

УДК 531.8

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ МАНИПУЛЯТОРОВ С УПРУГИМИ ШАРНИРАМИ

ЗАК В. Л., ПИРУМОВ Г. У., РОГОВ Н. Н.

Целью работы является создание алгоритма автоматического формирования математической модели пространственного манипулятора с дальнейшим использованием этой модели для решения задач динамического и кинематического управления манипулятором. В ряде работ (см., например, [1–3]¹) были созданы алгоритмы такого типа в предположении, что манипулятор представляет собой систему твердых тел (жесткая модель). Современные требования точности функционирования манипуляционных роботов делают необходимым учет эффектов, обусловленных упругой податливостью их конструкций. Для широкого класса промышленных роботов-манипуляторов упругая податливость в основном сосредоточена в узлах соединений (см., например, [4]²). Исходя из этого, в работе рассмотрена модель манипулятора с абсолютно жесткими звеньями и упругими узлами соединения, что позволило для учета упругой податливости привлечь асимптотический подход, предложенный в [5]. Уравнения жесткой модели формируются по методике [1]. Полученный таким образом полуаналитический метод исследования позволяет производить полный анализ динамики манипулятора и требует меньших вычислительных затрат по сравнению с подходом, основанным на методе конечных элементов [6–8]. Другие подходы к учету упругости звеньев изложены в [9, 10].

1. Описание модели и постановка задачи. Под манипулятором будем понимать систему массивных твердых тел (звеньев) между которыми имеются кинематические связи посредством шарниров. Связи предполагаются идеальными, т. е. силы реакций связей не совершают работы на возможных перемещениях. Шарниры манипулятора снабжены приводами. Управление манипулятором осуществляется посредством моментов, развиваемых этими приводами. Рассматриваются следующие типы шарниров: цилиндрические, универсальные и сферические (с одной, двумя и тремя вращательными степенями свободы соответственно). Для каждого шарнира определим ось (или оси) и центр. Под осями шарниров будем понимать их конструктивные оси. Центром универсального и сферического шарниров назовем точку пересечения их осей, а центром цилиндрического шарнира — середину его оси.

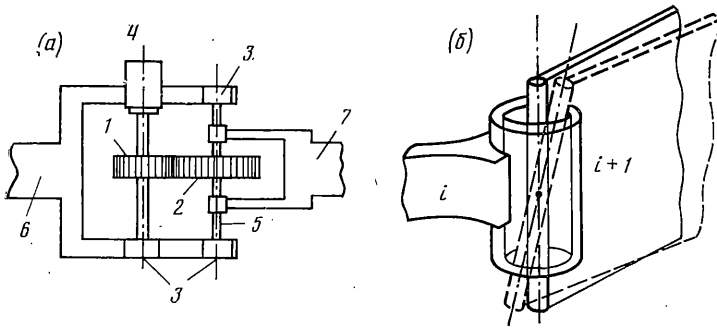
Будем считать, что упругая податливость сосредоточена в шарнирах и проявляется следующим образом:

1°. происходит упругий поворот оси шарнира в крепящих ее элементах, что приводит к смещению звена манипулятора в плоскости вращения этого звена вокруг данной оси (см. фиг. 1, а, где 3 — подшипник, 4 — двигатель, 5 — ось шарнира, 6 — звено i , 7 — звено $i+1$), где указанный поворот может быть вызван деформацией зубьев зубчатых колес 1 и 2;

2°. происходит поворот оси шарнира относительно центра шарнира, что приводит к выходу звена из плоскости вращения вокруг данной оси (см. фиг. 1, б).

¹ Кириченко Н. Ф., Сорока Р. А., Крак Ю. В. Математическое описание и моделирование на ЭВМ манипуляционных роботов. — Препринт Ин-та кибернетики АН УССР. Киев, 1985, № 85. 25 с.

² Черноусько Ф. Л., Градецкий В. Г., Гукасян А. А., Вешников В. Б., Самвелян К. В., Степанов В. П., Шушко Д. А. Анализ упругой податливости конструкции манипуляционных роботов. — Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1984, № 231. 66 с.



