов на концах системы, для робота на неподвижном основании — условие равенства нулю перемещений тела  $I$ . Следует учесть, что в случае свободной системы тел первые шесть тонов колебаний с нулевыми собственными частотами соответствуют поступательному и вращательному движению системы как единого целого. Следующие тона описывают упругие колебания. Число тонов, которым можно ограничиться при моделировании движений робота, не менее числа шарниров и зависит от соотношения жесткостных характеристик звеньев и шарниров, а также определяется целями исследования.

Если координатными являются собственные функции системы, то выполняются условия ортогональности  $M_{ij}=0$ ,  $E_{ij}=0$  ( $i, j=1, 2, \dots; i \neq j$ ) и уравнения (2.2) существенно упрощаются.

Учтем, что в каждом шарнире управляемое движение осуществляется относительно одной оси. Векторы  $\Phi_k^0$  и  $\Phi_{gk}$  имеют одну компоненту значащую и две компоненты нулевые. Значащими компонентами вектора  $\Phi_k^0$  являются углы  $\varphi_k$  ( $k=2, 7$ ) между звеньями манипулятора в исходной конфигурации, значащими компонентами вектора  $\Phi_{gk}$  — углы  $\varphi_{gk}$  поворота валов управляющих двигателей, приведенные к осям шарниров. Введем шестимерные (по числу шарниров) векторы  $Z^0=[z_k^0]$ ,  $z_k^0=\varphi_{k-1}$ ;  $Y=[y_k]$ ,  $y_k=\varphi_{g(k-1)}$  и  $n$ -мерный (по числу учитываемых тонов упругих колебаний) вектор обобщенных координат  $Q=[q_i]$ . Уравнение движения системы получим в виде

$$Q'' + \Omega Q + B(Y - Z^0) + F_1 r'' + F_2 \Phi'' + F_3 = 0 \quad (3.1)$$

где  $\Omega$  — диагональная матрица размерности  $(n \times n)$  квадратов собственных частот системы,  $B, F_1, F_2, F_3$  — матрицы соответствующих размерностей, определяемые соотношениями  $B = -M_*^{-1} D^T C_g$ ,  $F_2 = M_*^{-1} F$ ,  $F_1 = M_*^{-1} R$ ,  $F_3 = -M_*^{-1} H$ . В этих соотношениях  $M_*$  — диагональная матрица размерности  $(n \times n)$  приведенных масс  $M_{ii}$ :

$$M_{ii} = \sum_{k=3}^4 \int_0^{l_k} [\mu_k v_{ki}^2 + i_{zk} (\alpha_{ki})_x^2] dx_k + \sum_{k=1}^8 [I_{0k} \alpha_{ki}^2 + m_k v_{ki}^2(x_{Tk})]$$

Здесь  $D$  — матрица размерности  $(6 \times n)$ , составленная из тех компонентов векторов  $\delta_{ki}$  (2.3), которые соответствуют направлениям управляющих воздействий;  $C_g$  — диагональная матрица размерности  $(6 \times 6)$  жесткостей приводов исполнительной системы, составленная из элементов матриц  $C_k$  — жесткостей шарниров в направлении управляющих воздействий;  $R, F$  — матрицы размерности  $(n \times 3)$ , строками которых являются векторы  $R_i, F_i$ ;  $H$  — вектор размерности  $n$ , составленный из коэффициентов  $h_i$ .

Уравнение (3.1) описывает движение как смещение элементов системы относительно неизменной исходной конфигурации, заданной вектором  $Z^0$ . В случае, когда робот предназначен для перемещения груза на расстоянии, соизмеримые с геометрическими размерами манипуляционного механизма, смещения элементов относительно исходной конфигурации не могут быть описаны в рамках линейной теории. Введение подвижной конфигурации для отсчета смещений позволяет расширить область применимости полученного уравнения.

Пусть вектор  $Z^0(t)$  описывает некоторое заданное, программное изменение конфигурации, соответствующее выполняемой операции. Смещение элементов системы в каждый момент времени будем отсчитывать относительно их положения в этой конфигурации. Форма записи уравнений (1.1) не изменится, но в выражениях для ускорений элементов  $\epsilon_k$  и  $w_k$  добавляются слагаемые  $\Delta \epsilon_k, \Delta w_k$  с переносным ускорением, обусловленным подвижностью конфигурации. Обозначим через  $\epsilon_1^*$  и  $w_1^*$  векторы углового и линейного ускорения основания — тела  $I$  при изменении конфигурации. Учтем вращательные составляющие, обусловленные ускорениями относительного поворота звеньев  $\varphi_k''$ . Центробежными и кориолисовыми составляющими пренебрегаем по малости угловых скоростей поворота звеньев по сравнению с низшими частотами упругих колебаний [1].

