

МОДЕЛИ ДЛЯ РАСЧЕТА ЧАСТОТНОГО СПЕКТРА НЕОДНОРОДНЫХ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

КУЗНЕЦОВ О. В.

Исследование вибраций реальных объектов представляет собой сложную задачу, так как обычная классическая схематизация конструкции в виде набора оболочек с учетом влияния подкреплений, вырезов, осцилляторов мало доступна для решения даже на современных вычислительных машинах, а вносимые в модель упрощения, как правило, носят интуитивный характер и возможность их использования при расчете не имеет достаточного обоснования. В настоящее время накоплен большой материал по решению частных задач о колебаниях оболочек, но его применение в практических расчетах требует обоснования возможности получения информации о нагружении сложного исходного объекта по результатам исследования поведения отдельных его частей. В связи с этим возникает необходимость в создании теории, способной хорошо описать физику распространения вибраций по объекту сложной структуры и позволяющей построить достаточно простые, доступные для решения на ЭВМ модели, оценив влияние вносимых упрощений. Возможность построения таких расчетных схем появляется с использованием методов асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений. Применительно к расчетам оболочек эти методы были развиты в работе [1]. Преимущества асимптотических подходов наиболее полно проявляются не столько при решении отдельных задач, сколько при анализе поведения реального объекта и обосновании выбора упрощенных расчетных схем. При изучении вибрационных нагрузок обычно достаточно ограничиться решением главной краевой задачи, поскольку особенности поведения оболочечных конструкций в зоне, например, краевых эффектов мало влияют на условия работы размещенных в объеме агрегатов. В этом случае результаты анализа допускают более четкую физическую интерпретацию. В [2, 3] был исследован вопрос о спектре колебаний оболочечных систем, состоящих из произвольного набора цилиндрических, пологих сферических и конических оболочек. С помощью представления решения в виде произведения быстро и медленно меняющихся функций, например

$$F = \exp\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \rho \varphi_i d\alpha\right) \left[\eta_{i0} + \frac{1}{\rho} \eta_{i1} + \dots\right] \cos n\beta$$

в этих работах на основании анализа установившихся решений характеристического полинома φ_i [4] было установлено, что в оболочке могут существовать два вида волн, отличающиеся величиной волнового числа $k = \rho \varphi_i$. При малых k в сечениях, перпендикулярных продольной оси α цилиндрической или конической оболочки, существенны только тангенциальные компоненты перемещений и силовых факторов. Этот вид колебаний назовем полубезмоментным, так как в сечениях, перпендикулярных β , роль нетангенциальных компонент может быть достаточно велика, истинно безмоментное состояние является частным случаем этого вида колебаний. Для других колебаний характерна большая изменяемость нагруженно-деформированного состояния. При этом в сечениях $\alpha = \text{const}$ существенны только нетангенциальные компоненты. Нижние ветви частотного спектра $\omega(n)$ образованы полубезмоментными колебаниями, которые описываются уравнениями более низкого порядка. Кроме того, исходная расчетная модель в этом случае может быть упрощена за счет отбрасывания сферических оболочек. В результате для определения частотного спектра полубезмоментных колебаний имеем две независимые модели. Первая из них состоит из сопряженных цилиндрических и конических оболочек с граничными условиями в месте контакта $u_i = u_{i+1}$, $v_i = v_{i+1} = 0$, $N_{\alpha i} = N_{\alpha, i+1}$, $S_{\alpha i} = S_{\alpha, i+1}$, где i — номер сопрягаемых оболочек; остальные обозначения заимствованы из [5]. Вторая модель описывает колебания пологих сфер при следующих условиях на границе: $w_c = 0$, $M_{\alpha c} + M_{\alpha}^* = 0$, $w^* = 0$ (звездочка обозначает решение для цилиндрической оболочки типа «краевой эффект»). Поскольку в пологой сфере существуют колебания с большим показателем изменяемости, то при приближенных расчетах частотного спектра можно вместо приведенных использовать однородные граничные условия. Оценим теперь зону, в которой допустима замена исходной модели более простыми: полубезмоментными колебаниями и колебаниями с большой изменяемостью. Для расчленения спектра необходимо, чтобы граничные условия также распадалась. С математической точки зрения это эквивалентно требованию о том, чтобы частотный определитель, составленный из граничных условий, описывался блочной матрицей, ненулевые блоки которой лежали на главной диагонали. Характеристический полином в общем случае имеет восемь корней, следовательно, каждое граничное условие представляет собой сумму из восьми слагаемых. Диаграмма Ньютона позволяет оценить порядок корней полинома. В зоне, допускающей расчленение спектра, порядок φ_i для колебаний с большой изменяемостью определяется выражением $\varphi_i^2 \sim \rho^{\chi_i/2}$, для полубезмоментных колебаний $\varphi_i^2 \sim \rho^{(\chi_i - \chi_0)}$. Здесь $\chi_i = \ln a_i / \ln \rho$ и a_i — коэффициенты характеристического полинома [3]. Подставив φ_i в выражение для перемещений и силовых факторов их можно представить в виде двух частичных сумм из четырех слагаемых. Условие расчленения спектра требует, чтобы в нетангенциальных