Фиг. 1

Будем предполагать, что жесткость шарниров велика и пропорциональна ϵ^{-2} , где $\epsilon \ll 1$ — малый параметр. В пределе при $\epsilon \rightarrow 0$ упругость шарниров исчезает, появляются дополнительные идеальные связи и приходим к жесткой модели.

Для описания упругой системы введем две группы координат: $s = (s_1, \dots, s_n)$, где n — число степеней свободы жесткой системы, и $x = (x_1, \dots, x_m)$, характеризующие упругость в шарнирах. Координаты x выберем так, что $x \rightarrow 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$. Эволюция координат s , вообще говоря, тоже может зависеть от ϵ . В пределе при $\epsilon \rightarrow 0$ координаты s переходят в полный набор координат жесткой модели.

Для удобства описания системы будем рассматривать также координаты $q = (q_1, \dots, q_N)$, характеризующие положение всех инерционных элементов (весомых звеньев, груза и т. д.). Тогда описание упругости шарниров конкретного манипулятора сведется к заданию матрицы жесткости и связи вида (f — некоторая вектор-функция):

$$q = f(s, x) \quad (1.1)$$

Исследуются следующие две задачи.

Задача кинематического управления (задача I). Дан закон изменения обобщенных координат $s^0(t)$. Найти функции $x(t)$, $q(t)$, а также управляющие моменты $M(t)$, обеспечивающие реализацию зависимости $s^0(t)$, при условии, что заданы начальные значения $x(0)$ и $\dot{x}(0)$.

Задача динамического управления (задача II). Дан закон изменения управляющих моментов $M = M(t)$. Найти функции $s(t)$, $x(t)$ и $q(t)$ при условии, что известны начальные значения $s(0)$ и $\dot{s}(0)$.

2. Схема решения. Решение задачи распадается на два этапа. Сначала применяется асимптотический подход [5]. Для задачи I это позволяет свести исходные сингулярно возмущенные уравнения движения к уравнениям, не содержащим быстрых переменных, после чего члены, определяющие влияние упругой податливости, могут быть найдены в аналитическом виде. Для задачи II — дает возможность заменить исходные уравнения движения на уравнения, эквивалентные жесткой модели.

Второй этап сводится к численному исследованию уравнений движения, эквивалентных жесткой модели (кинематическое управление) или вспомогательной системе, отличающейся от жесткой модели лишь начальными условиями и управляющими моментами (динамическое управление).

3. Автоматическое составление уравнений движения. Движение рассматриваемой механической системы описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка (типа уравнений Лагранжа). Так как порядок такой системы может быть достаточно высок, аналитическое написание уравнений оказывается чрезвычайно трудоемким. Аналогичная ситуация возникает и в других «больших» механических системах. Поэтому для исследования движения таких систем были разработаны подходы, использующие ЭВМ не на стадии интегрирования уже написанных уравнений, а на стадии формирования самих уравнений движения (см., например, [1–3]). В данной работе используется методика автоматического составления уравнений движения, предложенная в [1] для систем твердых тел.

Ниже приводится краткое описание алгоритма численного моделирования динамики многосвязных манипуляторов.

Входной информацией для численного моделирования является набор геометрических, инерционных и упругих характеристик манипулятора. С каждым звеном манипулятора свяжем декартову прямоугольную систему координат с началом в центре масс звена. Тогда набор входных параметров можно описать следующим образом: число звеньев манипулятора; число цилиндрических, универсальных и сферических шарниров; порядок следования шарниров; масса каждого звена; компоненты центрального тензора инерции каждого звена в системе координат, связанной с этим звеном; компоненты радиус-вектора центра масс каждого звена в системе координат, связанной с этим звеном; направляющие косинусы осей шарниров манипулятора в системах координат, связанных с соответствующими звеньями; для каждой пары соседних звеньев две матрицы, зависящие от выбора систем координат, связанных с этими звеньями, и направления осей соединяющего их шарнира; коэффициенты упругости каждого шарнира; главные векторы и главные моменты внешних сил, действующих на каждое из звеньев манипулятора, в виде функций обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени; начальные данные для задачи кинематического и динамического управления соответственно.

