МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1987

УДК 531.55

ИССЛЕДОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДВИЖЕНИЯ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА В ТАНГАЖНОЙ ПЛОСКОСТИ НА АКТИВНОМ УЧАСТКЕ ТРАЕКТОРИИ

КОРЕНЕВСКИЙ Д. Г.

Методами математической теории управляемости устанавливается возможность нейтрализовать эффект возникающего по какой-либо причине возмущения величины кажущегося ускорения баллистического летательного аппарата посредством коррекции его ориентации (коррекции расчетной программы тангажного углового разворота). Исследование является теоретическим обоснованием корректности электромеханических способов инерциального наведения баллистических летательных аппаратов, разработанных ранее автором [1].

1. Уравнения движения центра масс летательного аппарата в стартовой инерциальной системе координат и вращения относительно центра масс в векторной форме имеют вид

$$md^2\mathbf{r}(t)/dt^2=\Sigma\mathbf{F}(t),\quad d\mathbf{K}(t)/dt=\Sigma\mathbf{M}(t) \tag{1.1}$$

Здесь m — масса аппарата, $\mathbf{r}(t)=\|\xi(t),\ \eta(t),\ \zeta(t)\|^T$ — радиус-вектор центра масс в инерциальной системе координат $O\xi\eta\zeta$, $\Sigma\mathbf{F}(t)$ и $\Sigma\mathbf{M}(t)$ — главный вектор и главный момент внешних сил, приложенных к аппарату, $\mathbf{K}(t)$ — главный момент количества движения аппарата.

В дальнейшем изучается лишь движение аппарата в тангажной плоскости $O\xi\eta$; следовательно, $\zeta(t)=0$, $\mathbf{K}(t)=\|0,\ 0,\ I\theta^{\cdot}\|^T$. Здесь I — главный момент инерции аппарата относительно оси O_1z_1, направленной параллельно оси $O\zeta$ инерциальной системы координат и проходящей через центр масс O_1.

Сами координаты $\xi(t)$ и $\eta(t)$ и угол тангажного разворота $\theta(t)$ действительного движения аппарата в плоскости $O\xi\eta$ на активном участке (при предположении малости бокового отклонения $\zeta(t)$ по сравнению с радиусом земного шара R) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} d^2\xi(t)/dt^2=a_\xi(t)+f_\xi[\xi(t),\ \eta(t);\ t] \\ d^2\eta(t)/dt^2=a_\eta(t)+f_\eta[\xi(t),\ \eta(t);\ t], \\ Id^2\theta(t)/dt^2=M_{z_1}[\theta(t);\ t] \end{gathered} \tag{1.2}$$

а координаты $\xi^*(t)$, $\eta^*(t)$ и угол тангажного разворота $\theta^*(t)$ расчетного движения — системе

$$\begin{gathered} d^2\xi^*(t)/dt^2=a_\xi^*(t)+f_\xi[\xi^*(t),\ \eta^*(t);t] \\ d^2\eta^*(t)/dt^2=a_\eta^*(t)+f_\eta[\xi^*(t),\ \eta^*(t);\ t],\ Id^2\theta^*(t)/dt^2=M_{z_1}[\theta^*(t);\ t)] \end{gathered} \tag{1.3}$$

получаемой из дифференциальных уравнений (1.2), если в них заменить текущие значения проекций $a_\xi(t)$, $a_\eta(t)$ кажущегося ускорения и текущее значение тангажного угла $\theta(t)$ их расчетными значениями $a_\xi^*(t)$, $a_\eta^*(t)$, $\theta^*(t)$. Здесь M_{z_1} — величина главного момента внешних сил относительно оси O_1z_1; f_ξ, f_η — проекции ускорения силы земного тяготения, представ-

[1] *Кореневский Д. Г.* Новые электромеханические способы инерциального наведения баллистических летательных аппаратов по «гибкой» траектории (коррекция по тангажу).– Препринт Ин-та математики АН УССР. Киев, 1983, № 8. 75 с.