компонентах сумма слагаемых, соответствующих корням φ_2 , была в ρ раз меньше суммы тангенциальных компонент. Это условие дает возможность определить границы зоны, в которой допускается упрощение исходной задачи. Таким образом, ширина зоны может быть различной при разных граничных условиях. Например, для цилиндрической оболочки при условиях на границах вида $N_\alpha=0$, $v=0$, $w=0$, $\partial w/\partial\alpha=0$ упрощение возможно внутри зоны, определяемой неравенством $\rho^{1/2}\varphi_2^2 - \varphi_1^2 + n^2\rho^{-2}(1-\rho^{1/2}) \leq 0$.

Если размеры оболочки соответствуют $h^2/(12R^2)=9,26 \cdot 10^{-7}$, то границы зоны будут:

n	0	1	3	5
Ω_H^4	0,9040	0,8617	0,7360	0,6134
Ω_b^4	0,9156	0,9563	1,1475	1,4520

Здесь $\Omega^4 = \rho_0 R^2 (1-v^2) \omega^2 / E$ — безразмерная частота, n — число волн в окружном направлении, $\rho = (12R^2 \Omega^4 / h^2)^{1/4}$. Применение полубезмоментной модели и модели колебаний с большим показателем изменчивости возможно вне интервала (Ω_H^2, Ω_b^2) . Дополнительное исследование показывает, что внутри этой зоны исходную задачу, тем не менее, также можно упростить за счет выделения крутильных волн.

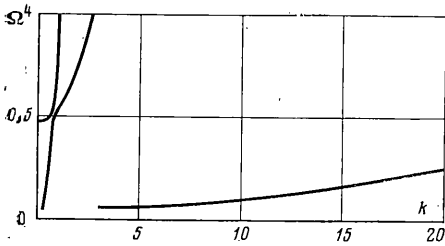
Обычно соединение обечает между собой производится с помощью кольцевых ребер. Взаимодействие оболочки и ребра различно для разных видов колебаний. Можно убедиться, что при полубезмоментных колебаниях оболочка и ребро колеблются совместно. Для второй модели влияние ребра на поведение оболочки более значительно. Выпишем граничные условия для колебаний с большой изменчивостью в зоне контакта, например цилиндрической оболочки и кольца, и оценим порядки входящих в них слагаемых $w=w_h$, $(\partial w/\partial\alpha)/R = \varphi_h$, $M_\alpha + m_h = 0$, $Q_\alpha' - Q' = 0$, где φ_h — угол закручивания кольца, M_α , Q_α' — момент и обобщенная перерезывающая сила в цилиндре, m_h — внешний распределенный момент в плоскости, перпендикулярной плоскости кольца, Q' — внешняя распределенная нагрузка в плоскости кольца, направленная по его радиусу. Здесь для упрощения анализа пренебрегается эксцентриситетом кольца относительно срединной поверхности оболочки. Раскрывая входящие в граничные условия величины с помощью разрешающей функции F и известных выражений для M_α и Q_α' можно два последних равенства записать в развернутом виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho^6 \varphi^6}{n^6} - (2+\nu) \frac{\rho^4 \varphi^4}{n^4} + (1+2\nu) \frac{\rho^2 \varphi^2}{n^2} + \Theta_M \rho \varphi \left\{ \left[\frac{1}{2(1+\nu_h)} \frac{I_h}{I_2} + \frac{1}{n^2} \right] \frac{\rho^4 \varphi^4}{n^4} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2(1+\nu_h)} \frac{I_h}{I_2} \left(1 + 2 \frac{\rho^2 \varphi^2}{n^2} \right) \right\} = 0 \\ & \left(\frac{\rho^2 \varphi^2}{n^2} - 1 \right)^3 + \Theta_Q \frac{n^2}{\rho \varphi} \left\{ \left[1 + \frac{R^2 F}{I_1 n^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{E \rho_h}{E_h \rho_0} \frac{\Omega^4}{n^2} \right) \right] \frac{\rho^4 \varphi^4}{n^4} - \right. \\ & \quad \left. - \left[1 + \frac{R^2 F}{I_1 n^2} \left(\frac{1+\nu}{n^2} - \frac{E \rho_h}{E_h \rho_0} \frac{\Omega^4}{n^2} \right) \right] \frac{\rho^2 \varphi^2}{n^2} + 1 - \frac{E \rho_h}{E_h \rho_0} \frac{\Omega^4}{n^2} \frac{R^2 F}{I_1 n^2} \right\} = 0 \\ & \Theta_M = \frac{E_h}{E} \frac{12R(1-\nu^2)}{h} \frac{I_2}{R^2 h^2}, \quad \Theta_Q = \Theta_M \frac{I_1}{I_2} \end{aligned}$$