Уравнения движения жесткого манипулятора выводятся из теорем об изменении импульса и момента импульса для каждого звена манипулятора, рассматриваемого как абсолютно твердое тело. Составление уравнений осуществляется автоматически на ЭВМ на основе указанной выше информации. Получаемые таким образом уравнения имеют вид

$$A(s) \ddot{s} = B(s, \dot{s}, t) + M(t) \quad (3.1)$$

Здесь $A(s)$ — матрица кинетической энергии системы, $B(s, \dot{s}, t)$ — вектор-функция, в которую выходят слагаемые, обусловленные кинетической энергией системы и внешними силами, приложенными к звеньям манипулятора, $M(t)$ — вектор управляющих моментов, вырабатываемых приводами.

Замечание. Пусть кинетическая энергия T упругой системы имеет вид $T = 1/2(\dot{q})^T A_q(q) \dot{q}$, где A_q — $N \times N$ -матрица кинетической энергии. Обозначим матрицу кинетической энергии жесткой системы, фигурирующую в уравнении (3.1), через A_s , где A_s имеет размерность $n \times n$. Для нахождения асимптотического разложения необходимо вычислять матрицу $A_q^0 = A_q(f(s^0(t), 0))$, что является, вообще говоря, более сложной задачей, чем вычисление матрицы A_s . В работе предлагается алгоритм решения задачи, основанный на вычислении матрицы A_s для случая $n=N$. При $n=N$ имеем $A_q^0 = A_s$. Условие $n=N$ означает, что для всех цилиндрических шарниров реализуется модель упругости, принятая в случае а) п. 1, а для универсальных шарниров отсутствуют упругие вращения вокруг осей, перпендикулярной плоскости осей шарниров.

Случай $N < n$ не представляет практического интереса, а случай $N > n$ можно свести к $n=N$ с помощью следующего искусственного приема. Введем $N-n$ дополнительных фиктивных цилиндрических шарниров так, чтобы полученная «расширенная» система переходила в исходную при выполнении условий $s_j = 0$, где s_j — дополнительные степени свободы, $j = l_1, l_2, \dots, l_{N-n}$. Для решения задачи I в случае $n < N$ можно применить указанный выше алгоритм к расширенной системе с учетом того, что на номинальной траектории $s_j(t) = 0$. При решении задачи II необходимо определить фиктивные управляющие моменты $M_j(t)$ в фиктивных шарнирах, обеспечивающие выполнение условий $s_j(t) = 0$. Для этого нужно разрешить систему, состоящую из n дифференциальных уравнений второго порядка относительно исходных переменных s_i и $N-n$ алгебраических уравнений, содержащих s_i и M_j , $j = l_1, \dots, l_{N-n}$ ($i = 1, \dots, n$).

4. Кинематическое управление. При решении задачи кинематического управления сначала составляются на ЭВМ уравнения движения жесткой модели. Из этих уравнений определяются квазистатические составляющие управляющих моментов и упругих смещений. Затем, после решения задачи на собственные значения, вычисляются полные упругие смещения $x(t)$ как сумма квазистатической $y(t)$ и колебательной $z(t/\epsilon)$ составляющих. Из формулы (1.1) вычисляются зависимости $q(t)$. Полные управляющие моменты $M(t)$ рассчитываются как сумма квазистатического и колебательного слагаемых.

Начальные амплитуды a_{k0} и фазы ψ_{k0} , $k=1, \dots, m$ для колебательных составляющих определяются в момент времени $t=0$ из начальных усло-

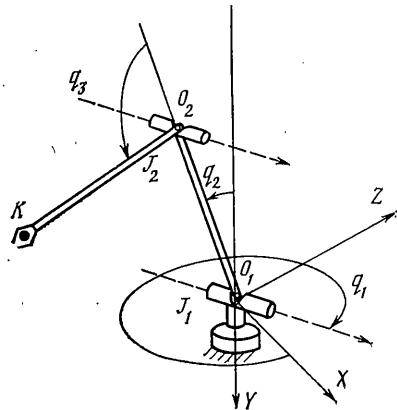
вий $x(0)$ и $x^*(0)$. Если в некоторые моменты времени t_j^* ($j=1, \dots, l$) компоненты вектор-функции $s^{**0}(t) = (s_1^{**0}(t), \dots, s_n^{**0}(t))$ изменяются скачком, то в эти моменты терпит разрыв и квазистатическая составляющая упругого смещения.