ляемые формулами (см., например, [1, с. 62]):

$$f_\xi = -f_0 R^2 \xi(t)/\rho^3, \quad f_\eta = -f_0 R^2 \eta(t)/\rho^3 \tag{1.4}$$

В формулах (1.4) f_0 — значение ускорения силы тяготения на земной поверхности, рассматриваемой как сфера радиуса R, а $\rho = [\xi^2(t) + \eta^2(t)]^{1/2}$ представляет собой расстояние между центром масс аппарата и центром Земли.

2. Составим разности соответственно левых и правых частей уравнений (1.2) и (1.3) и приравняем их друг другу. Учитывая изохронные вариации

$$\delta\xi(t) = \xi(t) - \xi^*(t), \quad \delta\eta(t) = \eta(t) - \eta^*(t), \quad \delta\theta(t) = \theta(t) - \theta^*(t)$$

$$\delta a_\xi(t) = \delta[a(t)\cos\theta(t)] = [a^*(t) + \delta a(t)]\cos[\theta^*(t) + \delta\theta(t)] -$$
$$- a^*(t)\cos\theta^*(t) = \cos\theta^*(t)\delta a(t) - a^*(t)\sin\theta^*(t)\delta\theta(t)$$

$$\delta a_\eta(t) = \delta[a(t)\sin\theta(t)] = [a^*(t) + \delta a(t)]\sin[\theta^*(t) + \delta\theta(t)] -$$
$$- a^*(t)\sin\theta^*(t) = \sin\theta^*(t)\delta a(t) + a^*(t)\cos\theta^*(t)\delta\theta(t)$$

получим для них дифференциальные уравнения

$$\begin{gathered} d^2\delta\xi(t)/dt^2 = \cos\theta^*(t)\delta a(t) - a^*(t)\sin\theta^*(t)\delta\theta(t) + \\ + f_\xi[\xi^*(t) + \delta\xi(t),\ \eta^*(t) + \delta\eta(t);\ t] - f_\xi[\xi^*(t),\ \eta^*(t);\ t] \\ d^2\delta\eta(t)/dt^2 = \sin\theta^*(t)\delta a(t) + a^*(t)\cos\theta^*(t)\delta\theta(t) + \\ + f_\eta[\xi^*(t) + \delta\xi(t),\ \eta^*(t) + \delta\eta(t);\ t] - f_\eta[\xi^*(t),\ \eta^*(t);\ t] \\ I d^2\delta\theta(t)/dt^2 = \delta M_{z_1} \end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь δM_{z_1} — величина возмущающего расчетное движение аппарата момента внешних сил, либо корректирующего возмущенное движение управляющего момента, создаваемого рулевыми органами.

Разлагая правые части первых двух уравнений (2.1) в ряд Тейлора по приращениям аргументов и сохраняя лишь члены разложения первого порядка малости относительно вариаций $\delta\xi(t)$ и $\delta\eta(t)$, придем к системе линейных дифференциальных уравнений движения в окрестности расчетной траектории

$$\begin{gathered} d^2\delta\xi(t)/dt^2 = \cos\theta^*(t)\delta a(t) - a^*(t)\sin\theta^*(t)\delta\theta(t) + \\ + \partial f_\xi/\partial\xi\,\delta\xi(t) + \partial f_\xi/\partial\eta\,\delta\eta(t) \\ d^2\delta\eta(t)/dt^2 = \sin\theta^*(t)\delta a(t) + a^*(t)\cos\theta^*(t)\delta\theta(t) + \\ + \partial f_\eta/\partial\xi\,\delta\xi(t) + \partial f_\eta/\partial\eta\,\delta\eta(t), \quad I d^2\delta\theta(t)/dt^2 = \delta M_{z_1} \end{gathered} \tag{2.2}$$

