МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1987

УДК 531.8

ОСОБЕННОСТИ СТРОЕНИЯ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УДАРНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ

ГОРБИКОВ С. П.

Для динамических систем с ударными взаимодействиями характерно наличие движений с бесконечным числом ударных взаимодействий на конечном промежутке времени (сокращенно бесконечноударных движений). Изучению таких движений в последнее время уделяется значительное внимание [1–5] и др.

В данной работе с помощью метода точечных отображений [6] описаны особенности структуры фазового пространства динамических систем с ударными взаимодействиями, связанные с наличием бесконечноударных движений. Изложение основано на результатах [7] [1].

1. Уравнения движения. Принимается следующий общий вид динамической системы с ударными взаимодействиями. Мгновенное ударное взаимодействие происходит на гиперповерхности $x_n=0$, по достижении которой фазовые переменные $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ меняются скачкообразно (переменная x_n остается равной нулю) согласно формулам

$$x_1^+ = H_1(x_1^-, \ldots, x_{n-1}^-) = x_1^- H_{11}(x_1^-, \ldots, x_{n-1}^-) \tag{1.1}$$

$$x_i^+ = H_i(x_1^-, \ldots, x_{n-1}^-) = x_i^- + x_1^- H_{1i}(x_1^-, \ldots, x_{n-1}^-) \quad (i=2, \ldots, n-1)$$

а при $x_n>0$ изменение фазовых переменных подчиняется дифференциальным уравнениям вида

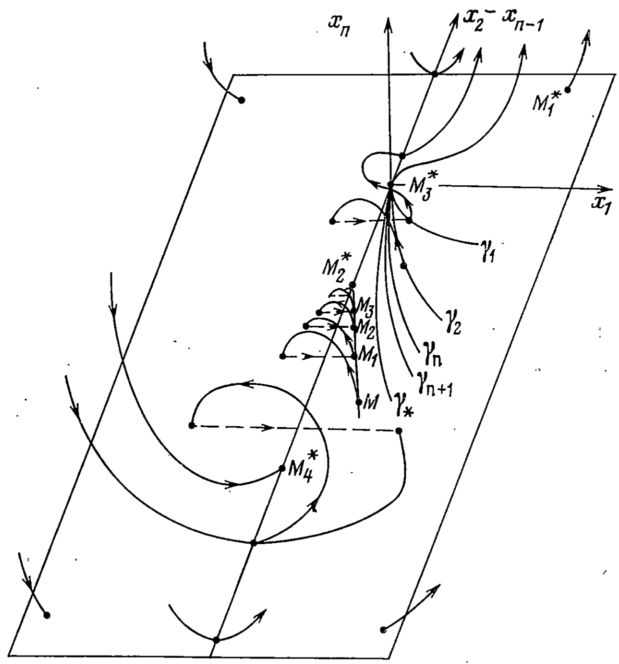
$$dx_i/dt = x_i^{\boldsymbol{\cdot}} = \Phi_i(x_1, \ldots, x) \quad (i=1, \ldots, n-1) \tag{1.2}$$

$$dx_n/dt = x_n^{\boldsymbol{\cdot}} = \Phi_n = x_1\Phi_{n1}(x_1, \ldots, x_n) + x_n\Phi_{nn}(x_1, \ldots, x_n)$$

В уравнениях (1.1) и (1.2) $x_1^-, \ldots, x_{n-1}^-$ и $x_1^+, \ldots, x_{n-1}^+$ — соответственно доударные и послеударные значения переменных, t — время, $-1<H_{11}(0, x_2^-, \ldots, x_{n-1}^-)<0$, $\Phi_{n1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)>0$. Функции H_{1j} и Φ_j ($j=1, \ldots, n-1$), Φ_{n1}, Φ_{nn} определены и являются гладкими класса C^m, $m\geqslant 3$ в малых окрестностях точек $(x_1^-\leqslant 0, x_2^-, \ldots, x_{n-1}^-)$ и $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\geqslant 0)$ соответственно.

Фазовое пространство системы составляют точки $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\geqslant 0)$. На гиперповерхности $x_n=0$ согласно (1.2) $x_n^{\boldsymbol{\cdot}}=x_1\Phi_{n1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$. Поэтому [6] фазовые траектории системы (1.2) при $x_1=0$ касаются гиперповерхности $x_n=0$, при возрастании времени t они выходят из точек $(x_1>0, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n=0)$, а при уменьшении t — из точек $(x_1<0, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n=0)$ (фигура). На фигуре сплошными линиями обозначены траектории системы (1.2), а штриховыми — соединены образы точек при отображении (1.1).