Поскольку полное упругое смещение $x(t) = y(t) + z(t/\varepsilon)$ и скорость $\dot{x}(t) = \dot{y}(t) + \dot{z}(t/\varepsilon)$ должны быть непрерывными функциями времени, то для моментов времени t_j^* следует произвести пересчет постоянных a_{h0} и φ_{h0} . Новые значения этих постоянных определяются из условий непрерывности функций $x(t)$, $\dot{x}(t)$ в моменты времени $t = t_j^*$.

Отметим, что собственные частоты $\omega_h(t)$ являются медленно меняющимися функциями времени. Характерное время их изменения существенно превосходит период собственных упругих колебаний манипулятора. Поэтому шаг Δt при расчетах можно взять достаточно большим.

Рассмотрим решение задачи I на примере двухзвенного манипулятора (фиг. 2), имеющего характерную кинематическую схему. Звенья — однородные абсолютно твердые стержни единичной длины и массы. Шарнир J_1 — универсальный со взаимно перпендикулярными осями, а шарнир J_2 — цилиндрический с осью, перпендикулярной плоскости звеньев манипулятора. На конце второго звена в точке K закреплен точечный груз единичной массы. К осям шарниров приложены управляющие моменты M_1, M_2, M_3 . Внешние силы (кроме силы реакции основания) положены равными нулю.

Введем неподвижную декартову систему координат O_1XYZ , полюс которой находится в точке пересечения осей шарнира J_1 , а ось O_1Y направлена вдоль неподвижной оси этого шарнира. Пусть q_1 — угол между осью O_1X и подвижной осью шарнира J_1 , q_2 — угол между звеном O_1O_2 и осью O_1Y и q_3 — угол между звеньями манипулятора. Пусть s_i ($i=1, 2, 3$) — значения углов q_i ($i=1, 2, 3$) при отсутствии деформаций шарниров (обобщенные координаты жесткой модели манипулятора), а x_i ($i=1, 2, 3$) — дополнительные углы поворотов вокруг осей шарниров, обусловленные их упругой податливостью (см. случай 1° п. 1). В рассматриваемом случае соотношение (1.1) имеет вид: $q = s + x$. Направления отсчета углов q_1, q_2, q_3 показаны на фиг. 2. Величины q_1, q_2, q_3 равны нулю, когда подвижная ось шарнира J_1 направлена вдоль прямой O_1X , а звено манипулятора образует отрезок O_1K , принадлежащий оси O_1Y .



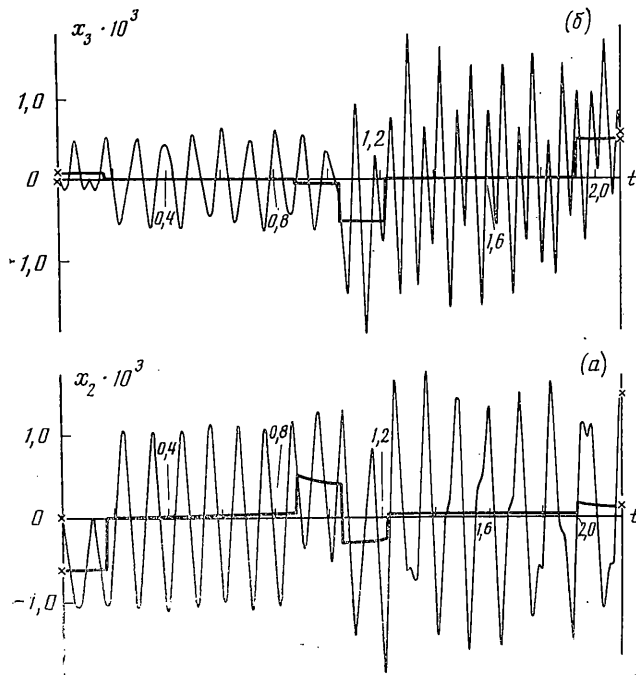
Фиг. 2

Рассматривается такой закон движения жесткой модели, при котором точка K перемещается вдоль ломаной $K_0K_1K_2$, лежащей в плоскости $X = -0,45$, причем $K_0 = (-0,45; -0,82; 0,84)$, $K_1 = (-0,45; -0,82; 0,33)$, $K_2 = (-0,45; -1,42; 0,33)$.