Исследуемыми функциями этих уравнений являются изохронные вариации координат центра масс $\delta\xi(t)$, $\delta\eta(t)$ и вариации тангажного угла разворота $\delta\theta(t)$. Так как в момент старта, т. е. при $t=0$, координаты и скорости центра масс одни и те же в действительном и расчетном движениях, то, следовательно, начальные условия для уравнений (2.2) имеют вид

$$\begin{gathered} \delta\xi(0) = 0,\ \delta\eta(0) = 0,\ \delta\theta(0) = 0,\ d\delta\xi(0)/dt = 0 \\ d\delta\eta(0)/dt = 0,\ d\delta\theta(0)/dt = 0 \end{gathered} \tag{2.3}$$

Коэффициенты уравнений (2.2), представляющие собой частные производные ускорения силы земного тяготения

$$\partial f_\xi/\partial\xi, \quad \partial f_\xi/\partial\eta = \partial f_\eta/\partial\xi, \quad \partial f_\eta/\partial\eta \tag{2.4}$$

являются функциями времени и текущих координат расчетного движения, известными заранее для каждого конкретного случая полета. Однако, как показано в [1, гл. 4, § 3], при небольшой протяженности активного участка траектории по сравнению с радиусом Земли эти функции можно заменить их значениями, относящимися к точке старта, а сами производные вычислить в предположении, что Земля — шар с радиальным распределением плотности.

Последнее предположение при учете формул (1.4) приводит к выражениям [1]:

$$\partial f_\xi/\partial\xi=-f_0R^2\rho^{-3}(1-3\xi^2\rho^{-2}),\ \partial f_\eta/\partial\eta=-f_0R^2\rho^{-3}(1-3\eta^2\rho^{-2})$$

$$\partial f_\xi/\partial\eta=\partial f_\eta/\partial\xi=3f_0R^2\rho^{-5}\xi\eta \qquad (2.5)$$

Для точки старта аппарата $\xi=0$, $\eta=\rho=R$ и, следовательно, в этой точке имеем [1]:

$$\partial f_\xi/\partial\xi=-f_0R^{-1}=-\nu^2,\ \partial f_\xi/\partial\eta=\partial f_\eta/\partial\xi=0 \qquad (2.6)$$

$$\partial f_\eta/\partial\eta=2f_0R^{-1}=2\nu^2,\ \nu=\sqrt{f_0R^{-1}}$$

$\nu=0{,}00125$ 1/c — частота Шулера. Тогда система дифференциальных уравнений (2.2) принимает вид

$$d^2\delta\xi(t)/dt^2=\cos\theta^*(t)\delta a(t)-a^*(t)\sin\theta^*(t)\delta\theta(t)-\nu^2\delta\xi(t)$$

$$d^2\delta\eta(t)/dt^2=\sin\theta^*(t)\delta a(t)+a^*(t)\cos\theta^*(t)\delta\theta(t)+2\nu^2\delta\eta(t)$$

$$d^2\delta\theta(t)/dt^2=I^{-1}\delta M_{z_1} \qquad (2.7)$$

причем δa определяется текущими показаниями измерителя кажущегося ускорения.

Если в возмущенном движении аппарата расчетная программа угла тангажного разворота не возмущается ($\delta\theta=0$), а возмущению подвергается лишь величина тяги ($\delta a\neq0$), уравнения (2.7) принимают вид

$$d^2\delta\xi(t)/dt^2=\cos\theta^*(t)\delta a(t)-\nu^2\delta\xi(t) \qquad (2.8)$$

$$d^2\delta\eta(t)/dt^2=\sin\theta^*(t)\delta a(t)+2\nu^2\delta\eta(t),\ (\theta(t)\equiv\theta^*(t))$$

