

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
2. Локиши А. А., Суворова Ю. В. Математическая теория распространения волн в средах с памятью. М.: Изд-во МГУ, 1982. 151 с.
3. Кукуджанов В. Н. Распространение сферических волн в упруговязкой среде. — Инж. журн., 1963, т. 3, № 3, с. 472—481.
4. Chu B. T. Stress waves in isotropic linear viscoelastic materials. — J. Мес., 1962, v. 1, No. 4, p. 439—461.
5. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Т. 2. М.: Наука, 1984. 335 с.
6. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Кн. 1. М.: Мир, 1984. 350 с.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 831 с.

Москва

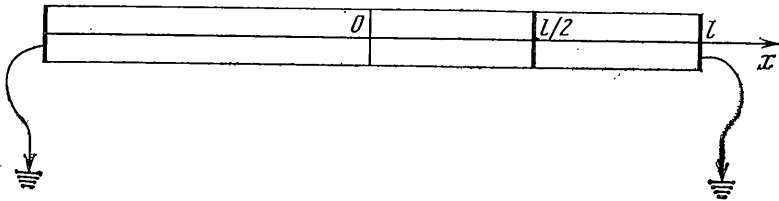
Поступила в редакцию
19.XI.1985

УДК 539.3

О СОУДАРЕНИИ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

ЛЕ ХАНЬ ЧАУ

Рассмотрим одинаковые пьезокерамические стержни, предварительно поляризованные по своим осям. На свободных торцах стержней имеются электроды, которые электрически заземлены. В середине первого стержня вставлен электрод, жестко соединенный с ним. Пусть на первый стержень, расположенный на оси x в интервале $0 < x < l$, движется по положительному направлению этой же оси x второй стержень со скоростью v_0 . В момент $t=0$ оба стержня соударяются (фиг. 1). Нужно найти



Фиг. 1

электроупругое напряженное состояние стержней при $t>0$ и продолжительность удара. Согласно [1], движение стержней описывается уравнениями

$$\rho u_{,tt} = c_h u_{,xx} + e_h \psi_{,xx} \quad e_h u_{,xx} = e_h \psi_{,xx} \quad (1)$$

где u — смещение стержней, ψ — электрический потенциал, ρ — плотность, c_h , e_h , e_h — одномерные модули электроупругости стержней. На торцах стержней $x=\pm l$ должны быть выполнены условия свободного края и электрического заземления

$$c_h u_{,x} + e_h \psi_{,x} = 0, \quad \psi = 0 \quad (x = \pm l) \quad (2)$$

На контактирующих торцах стержней $x=0$ формулируются условия непрерывности перемещений, электрического потенциала, напряжений и электрической индукции

$$\begin{aligned} u(-0) &= u(+0), \quad \psi(-0) = \psi(+0), \quad (c_h u_{,x} + e_h \psi_{,x})|_{x=0-} = \\ &= (c_h u_{,x} + e_h \psi_{,x})|_{x=+0}, \\ (e_h u_{,x} - e_h \psi_{,x})|_{x=0-} &= (e_h u_{,x} - e_h \psi_{,x})|_{x=+0} \end{aligned} \quad (3)$$

Кроме того, решения могут иметь разрывы, тогда в точках разрыва должны выполняться условия непрерывности смещения, потенциала электрической индукции и следующее динамическое условие:

$$V[\rho u_{,t}] = [c_h u_{,x} + e_h \psi_{,x}] \quad (4)$$

где V — скорость фронта разрыва, $[A] = A_+ - A_-$. Постановка задачи завершается заданием начальных условий

$$u|_{t=0} = 0 \quad (-l < x < l), \quad u_{,t}|_{t=0} = v_0 \quad (-l < x < 0), \quad u_{,t}|_{t=0} = 0 \quad (0 < x < l) \quad (5)$$