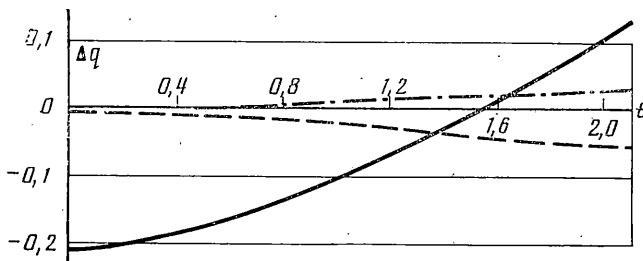
Движение точки K вдоль каждого из отрезков K_0K_1 и K_1K_2 состоит из участка разгона длительностью τ_1 , участка движения с постоянной скоростью V длительностью τ_2 и участка торможения длительностью τ_3 . На участке разгона скорость точки K линейно возрастает от 0 до V , а на участке торможения линейно уменьшается от V до 0. Для отрезка K_0K_1 : $\tau_1 = \tau_3 = 0,17$; $\tau_2 = 0,71$, $V = 0,58$. Для отрезка K_1K_2 : $\tau_1 = \tau_3 = 0,17$; $\tau_2 = 0,71$, $V = 0,68$. Полное время движения $T = 2,1$. Следует отметить, что выбирается такая конфигурация манипулятора, для которой угол s_2 положительный.

В этом случае матрица жесткости диагональна; диагональные члены положим равными $k = 10^4$.

На фиг. 3, а, б приведены зависимости $x_i(t) \cdot 10^3$ ($i=2, 3$) для рассматриваемого примера решения задачи. Жирными линиями изображены квазистатические составляющие $y_i(t)$, которые терпят разрывы в мо-



Фиг. 3



Фиг. 4

менты разрыва зависимостей $s_i^{**}(t)$. В данном случае в силу соотношения $q=s+x$ величины $x_i(t)$ совпадают с упругими отклонениями координат $q_i(t)$ от номинального жесткого режима. Амплитуда колебаний величин $x_i(t)$ характеризует точность позиционирования манипулятора при кинематическом управлении.

5. Динамическое управление. Решение задачи II сводится к численному интегрированию уравнений движения вспомогательной жесткой модели манипулятора при новых (аналитически рассчитанных) начальных условиях. Эти уравнения имеют вид

$$A(\sigma)\sigma'' = B(\sigma, \sigma', t) + M(t) + \Delta M(\sigma, t) \quad (5.1)$$

Здесь σ — n -мерный вектор обобщенных координат вспомогательной жесткой модели манипулятора, A и B — те же матрицы, что и в формуле (3.1), $\Delta M(\sigma, t)$ — дополнительные (по сравнению с исходной жесткой моделью) управляющие моменты приводов, обусловленные упругой податливостью шарниров манипулятора, которые рассчитываются аналитически.

Следует отметить, что эти дополнительные слагаемые не содержат быстро осциллирующих функций и в отличие от кинематического управления быстрые упругие колебания отсутствуют. Движение будет отличаться от движения исходной жесткой модели малыми ($\sim \varepsilon^2$) медленно меняющимися добавочными смещениями. Поэтому шаг численного интегрирования может браться таким же, как и для исходной жесткой модели.

Проинтегрировав уравнения (5.1) и определив $\sigma = \sigma(t)$, можно по конечным формулам [5] рассчитать $s(t)$, $x(t)$ и $q(t)$.

Рассмотрим пример решения задачи II для манипулятора, описанного в п. 4, но с другой моделью упругости шарниров. А именно предположим, что неподвижная ось универсального шарнира не испытывает упругих деформаций, подвижная ось — дополнительно проворачивается в крепящих ее элементах и поворачивается относительно центра шарнира (см. п. 1), а ось цилиндрического шарнира дополнительно проворачивается в крепящих ее элементах. Обозначим через x_1 угол отклонения первого звена манипулятора из плоскости его вращения вокруг оси универсального шарнира за счет поворота этой оси вокруг центра шарнира, через x_2 — дополнительный угол отклонения первого звена манипулятора в плоскости его вращения вокруг подвижной оси за счет проворота этой оси и через x_3 — дополнительный угол отклонения второго звена манипулятора в плоскости вращения вокруг оси цилиндрического шарнира за счет проворота этой оси. Тогда соотношение (1.1) для такой модели примет вид