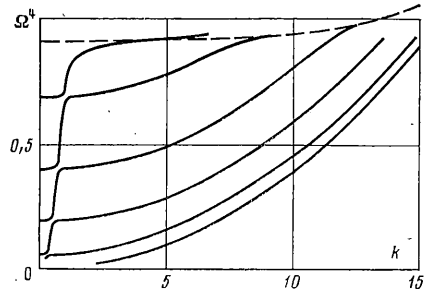
где I_1 , I_2 , I_h , F — моменты инерции и площадь поперечного сечения кольца. Слагаемые в фигурных скобках соответствуют силовым факторам кольца, остальные — усилиям на краю оболочки. Для тонких оболочек и обычно используемых в конструкциях машин ребер величина слагаемых в фигурных скобках уже при $n \geq 1$ имеет более высокий асимптотический порядок. Следовательно, при колебаниях с большой изменчивостью при $n \geq 1$ граничные условия могут быть упрощены и для цилиндрической оболочки принимают вид (более строго при $n \geq \rho \Theta^{-1/2}$): $dw/d\alpha=0$, $w=0$. Таким образом, кольцевые ребра разбивают оболочку на отдельные не связанные между собой части. Проводя аналогичный анализ, можно убедиться в справедливости полученного вывода для конических оболочек при колебаниях с большой изменчивостью, а также для сфер. Все приведенные рассуждения проведены с точностью $o(1/\rho)$.

До сих пор исследовался частотный спектр без учета влияния среды. Рассмотрим теперь задачу о колебаниях цилиндрической оболочки, содержащей жидкость или газ, и оценим влияние среды на частотный спектр. Для простоты исследуем осесимметричные колебания бесконечной оболочки. Нормальную распределенную нагрузку Z , приложенную к оболочке со стороны жидкости, представим в виде функции от перемещения w . Поведение жидкости подчиняется уравнению для потенциальной функции скорости Φ акустической среды $\nabla^2 \Phi - a^{-2} \partial^2 \Phi / \partial t^2 = 0$. Решение для потенциала Φ будем искать в виде

$$\begin{aligned} \Phi &= J_0(\rho_r \varphi_r \gamma) \cos k\alpha \exp(i\omega t) \eta_r \\ \rho_r^2 &= E \Omega^4 / [\rho_0 a^2 (1-\nu^2)], \quad \varphi_r^2 = 1 - k^2 / \rho_r^2 \end{aligned}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где a — скорость звука в жидкости, k — волновое число, γ — безразмерный радиус. На границе жидкости с оболочкой должны быть выполнены следующие условия: $\gamma=1$, $Z=-p=i\rho_0 r \omega \Phi$, $i\omega w=(\partial\Phi/\partial\gamma)/R$.