Возникающее по какой-либо причине возмущение $\delta\theta$ в отработке (воспроизведении) системой управления расчетной программы угла тангажного разворота θ^* приводит к тому, что в правой части первого уравнения (2.8) появляется член $-a^*\sin\theta^*\delta\theta$, а в правой части второго уравнения (2.8) — член $a^*\cos\theta^*\delta\theta$; в результате вместо уравнений (2.8) имеем уравнения (2.7). Такой механизм возмущающего действия вариации $\delta\theta$ программы тангажного угла разворота позволяет целенаправленно использовать его для синтеза принудительной коррекции $\delta\theta$ расчетной программы тангажа, способной нейтрализовать эффект возникшего отклонения кажущегося ускорения δa. Если во время полета на активном участке движения принудительным образом изменять (возмущать) направление кажущегося ускорения, т. е. разворот аппарата осуществлять не по расчетной программе разворота θ^*, а по программе $\theta^*+\delta\theta$, так что сумму членов правой части первого уравнения (2.7) $(\cos\theta^*(t)\delta a(t)-a^*(t)\sin\theta^*(t)\delta\theta(t))$ и сумму членов правой части второго уравнения (2.7) $(\sin\theta^*(t)\delta a(t)+a^*(t)\cos\theta^*(t)\delta\theta(t))$ поддерживать все время в определенном соотношении, то очевидно, что вариации $\delta\xi(t)$ и $\delta\eta(t)$, $\delta(d\xi(t)/dt)$ и $\delta(d\eta(t)/dt)$ также будут находиться в надлежащем соотношении.

Именно исходя из этого далее выбирается матрица управляющих воздействий.

3. Выясним, управляема ли система (2.8) посредством регулятора, создающего момент δM_{z_1}, другими словами, возможно ли с помощью изменения ориентации вектора тяги (изменения расчетной программы тангажа) на величину $\delta\theta$ любое возмущение проекций скоростей $\delta(d\xi/dt)$, $\delta(d\eta/dt)$ и координат $\delta\xi$, $\delta\eta$ сделать нулевым, т. е. возвратить центр масс аппарата на расчетную траекторию.

Для этого представим систему (2.8) в векторно-матричном виде

$$\frac{d}{dt}\begin{Vmatrix}\delta\xi\\ \delta\xi^{\cdot}\\ \delta\eta\\ \delta\eta^{\cdot}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -\nu^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2\nu^2 & 0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\delta\xi\\ \delta\xi^{\cdot}\\ \delta\eta\\ \delta\eta^{\cdot}\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}0\\ \cos\theta^*(t)\\ 0\\ \sin\theta^*(t)\end{Vmatrix}\delta a$$

$$\delta\xi^{\cdot}=\delta(d\xi/dt),\quad \delta\eta^{\cdot}=\delta(d\eta/dt) \tag{3.1}$$

Принимая во внимание характер воздействия вариаций $\delta\theta$ на систему (2.8), о котором говорилось в п. 2, присоединим к системе (3.1) управляющее воздействие, так чтобы получить систему

$$\frac{d}{dt}\begin{Vmatrix}\delta\xi\\ \delta\xi^{\cdot}\\ \delta\eta\\ \delta\eta^{\cdot}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -\nu^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2\nu^2 & 0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\delta\xi\\ \delta\xi^{\cdot}\\ \delta\eta\\ \delta\eta^{\cdot}\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}0\\ -b_1a^*(t)\sin\theta^*(t)\\ 0\\ b_2a^*(t)\cos\theta^*(t)\end{Vmatrix}u+\begin{Vmatrix}0\\ \cos\theta^*(t)\\ 0\\ \sin\theta^*(t)\end{Vmatrix}\delta a \tag{3.2}$$

Первое слагаемое в правой части (3.2) — объект управления, второе — управляющее воздействие, третье — внешнее возмущение. Вводя для матриц коэффициентов аппарата и коэффициентов, характеризующих интенсивность управляющих воздействий u, обозначения

$$A=\begin{Vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -\nu^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2\nu^2 & 0\end{Vmatrix},\quad B(t)=\begin{Vmatrix}0\\ B_1(t)\\ 0\\ B_2(t)\end{Vmatrix}\equiv\begin{Vmatrix}0\\ -b_1a^*(t)\sin\theta^*(t)\\ 0\\ b_2a^*(t)\cos\theta^*(t)\end{Vmatrix} \tag{3.3}$$