$$\begin{aligned} q_1 &= s_1 + x_1 \sin^{-1} s_2 \\ q_2 &= s_2 + x_2, \quad q_3 = s_3 + x_3 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Поправки к управляющим моментам и начальные условия для уравнения (5.1) задаются формулами

$$\begin{aligned} \Delta M_1(\sigma, t) &= -k^{-1} M_1(t) M_2(t) \cos \sigma_2 \sin^{-2} \sigma_2 \\ \Delta M_2(\sigma, t) &= \Delta M_3(\sigma, t) = 0, \quad \sigma_1(0) = s_1(0) - k^{-1} M_1(0) \sin^{-2} s_2(0) \\ \sigma_2(0) &= s_2(0) - k^{-1} M_2(0), \quad \sigma_3(0) = s_3(0) - k^{-1} M_3(0) \\ \sigma_1'(0) &= s_1'(0) - k^{-1} [M_1'(0) \sin^{-2} s_2(0) - \\ &\quad - 2M_1(0) s_1'(0) \cos s_2(0) \sin^{-3} s_2(0)] \\ \sigma_2'(0) &= s_2'(0) - k^{-1} M_2'(0), \\ \sigma_3'(0) &= s_3'(0) - k^{-1} M_3'(0) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Значение управляющих моментов $M_1(t)$, $M_2(t)$ и $M_3(t)$ и начальные условия $s_i(0)$ и $s_i'(0)$, $i=1, 2, 3$ для исходной жесткой модели манипулятора взяты из примера решения задачи I для жесткого манипулятора.

Интегрируя уравнения (5.1) с поправками к моментам (5.3) при начальных условиях (5.4), можно определить обобщенные координаты σ вспомогательной жесткой модели манипулятора как функции времени. По функциям $\sigma(t)$ рассчитываются функции $s(t)$, $x(t)$ и $q(t)$.

На графике фиг. 4 представлены расчетные зависимости отклонения движения упругого манипулятора от движения жесткой модели, т. е. разница зависимостей $q(t) = f(s(t), x(t))$ и $q(t) = f(s(t))|_{s=0, 0}$.

Эта величина изображена сплошной линией для первой степени свободы манипулятора, пунктирной — для второй, штрихпунктирной — для третьей.

Авторы благодарят Ф. Л. Черноусько за постановку задачи и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Витгенбург Й. Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. 292 с.
2. Лилов Л. Структура, кинематика и динамика систем твердых тел. — Успехи механики, 1983, т. 6, № 1/2, с. 53–90.
3. Вукобратович М., Стокич Д. Управление манипуляционными роботами. М.: Наука, 1985. 383 с.
4. Градецкий В. Г., Гукасян А. А., Грудев А. И., Черноусько Ф. Л. О влиянии упругой податливости конструкции роботов на их динамику. — Изв. АН СССР. МТТ, 1985, № 3, с. 63–71.
5. Черноусько Ф. Л. Динамика систем с упругими элементами большой жесткости. — Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 101–113.
6. Сунада В., Дубовски С. Применение метода конечных элементов к динамическому анализу гибких пространственных и плоскопараллельных многозвенных систем. — Конструирование и технология машиностроения, 1981, № 3, с. 49–58.

7. Сунада В., Дубовски С. Об исследовании динамики и характеристик промышленных роботов-манипуляторов с упругими звеньями.— Конструирование и технология машиностроения, 1983, № 1, с. 161—172.
8. Слиде П. В., Иткин В. М., Аузиньш Я. П. Алгоритм расчета на ЭЦВМ колебательных характеристик манипуляционных роботов.— Машиноведение, 1984, № 2, с. 48—53.
9. Вукобрагович М., Поткняк В. Численный метод моделирования динамики манипулятора с упругими свойствами.— Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1981, № 5, с. 131—141.
10. Михайлов С. А., Черноусько Ф. Л. Исследование динамики манипулятора с упругими звеньями.— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 2, с. 51—58.

Москва

Поступила в редакцию
18.III.1986.