[1] *Горбиков С. П., Неймарк Ю. И.* Вспомогательные скользящие движения динамических систем с ударными взаимодействиями. Горький, 1980.– 18 с. Деп. в ВИНИТИ 15.08.80; № 3690-80; *Горбиков С. П.* Некоторые вопросы структуры фазового пространства динамических систем с ударными взаимодействиями. Горький, 1980.– с. 36–51. Деп. в ВИНИТИ 23.10.80; № 4500-80; *Горбиков С. П.* Особенности структуры фазового пространства динамических систем с ударными взаимодействиями. Горький, 1985.– 45 с. Деп. в ВИНИТИ 23.05.85; № 3558-85; *Горбиков С. П.* Структура фазового пространства динамических систем с ударными взаимодействиями. Горький, 1985.– 15 с. Деп. в ВИНИТИ 23.05.85; № 3559-85.



К такому виду приводятся, например, механические системы с одной ударной парой с прямым ударом, подчиняющимся гипотезе Ньютона.

2. Особенности фазового пространства. В дальнейшем используется точечное отображение $T=T_2T_1$ части многообразия $x_n=0$, $x_1\geqslant 0$ в многообразие $x_n=0$, $x_1\geqslant 0$, где T_1-отображение, переводящее точку $(x_1\geqslant 0, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)$ в точку $(x_1^-\leqslant 0, x_2^-, \ldots, x_{n-1}^-, 0)$, осуществляется траекториями системы (1.2), T_2-отображение, переводящее точку $(x_1^-\leqslant 0, x_2^-, \ldots, x_{n-1}^-, 0)$ в точку $(x_1^+\geqslant 0, x_2^+, \ldots, x_{n-1}^+, 0)$, происходит в силу формул (1.1) ударных взаимодействий.

Бесконечноударные движения характеризуются тем, что переменная x_n бесконечное число раз за конечное время обращается в нуль. Поэтому далее изучаются малые окрестности точек M^* на многообразии $x_n=0$ в фазовом пространстве системы, в которых такое обращение возможно. Применяя к соответствующим точкам изученных окрестностей обратные отображения T^{-1}, можно описать связанные с наличием бесконечноударных движений особенности структуры фазового пространства во всем пространстве.

1. В достаточно малой окрестности любой точки $M^*=M_1^*$ (фигура) многообразия $x_n=0$, $\dot{x}_n=\Phi_n(x_1, \ldots, x_n)\neq 0$ или многообразия $x_n=0$, $x_1=0$ $(\dot{x}_n=0)$, $\ddot{x}_n=\Sigma(\partial\Phi_n/\partial x_k)\Phi_k>0$ (суммирование по k от 1 до n) такое обращение невозможно, так как необходимо время, большее некоторой постоянной, чтобы фазовая траектория, выходящая из любой точки в малой окрестности точки M_1^*, пересекла многообразие $x_n=0$.

2. В фазовом пространстве системы (1.1)—(1.2) малая окрестность точки $M^*=M_2^*$ многообразия Г:

$$x_n=0,\ \ x_1=0\ \ (\dot{x}_n=0),\ \ \ddot{x}_n<0 \tag{2.1}$$

состоит из бесконечноударных движений, которые оканчиваются в точках многообразия Г и могут быть описаны с помощью системы обыкновенных гладких дифференциальных уравнений [7] (интегральные кривые системы были названы вспомогательными скользящими движениями).

Такое описание бесконечноударных движений может быть использовано для численного изучения бесконечноударных процессов, исследования бифуркаций периодических движений с участками бесконечноударных взаимодействий, нахождения предельных значений бесконечноударных движений [7].