перепишем систему в виде

$$\frac{d}{dt}\begin{Vmatrix}\delta\xi\\ \delta\xi^{\cdot}\\ \delta\eta\\ \delta\eta^{\cdot}\end{Vmatrix}=A\begin{Vmatrix}\delta\xi\\ \delta\xi^{\cdot}\\ \delta\eta\\ \delta\eta^{\cdot}\end{Vmatrix}+B(t)\,u+\begin{Vmatrix}0\\ \cos\theta^*(t)\\ 0\\ \sin\theta^*(t)\end{Vmatrix}\delta a \tag{3.4}$$

Здесь коэффициенты b_1 и b_2 являются некоторыми отличными от нуля числами, в частности, могут быть приняты равными единице. Согласно общей теории управляемости линейных нестационарных систем (см., например, [2, с. 148–152; 3, с. 133–135, 173]), для проверки управляемости динамической системы (3.4), т. е. для проверки того, что любое возмущенное состояние $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\xi^{\cdot}$, $\delta\eta^{\cdot}$ можно перевести с помощью управляющего воздействия Bu в состояние (или, что то же, перевести на расчетную траекторию) $\delta\xi=\delta\eta=\delta\xi^{\cdot}=\delta\eta^{\cdot}=0$, достаточно показать, что ранг матрицы управляемости $\Gamma(t)$;

$$\Gamma(t)=[\Gamma_1(t),\,\Gamma_2(t),\,\Gamma_3(t),\,\Gamma_4(t)] \tag{3.5}$$

$$\Gamma_1(t)=B(t),\ \Gamma_k(t)=d\Gamma_{k-1}(t)/dt-A\Gamma_{k-1}(t)\quad (k=2,\,3,\,4)$$

равен размерности матрицы A, т. е. равен четырем. Элементы γ_{ij} матрицы $\Gamma(t)$ имеют вид

$$\begin{gathered}
\gamma_{11}=0;\quad \gamma_{12}=b_1a^*\sin\theta^*,\quad \gamma_{13}=2b_1(a^{*\cdot}\sin\theta^*+a^*\theta^{*\cdot}\cos\theta^*)\\
\gamma_{14}=b_1(3a^{*\cdot\cdot}\sin\theta^*+6a^{*\cdot}\theta^{*\cdot}\cos\theta^*+3a^*\theta^{*\cdot\cdot}\cos\theta^*-3a^*\theta^{*\cdot 2}\sin\theta^*-\nu^2a^*\sin\theta^*)\\
\gamma_{21}=-b_1a^*\sin\theta^*,\quad \gamma_{22}=-b_1(a^{*\cdot}\sin\theta^*+a^*\theta^{*\cdot}\cos\theta^*) \qquad (3.6)\\
\gamma_{23}=b_1(-a^{*\cdot\cdot}\sin\theta^*-2a^{*\cdot}\theta^{*\cdot}\cos\theta^*-a^*\theta^{*\cdot\cdot}\cos\theta^*+a^*\theta^{*\cdot 2}\sin\theta^*+\nu^2a^*\sin\theta^*),\\
\gamma_{24}=b_1(-a^{*\cdot\cdot\cdot}\sin\theta^*-3a^{*\cdot\cdot}\theta^{*\cdot}\cos\theta^*-3a^{*\cdot}\theta^{*\cdot\cdot}\cos\theta^*+3a^{*\cdot}\theta^{*\cdot 2}\sin\theta^*-a^*\theta^{*\cdot\cdot\cdot}\cos\theta^*+\\
+3a^*\theta^{*\cdot}\theta^{*\cdot\cdot}\sin\theta^*+a^*\theta^{*\cdot 3}\cos\theta^*+3\nu^2a^{*\cdot}\sin\theta^*+3\nu^2a^*\theta^{*\cdot}\cos\theta^*),\quad \gamma_{31}=0,\\
\gamma_{32}=-b_2a^*\cos\theta^*,\quad \gamma_{33}=2b_2(a^*\theta^{*\cdot}\sin\theta^*-a^{*\cdot}\cos\theta^*),\\
\gamma_{34}=b_2(6a^{*\cdot}\theta^{*\cdot}\sin\theta^*+3a^*\theta^{*\cdot\cdot}\sin\theta^*+3a^*\theta^{*\cdot 2}\cos\theta^*-3a^{*\cdot\cdot}\cos\theta^*-2\nu^2a^*\cos\theta^*)\\
\gamma_{41}=b_2a^*\cos\theta^*,\quad \gamma_{42}=b_2(a^{*\cdot}\cos\theta^*-a^*\theta^{*\cdot}\sin\theta^*),\\
\gamma_{43}=b_2(a^{*\cdot\cdot}\cos\theta^*-2a^{*\cdot}\theta^{*\cdot}\sin\theta^*-a^*\theta^{*\cdot\cdot}\sin\theta^*-a^*\theta^{*\cdot 2}\cos\theta^*+2\nu^2a^*\cos\theta^*)\\
\gamma_{44}=b_2(a^{*\cdot\cdot\cdot}\cos\theta^*-3a^{*\cdot\cdot}\theta^{*\cdot}\sin\theta^*-3a^{*\cdot}\theta^{*\cdot\cdot}\sin\theta^*-3a^{*\cdot}\theta^{*\cdot 2}\cos\theta^*-a^*\theta^{*\cdot\cdot\cdot}\sin\theta^*-\\
-3a^*\theta^{*\cdot}\theta^{*\cdot\cdot}\cos\theta^*+a^*\theta^{*\cdot 3}\sin\theta^*+6\nu^2a^{*\cdot}\cos\theta^*-6\nu^2a^*\theta^{*\cdot}\sin\theta^*)
\end{gathered}$$