Удовлетворяя их, нетрудно выразить усилие Z через перемещение срединной поверхности оболочки

$$Z = \frac{1}{R} \frac{\rho_{0r}}{\rho_0} \frac{E}{1-\nu^2} \Omega^4 \frac{J_0(\rho_r \Phi_r)}{J_1(\rho_r \Phi_r)} w$$

Вводя функцию Z в уравнение равновесия оболочки, найдем вид коэффициентов характеристического уравнения [2, 3], учитывающих влияние взаимодействия оболочки с жидкостью

$$a_3 = (1-\nu^2)/\Omega^4 - 1 + \Delta_c J_0(\rho_r \Phi_r) / [\rho_r \Phi_r J_1(\rho_r \Phi_r)]$$

$$a_4 = [1 - \Omega^4 (1 - \Delta_c J_0(\rho_r \Phi_r) / [\rho_r \Phi_r J_1(\rho_r \Phi_r)])] / \rho^2$$

$$\Delta_c = \rho_{0r} R / (\rho_0 h)$$

Последнее слагаемое в выражениях для a_i учитывает влияние среды, которое зависит от величины Δ_c . При соизмеримых плотностях среды ρ_{0r} и оболочки ρ_0 акустическая среда оказывает сильное влияние на поведение оболочки как в полубезмоментном случае, так и при колебаниях с большой изменчивостью.

На фиг. 1 приведены результаты расчета частотного спектра осесимметричных колебаний бесконечной цилиндрической оболочки со следующими параметрами: $R=0,456$ м, $h=0,00225$ м, $E=0,7 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\nu=0,3$, $\rho_0=2,7 \cdot 10^3$ кг/м³. Внутри оболочки находится жидкость, имеющая плотность $\rho_{0r}=10^3$ кг/м³, $a=1500$ м/с.

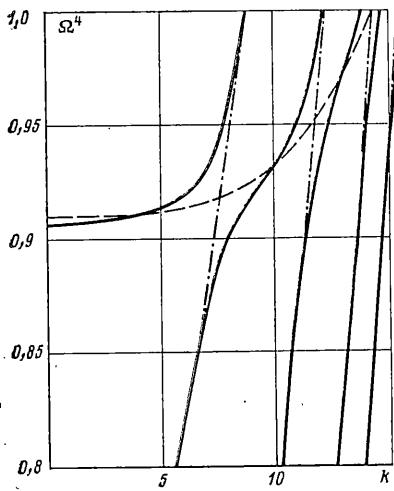
Анализ этих результатов показывает, что учет влияния среды вызывает, в отличие от случая колебаний оболочки в вакууме [2], появление устойчивых решений с большим показателем изменчивости и для частот, расположенных ниже значения $\Omega^4=1-\nu^2$. Таким образом, для оболочки с жидкостью одновременно во всем диапазоне частот существуют оба типа волн. Однако, учитывая приведенные выше результаты для оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами, использовать для оценки ее спектра часто встречающееся допущение о пренебрежении волнами безмоментного типа недопустимо.

В случае оболочки, содержащей газ, влияние среды зависит от типа колебаний. При полубезмоментных колебаниях газ изменяет поведение оболочки только в узкой зоне в районе нулей функции $J_1(\rho_r \Phi_r)$, в остальном диапазоне частот спектр распадается на два независимых друг от друга. Один практически всюду совпадает с аналогичной волной для оболочки в вакууме. Другой описывает волны в газе, заключенном в цилиндрический жесткий стакан (фиг. 2); при колебаниях с большим показателем изменчивости влияние газа на поведение оболочки более существенно (фиг. 3).

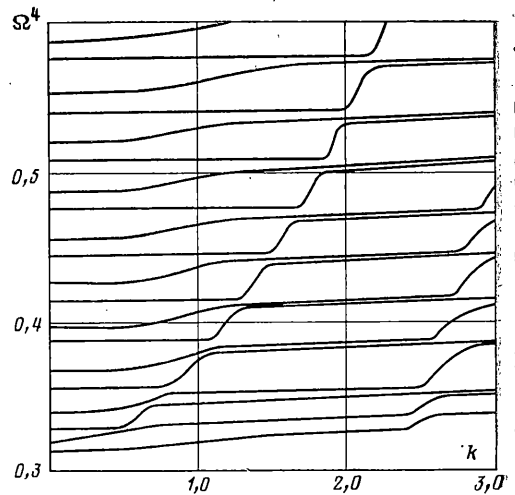
Анализ волн показывает, что имеется определенная частотная зона, ограниченная как сверху, так и снизу по частоте и захватывающая некоторую область в окрестности волны оболочки в вакууме, обозначенной штриховой линией на фиг. 3. Внутри этой зоны происходит существенный обмен энергией между колеблющейся оболочкой и содержащимся в ней газом и для определения спектра колебаний необходимо решать совместную задачу. Вне этой зоны решение совпадает с решением задачи о колебаниях газа в жестком стакане (на фиг. 3 решение для газа в жестком стакане нанесено штрихпунктирной линией). Следует также отметить, что в области частот $\Omega^4 < (1-\nu^2)$ представленные на фиг. 2, 3 решения, описывающие волны в газе, как и следовало ожидать, совпадают друг с другом. Полученная картина взаимодействия представляет интерес при решении акустических задач, поскольку звукопроницаемость оболочки существенна именно внутри отмеченной зоны спектра.