Добавочные слагаемые определяются соотношениями:

$$\Delta w_1 = w_1^*, \quad \Delta \varepsilon_1 = \varepsilon_1^*, \quad \Delta \varepsilon_k = \varepsilon_1^* + \sum_{l=2}^k \Phi_l^{\circ\circ} \quad (k=2, \overline{8})$$

$$\Delta w_k = w_1^* + \varepsilon_1^* \times (r_{0k} + L_{Tk}) + \sum_{l=2}^k \left[ \Phi_l^{\circ\circ} \times \left( \sum_{m=l}^{k-1} L_m + L_{Tk} \right) \right] \quad (k=2, \overline{5, 8})$$

$$\Delta w_k = w_1^* + \varepsilon_1^* \times (r_{0k} + r_k) + \sum_{l=2}^k \left[ \Phi_l^{\circ\circ} \times \left( \sum_{m=2}^{k-1} L_m + r_k \right) \right] \quad (k=3, 4)$$

Дополнительные члены в уравнении (2.2) имеют вид

$$\sum_{k=1}^8 [m_k \Delta w_k \cdot v_{kj}(x_{Tk}) + I_{0k} \Delta \varepsilon_k \cdot \alpha_{kj}] + \sum_{k=3}^4 \left( \int_0^{l_k} \mu_k \Delta w_k \cdot v_{kj} dx_k + \Delta \varepsilon_k \cdot F_j^* \right)$$

При переходе к уравнению (3.1) слагаемые, пропорциональные  $w_1^*$  и  $\varepsilon_1^*$ , полагаем равными нулю в силу условий ортогональности собственных функций  $j$ -го тона с собственными функциями, описывающими поступательное и вращательное движение системы тел как единого целого. Из слагаемых, пропорциональных угловым ускорениям относительно поворота звеньев, учитывая только значащие компоненты векторов  $\Phi_k^{\circ}$ , формируем слагаемое, содержащее  $Z^{\circ}$ , и записываем уравнение движения (3.1) в виде

$$Q'' + \Omega Q + B(Y - Z^{\circ}) + F_0 Z^{\circ} + F_1 r'' + F_2 \Phi'' + F_3 = 0 \quad (3.2)$$

где матрица  $F_0$  размерности  $(n \times 6)$  составлена из тех элементов трехмерных строк

$$f_{il} = - \frac{1}{M_{ii}} \left\{ \sum_{k=l+1}^8 [m_k v_{ki}^T(x_{Tk}) (L_{kl} \checkmark + L_{Tk} \checkmark) - \alpha_{ki}^T I_{0k}] H_{lk} + \sum_{k=3}^4 \left[ \int_0^{l_k} \mu_k v_{ki}^T (L_{kl} \checkmark + r_k \checkmark) dx_k - F_j^{*T} \right] H_{lk} \right\}$$

которые соответствуют месту значащей компоненты  $\phi_k$  в векторе  $\Phi_k^{\circ}$ . Двойной индекс в обозначении матрицы-строки соответствует индексу элемента в матрице  $F_0$  ( $i=1, n$ ;  $l=1, 6$ ). Используется матричная запись векторов в проекциях на оси связанных с соответствующими элементами систем координат

$$L_{ki} = \sum_{m=1}^{k-1} H_{mk} L_m$$

$H_{lk}$ ,  $H_{mk}$  — матрицы перехода от систем координат  $O_l X_l Y_l Z_l$ ,  $O_m X_m Y_m Z_m$  к системе координат  $O_k X_k Y_k Z_k$ ; галочкой обозначена косимметричная матрица, знак суммы с двумя штрихами вверху охватывает только слагаемые с  $k > l$ .

Дополним уравнение движения соотношениями для определения смещения груза, углов и моментов в шарнирах. Шестимерный вектор  $S_8$  координат линейного и углового смещения груза составим из проекций векторов  $u_8(x_{T8})$  и  $\Phi_8$  на оси системы координат  $O_8 X_8 Y_8 Z_8$ , связанной с исходным положением груза. Введем матрицу  $G_8$  размерности  $(6 \times n)$ , элементами которой являются координатные функции — компоненты векторов  $v_{8i}(x_{T8})$  и  $\alpha_{8i}$ . На основании выражения (2.1) для определения  $S_8$  имеем  $S_8 = G_8 Q$ . Вектор углов в шарнирах обозначим  $Z = [z_k] (k=1, 6)$  и определим его составляющие как углы между деформированными звеньями в плоскостях, перпендикулярных направлениям управляющих воздействий:  $Z = Z^{\circ} + DQ$ . Век-

тор движущих моментов в шарнирах  $M_g = [m_{gh}]$  ( $k=1, 6$ ) составим из компонент векторов  $M_h$  (1.2), соответствующих направлениям управляющих воздействий  $M_g = C_g(Y-Z)$ . Уравнения (3.1) или (3.2) с выписанными соотношениями для  $S_s, Z, M_g$  представляют собой математическую модель манипуляционного робота как управляемой системы тел основание – манипулятор – переносимый груз.