Ранг матрицы $\Gamma(t)$ равен четырем лишь в том случае, когда ее определитель не равен нулю. Вычислим определитель матрицы Γ, учитывая, что для расчетных траекторий баллистических летательных аппаратов — в силу ряда обстоятельств (см., например, [4, гл. 2, п. 2.2.2]) — имеет место условие $\ddot{\theta}^*=\dddot{\theta}^*=0$. Имеем

$$\begin{gathered}\det\Gamma=-4b_1^2b_2^2a^{*4}\dot{\theta}^{*4}-\nu^2b_1^2b_2^2a^{*4}(14\dot{\theta}^{*2}\sin^4\theta^*+\\+6\dot{\theta}^{*2}\sin^2\theta^*\cos^2\theta^*+\nu^2\sin^2\theta^*\cos^2\theta^*-10\dot{\theta}^{*2}\cos^4\theta^*)\end{gathered}\tag{3.7}$$

Проведем анализ соотношения (3.7). Рассмотрим сначала случай, когда влиянием изохронных вариаций $-\nu^2\delta\xi(t)$ и $2\nu^2\delta\eta(t)$ силы земного тяготения в уравнениях движения (2.7) можно пренебречь (ввиду их малости по сравнению с δa). Тогда

$$\det\Gamma=-4b_1^2b_2^2a^{*4}\dot{\theta}^{*4}\tag{3.8}$$

Так как на активном внеатмосферном участке полета угловая скорость $\dot{\theta}^*$ не равна нулю, за исключением лишь небольших временных отрезков в окрестности разделения ступеней и временного отрезка в конце активного участка последней ступени (см., например, [4]), то вне этих временных отрезков определитель (3.8) не равен нулю. Следовательно, система (2.8) управляема.

Учет изохронных вариаций силы земного тяготения, как видно из (3.7), существенным образом не может повлиять на управляемость, так как угловая скорость $\nu\leqslant\dot{\theta}^*$ и, следовательно, $\det\Gamma$ не обращается в нуль.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский А. Ю.* Инерциальное управление баллистическими ракетами. М.: Наука, 1968. 142 с.
2. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. *Сейдж Э. П., Уайт Ч. С., III.* Оптимальное управление системами/Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1982. 392 с.
4. *Сихарулидзе Ю. Г.* Баллистика летательных аппаратов. М.: Наука, 1982. 352 с.

Киев

Поступила в редакцию 8.X.1986