3. Пусть точка $M^*=M_3^*$ — точка многообразия Γ_1:

$$x_n=0, \quad x_1=0 \quad (x_n^{\boldsymbol{\cdot}}=0), \quad x_n^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}=0 \tag{2.2}$$

$$\overset{\dots}{x_n}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi_n}{\partial x_k}\Phi_k\right)\Phi_j>0$$

Предполагается, что произведена замена координат, в результате чего уравнения (1.2) принимают вид

$$\begin{gathered}x_1^{\boldsymbol{\cdot}}=x_1\Phi_{11}(x_1,\dots,x_n)+x_2\Phi_{12}(x_1,\dots,x_n)+x_n\Phi_{1n}(x_1,\dots,x_n)=\Phi_1\\ x_i^{\boldsymbol{\cdot}}=\Phi_i(x_1,\dots,x_n)\quad(i=2,\dots,n-1)\\ x_n^{\boldsymbol{\cdot}}=x_1\Phi_{n1}(x_1,\dots,x_n)+x_n\Phi_{nn}(x_1,\dots,x_n)=\Phi_n\\ \Phi_i\ (i=2,\dots,n-1),\ \Phi_{11},\Phi_{12},\Phi_{1n},\Phi_{n1},\Phi_{nn}\in C^l(l\geqslant4)\\ \Phi_{12}(0,x_2,\dots,x_{n-1},0)>0,\quad \Phi_{n1}(x_1,\dots,x_{n-1},0)>0\\ \Phi_2(0,\dots,0)>0,\quad M_3^*=(0,\dots,0)\end{gathered} \tag{2.3}$$

Уравнения ударных взаимодействий имеют вид (1.1), но $H_{1i}\in C^l$, $H_i\in C^{l+1}$ $(i=1,\dots,n-1)$.

От (1.2) можно перейти к (2.3), например, с помощью замены координат $y_i=x_i-x_i^*$ $(i=1,2,\dots,j-2,j-1,j+1,j+2,\dots,n)$, $y_j=\Sigma(\partial\Phi_n/\partial x_k)\Phi_k$, которая правомочна при выполнении в точке $M_3^*(0,x_2^*,\dots,x_{n-1}^*,0)$ для некоторого j условия $\partial/\partial x_j(\Sigma(\partial\Phi_n/\partial x_k)\Phi_k)\neq0$ $(j\neq1,n)$. Вид (2.3) означает, что многообразие Γ_1 теперь определяется уравнениями $x_n=0$, $x_1=0$, $x_2=0$, из точек $(0,x_2>0,x_3,\dots,x_{n-1},0)$ выходят фазовые траектории системы (2.3) при возрастании и уменьшении времени t, а в малых окрестностях точек $(0,x_2<0,x_3,\dots,x_{n-1},0)$ реализуются бесконечноударные движения, оканчивающиеся в точках $(0,z_2^*<0,z_3^*,\dots,z_{n-1}^*,0)$ (фигура).

Из теоремы[2] о структуре фазового пространства системы (1.1), (2.3) в малой окрестности точки M_3^* (для одной частной задачи эта структура была установлена в [3]) следует, что на многообразии $x_n=0$, $x_1\geqslant0$ существует множество γ_*: $x_1=x_2^2\gamma_*(x_2,\dots,x_{n-1})$, $\gamma_*\in C^{l-3}$, $x_2\leqslant0$, где $0<\gamma_*(0,\dots,0)=a^*$ — корень уравнения $8z=R(z+1)(3z-1)^2$ при $z=[1+8a_2a^*(3a_{12}R)^{-1}]^{1/2}$, $a_{12}=\Phi_{12}(0,\dots,0)$, $a_2=\Phi_2(0,\dots,0)$, $0<R=-H_{11}(0,\dots,0)<1$ (уравнение, определяющее множество γ_*, найдено в [2, 5] в ином виде). Из точек многообразия $x_n=0$, $x_1>0$, заключенных при $x_2<0$ между множеством γ_* и многообразием $x_1=0$, в область $x_n>0$ выходят фазовые траектории, которые являются бесконечноударными движениями, оканчивающимися в точках многообразия $x_1=0$, $x_n=0$, $x_2<0$. Фазовые траектории, выходящие в область $x_n>0$ из точек множества γ_*,— бесконечноударные движения, оканчивающиеся при $x_1=0$, $x_2=0$, $x_n=0$. Остальная часть многообразия $x_n=0$, $x_1>0$ разбита множествами γ_n вида $x_1=x_2^2\gamma_n(x_2,\dots,x_{n-1})$, $\gamma_{n+1}<\gamma_n$ $(n=1,2,3,\dots)$ следующим образом (наличие такого разбиения для неавтономной динамической системы общего вида с прямым ударом, описываемым гипотезой Ньютона, было доказано в [4]).