Учтем динамику приводов в шарнирах. Запишем уравнение движения исполнительской системы. Примем, что приводными элементами являются электродвигатели постоянного тока с независимым возбуждением [7]. Используя введенные ранее обозначения  $u_k, m_{gh}$  для угла поворота вала двигателя, приведенного к оси шарнира, и движущего момента, запишем уравнение двигателя

$$u_k = k_{\omega k} i_k T_k Y_k^{**} + k_{\omega k} i_k u_k^* + R_{gh} m_{gh} / (k_{mk} i_k)$$

где  $T_k = R_{gh} I_{gh} / (k_{mk} k_{\omega k})$  – механическая постоянная времени,  $R_{gh}$  – сопротивление якорной обмотки,  $I_{gh}$  – момент инерции ротора,  $k_{mk}, k_{\omega k}$  – коэффициенты пропорциональности,  $i_k$  – передаточное число редуктора,  $u_k$  – управляющее напряжение. Преобразуем это уравнение, используя выражение для  $M_g$ , и учтем, что исполнительная система включает шесть двигателей

$$Y^{**} + T^{-1} Y^* + G_1 C_g (Y - Z^0 - DQ) + G_2 U = 0 \quad (3.3)$$

$$T = \text{diag} [T_k], \quad G_1 = \text{diag} [(I_{gh} i_k^2)^{-1}]$$

$$G_2 = \text{diag} [k_{mk} (R_{gh} I_{gh} i_k)^{-1}] \quad (k=1, 6)$$

где  $U = [u_k]$  ( $k=1, 6$ ) – вектор управляющих напряжений. Задавая вектор  $U$  в соответствии с принятым алгоритмом управления:  $U = U(Y, Z, Z^0)$ , с помощью уравнений (3.2), (3.3) можно моделировать переходные процессы в замкнутой системе с учетом динамики приводов.

Преимуществом предлагаемой модели, являющимся следствием более полного математического описания механизма, является расширение области исследования динамических особенностей системы: моделирование движения не только нагруженного, но и ненагруженного манипулятора, анализ влияния внешних сил, подвижности оснований, жесткостных и массовых характеристик механизма на процесс манипулирования и точность позиционирования. Модель предназначена для уточненных исследований, целью которых является воспроизведение динамики, максимально приближенно к реальным условиям функционирования робота. Использование такой модели целесообразно при решении некоторых типовых динамических задач, требующих многократного интегрирования, например задачи, связанной с выбором алгоритма управления и оценкой точности движения по заданной траектории. На первом, подготовительном, этапе в соответствии с заданной траекторией или программой движения для нескольких конфигураций манипулятора решается задача о собственных колебаниях. Результаты решения в виде матриц коэффициентов в функции времени используются на втором этапе для интегрирования уравнений. Задание переменных коэффициентов по сравнению с их вычислением на каждом шаге интегрирования существенно уменьшает затраты машинного времени на моделирование процесса манипулирования.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Акуленко Л. Д., Михайлов С. А., Черноусько Ф. Л. Моделирование динамики манипулятора с упругими звеньями. – Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 3, с. 118–124.
2. Разманов Е. В., Стрелков А. Н., Шведов В. Н. Разработка математической модели упругого манипулятора на подвижном основании. – Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1981, № 4, с. 109–114.
3. Гориневский Д. М. О динамике манипулятора с учетом податливости шарниров. – Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 6, с. 43–48.
4. Исполов Ю. Г., Сабалин А. Д., Сорин В. М. Упругие колебания электромеханического робота. – В кн.: Робототехника. Межвуз. сб. Л.: Изд-е Ленингр. политех. ин-та, 1977, с. 81–87.
5. Акуленко Л. Д., Гукасян А. А. Управление плоскими движениями упругого звена манипулятора. – Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 5, с. 33–41.
6. Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н. Об управлении поворотом упругого звена манипулятора. – Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1984, № 1, с. 167–173.
7. Лакота Н. А., Разманов Е. В., Шведов В. Н. Управление упругим манипулятором на траектории. – Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1980, № 2, с. 53–59.

Днепропетровск

Поступила в редакцию  
1.IX.1986