Используя такой же подход, можно также построить решение и в случае оболочки, скрепленной с упругим цилиндром. Осевую и нормальную компоненты поверхностной нагрузки со стороны цилиндра на оболочку представим в виде функций от перемещений оболочки

$$X = E_c (Du - ikH\omega) / [R(1+\nu_c)], \quad Z = -E_c (ikBu + Cw) / [R(1+\nu_c)]$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Для нахождения вида этих функций запишем граничные условия в зоне контакта цилиндра и оболочки $Z = \sigma_{\gamma\gamma}$, $X = \sigma_{\alpha\gamma}$, $u = u_c$, $w = w_c$, где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, u_c , w_c — перемещения цилиндра. Используя приведенное в [6] решение, можно записать

$$D = \rho_c \varphi_c J_1(\rho_c \varphi_c) / [2A J_0(\rho_c \varphi_c)], \quad B = H = 1/2(1 - 2A) / A$$

$$C = 1/2 [\rho_c \varphi_c^* J_0(\rho_c \varphi_c^*) / J_1(\rho_c \varphi_c^*) - 2A] / A$$

$$A = k^2 / \rho_c^2 + \varphi_c \varphi_c^* J_1(\rho_c \varphi_c) J_0(\rho_c \varphi_c^*) / [J_0(\rho_c \varphi_c) J_1(\rho_c \varphi_c^*)]$$

$$\rho_c = R\omega / V_s, \quad V_s^2 = \mu / \rho_{0c}$$

$$\varphi_c = [1/2(1 - 2\nu_c) / (1 - \nu_c) - k^2 / \rho_c^2]^{1/2}$$

$$\varphi_c^* = (1 - k^2 / \rho_c^2)^{1/2}$$

где ν_c , μ , ρ_{0c} — физические константы материала цилиндра. Полагая, как и ранее, для установившихся колебаний $k = \rho\omega$, получим в случае осесимметричных колебаний выражение коэффициентов характеристического уравнения

$$a_3 = 1 - (1 - \nu^2 + \Delta_c C + \Delta_c^2 B H) / \Omega^4$$

$$a_4 = \frac{1}{\rho^2} (1 + \Delta_c D / \Omega^4) (1 - \Omega^4 + \Delta_c C)$$

$$\Delta_c = (1 - \nu^2) E_c R / [(1 + \nu_c) E h]$$

Основные отличия от случая оболочки с жидкостью здесь определяются влиянием коэффициента D , входящего в выражение для осевого контактного усилия. Использование часто встречающегося упрощения условий контакта оболочки с цилиндром за счет введения проскальзывания в осевом направлении эквивалентно допущению о равенстве нулю коэффициентов D и B . Вычисления показывают, что в области достаточно длинных волн такое предположение не соответствует действительности. На фиг. 4 приведены результаты вычислений частотного спектра осесимметричных колебаний бесконечной цилиндрической оболочки с параметрами $E = 0,3 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,15$, $\rho_0 = 2 \cdot 10^3$ кг/м³, скрепленной с изотропно-упругим цилиндром. Материал цилиндра $E_c = 5$ МПа, $\nu_c = 0,4995$. Анализ кривых показывает, что для каждой из ветвей спектра имеется по одному участку, для которого групповая скорость существенно отличается от нуля. Огибающие этих участков можно трактовать как некоторые полубезмоментные волны. Для первой из них решение существует в районе перехода через нуль функции $J_0(\rho_c \varphi_c)$, для второй — при больших значениях коэффициента s . Более подробное исследование показывает, что для этих волн характерно резкое увеличение максимумов перемещений по мере приближения к центру цилиндра, поскольку ρ_c — большая величина. Следовательно, приведенная масса цилиндра существенно превышает приведенную массу оболочки.

Таким образом, включение в составную конструкцию оболочек, содержащих упругий наполнитель, будет налагать ограничения на распространение высокочастотных волн по оболочке, развязывая конструкцию на отдельные звенья.

Приведенные в статье результаты позволяют построить математические модели для расчета колебаний, основанные на декомпозиции исходной неоднородной оболочечной конструкции на не взаимодействующие между собой подсистемы.