Фазовые траектории, выходящие из точек множества $x_2^2\gamma_{n+1}<x_1<x_2^2\gamma_n$, $x_2<0$, после n-го удара попадают в точки, заключенные при $x_1\geqslant0$ между множеством $x_1=x_2^2\gamma_1$, $x_2<0$ и многообразием $x_1=0$, $x_2>0$, $x_n=0$. Из последних точек выходят фазовые траектории, уходящие из малой окрестности гиперповерхности $x_n=0$. Здесь множества γ_n $(n=1,2,3,\dots)$ — образы многообразия $x_1=0$, $x_n=0$, $x_2>0$ при последовательных действиях обратного отображения T^{-1}.

4. Пусть точка $M^*=M_4^*$ — точка многообразия Γ_2:

$$x_n=0, \quad x_1=0(x_n^{\boldsymbol{\cdot}}=0), \quad x_n^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}=0, \quad \overset{\dots}{x_n}<0 \tag{2.4}$$

[1] См. указ. публ. на с. 23.

Можно доказать, что при определенных условиях система (1.1), (1.2) в окрестности точки $M_4^*(0, x_2^*, \ldots, \overset{*}{x}_{n-1}, 0)$ представима в виде (1.1), (2.3), где Φ_j ($j=2, \ldots, n-1$), Φ_{n1}, Φ_{nn}, Φ_{11}, Φ_{12}, Φ_{1n}, H_{1i} ($i=1, \ldots, n-1$) являются гладкими функциями класса C^l ($l \geqslant 4$), $\Phi_{n1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) > 0$, $\Phi_{12}(0, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0) > 0$, $\Phi_2|_{M_4^*} < 0$. Следовательно[3], в фазовом пространстве системы малая окрестность точки M_4^* состоит из бесконечноударных движений, которые оканчиваются в точках многообразия $x_n=0$, $\dot{x}_n=0$, $\ddot{x}_n<0$.

3. Область бесконечноударных движений. Областью D бесконечноударных движений называется связное множество на многообразии $x_n=0$, $x_1 \geqslant 0$, образ любой точки M которого при отображении T принадлежит этому множеству, а вся последовательность точек M, TM, $T^2M, \ldots$ соответствует бесконечноударному движению (отображение T определено в п. 2).

Из описанных выше результатов следует, что если хотя бы в одной точке $M^*(0, x_2^*, \ldots, \overset{*}{x}_{n-1}, 0)$ выполнены условия (2.1), то область D существует. Если существуют точки M^*, где выполнены условия (2.2), то границами области бесконечноударных движений D являются (фигура): множество γ_*; точки многообразия $x_n=0$, $\dot{x}_n=0$, $\ddot{x}_n<0$; точки многообразия $x_n=0$, $\dot{x}_n=0$, $\ddot{x}_n=0$, $\dddot{x}_n<0$, если они существуют; часть многообразия $x_n=0$, $\dot{x}_n=0$, $\ddot{x}_n>0$ из некоторой окрестности точек многообразия (2.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фейгин М. И.* Скользящий режим в динамических системах с ударными взаимодействиями.– ПММ, 1967, т. 31, вып. 3, с. 533–536.
2. *Нагаев Р. Ф.* Об аналитическом описании квазипластического удара.– Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 4, с. 78–86.
3. *Денисов Г. Г., Неймарк Ю. И., Сандалов В. М., Цветков Ю. В.* Об обкате ротора по жесткому подшипнику.– Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 6, с. 4–13.
4. *Федосенко Ю. С.* О структуре фазового пространства и периодических движениях неавтономных динамических систем с ударными взаимодействиями.– ПММ, 1976, т. 40, вып. 4, с. 618–629.
5. *Нагаев Р. Ф.* Механические процессы с повторными затухающими соударениями. М.: Наука, 1985. 200 с.
6. *Неймарк Ю. И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972. 471 с.
7. *Горбиков С. П., Неймарк Ю. И.* Вспомогательные скользящие движения динамических систем с ударными взаимодействиями.– В кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения. Горький; Горьк. ун-т, 1981, с. 59–64.

Горький

Поступила в редакцию
26.XII.1985

[3] См., указ. публ. на с. 23.