Автор благодарит А. Л. Гольденвейзера за ценные замечания, высказанные при подготовке рукописи, и обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383 с.
2. Кузнецов О. В. Анализ свободных колебаний сопряженных между собой цилиндрических и сферических оболочек.— В кн.: Динамика и колебания механических систем. Иваново: Изд-е Иванов. ун-та, 1982, с. 119—125.
3. Кузнецов О. В. Модели для анализа резонансных колебаний неоднородных оболочечных конструкций.— В кн.: Динамика и вибродиагностика механических систем. Иваново: Изд-е Иванов. ун-та, 1983, с. 77—86.
4. Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Пг.: Тип. М. П. Фроловой, 1917. 308 с.
5. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике.— В кн.: Избр. тр. М.: Изд-во АН СССР, 1962, т. 1, с. 15—430.
6. Кузнецов О. В. Осесимметричные волны в цилиндрах конечной длины.— В кн.: Вопросы математической физики и теории колебаний. Иваново: Изд-е Иванов. энерг. ин-та, 1975, с. 96—102.

Москва

Поступила в редакцию
11.XI.1985.

УДК 539.214:539.374

РАЗГРУЗКА ПЛАСТИЧЕСКИ ДЕФОРМИРОВАННЫХ МЕТАЛЛОВ ПРИ ФИКСИРОВАННЫХ СКОРОСТЯХ УБЫВАНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

ЖУКОВ А. М.

Нелинейное деформирование любого материала сопровождается различием законов нагрузки и разгрузки. В существующих теориях пластичности принимается, что разгрузка пластически деформированного металла подчиняется линейному закону, характеризующемуся начальным модулем упругости. Как показали опыты [1, 2], разгрузка не следует начальному линейному закону, ее характер сложнее. Остаточные деформации, вычисляемые по линейному закону разгрузки, дают расходящиеся с опытом результаты. Значительного расхождения можно избежать, если использовать реальные законы разгрузки. Но для этого необходимо всесторонне изучить для разных металлов и разных уровней конечных напряжений.

В упомянутых опытах были использованы машины кинематического типа, в которых осуществлялось взаимное принудительное смещение захватов. При испытаниях на них скорость разгрузки оставалась неопределенной. На начальных стадиях разгрузки пластически деформированных сталей было замечено возрастание деформации несмотря на убывание нагрузки, действовавшей на испытательный образец. Последнее обусловлено ползучестью металлов за пределами упругости, которая сравнительно подробно исследована на разных металлах.

Необходимо провести исследования величины уменьшения действующего напряжения, после которого наступает убывание деформации; величины пластической деформации, накапливаемой за этот период; законов чистой разгрузки (одновременного убывания напряжения и деформации); влияние фиксированной скорости убывания нагрузки с разных уровней действующих напряжений. Решению этих вопросов и посвящена публикуемая работа.

Для проведения указанных исследований была переоборудована машина ТГ-2. Одноплечевой силовой рычаг был заменен двухплечевым с призмами на концах, на которые подвешивался с одной стороны пустой бак, а с другой — подвеска. Нагружение испытательного образца осуществлялось наложением на подвеску калиброванных грузов, а разгрузка производилась заливкой воды в бак под постоянным напором через отверстие в круглой пластинке загрузочного крана. Устройство, обеспечивающее постоянный напор воды, описано в [3]. Деформации образцов при нагрузке и разгрузке измерялись прибором МК-3, погрешность которого на прямом и обратном ходе не превышала 0,8%. Погрешность испытательной машины не превышала 0,1%.

Образцы имели длину рабочей части порядка 105 мм и диаметр около 7 мм. Измерение деформаций производилось в средней части образца на базе 50 мм. После монтажа образца и тензомера силовой рычаг машины приводился в горизонтальное положение посредством перемещения по нему в нужном направлении противовеса. Таким путем достигалось уравнивание рычага с пустым баком и подвеской перед каждым испытанием.

Калиброванный груз, положенный на подвеску, вызывал усилие в образце, равное 1962 Н. Наложение четырех грузов создавало в образце напряжение около 206 МПа, которое меньше предела пропорциональности малоуглеродистой стали (сталь 3). Наложение пятого груза вызывало напряжение порядка 256 МПа, большее предела текучести, полученного в результате испытаний на машине ЦД 10/90. Перед наложением шестого груза, вес которого подбирался так, чтобы в образце