Для решения поставленной задачи (1)–(5) сначала нужно выразить ψ через u . Из (1)–(3) следует, что

$$\psi = (e_h/e_h) \{u - [u(l) - u(-l)]x/2l - [u(l) + u(-l)]/2\} \quad (6)$$

Подставив (6) в соотношения (1)–(5), получим

$$\rho u_{,tt} = cu_{,xx}, \quad c = c_h + e_h^2/\epsilon_h \quad (7)$$

$$cu_{,x} - e_h^2[u(l) - u(-l)]/(2l\epsilon_h) = 0 \quad (x = \pm l) \quad (8)$$

$$u(-0) = u(+0), \quad cu_{,x}|_{x=-0} = cu_{,x}|_{x=+0} \quad (9)$$

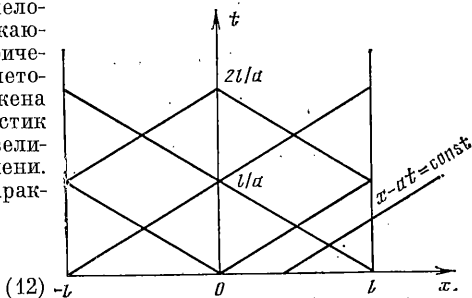
$$u|_{t=0} = 0 \quad (-l < x < l), \quad u_{,t}|_{t=0} = v_0 \quad (-l < x < 0), \quad u_{,t}|_{t=0} = 0 \quad (0 < x < l) \quad (10)$$

и следующее условие на разрыве

$$V[\rho u_{,t}] = [cu_{,x}] \quad (11)$$

Задача (7)–(11) напоминает обычную задачу о соударении упругих стержней. Единственное различие заключается в «нелокальном» граничном условии (8), возникающем за счет дальнего действующего электрического поля. Задача (7)–(11) решается методом характеристик [2]. На фиг. 2 изображена плоскость (x, t) с системой характеристик $x \pm at = \text{const}$, $a = (c/\rho)^{1/2}$. Сначала найдем величину $u(l) - u(-l) = f(t)$ как функцию времени. При $t \leq l/a$ с помощью инвариантов на характеристиках легко видеть, что

$$(u_{,t} - au_{,x})|_{x=l} = 0, \quad (u_{,t} + au_{,x})|_{x=-l} = v_0 \quad (12)$$



Фиг. 2

Заменим в (12) $u_{,x}|_{x=\pm l}$ согласно (8).

Вычитая из первого уравнения (12) второе, получим

$$[u(l) - u(-l)]_{,t} - (ak^2/l)[u(l) - u(-l)] = -v_0$$

$$k^2 = e_h^2/(c\epsilon_h), \quad [u(l) - u(-l)]|_{t=0} = 0$$

Отсюда следует, что при $t \leq l/a$ имеет место

$$f(t) = [lv_0/(ak^2)][1 - \exp(ak^2t/l)] \quad (13)$$

Аналогично, при $l/a \leq t \leq 2l/a$ имеем $(u_{,t} - au_{,x})|_{x=l} = v_0$, $(u_{,t} + au_{,x})|_{x=-l} = 0$, следовательно

$$f_{,t} - (ak^2/l)f = v_0, \quad f|_{t=l/a} = [lv_0/(ak^2)][1 - \exp k^2] \quad (14)$$

Решение уравнения (14) имеет вид

$$f(t) = [lv_0/(ak^2)][2 \exp(-k^2) \exp(ak^2t/l) - \exp(ak^2t/l) - 1] \quad (15)$$

Обратимся к уравнению (7). Его общее решение имеет вид

$$u = F_1(at - x) + F_2(at + x) \quad (16)$$

Из (8) следует, что $u_{,x}|_{x=-l} = u_{,x}|_{x=l}$, поэтому $-F_1'(at+l) + F_2'(at-l) = -F_1'(at-l) + F_2'(at+l)$. Это означает, что функция $g'(\xi) = F_1'(\xi) + F_2'(\xi)$ периодична по ξ с периодом $2l$, $\xi > -l$. Найдем $g'(\xi)$ на отрезке $(-l, l)$. Из начальных условий (10) следует, что

$$-F_1'(-x) + F_2'(x) = 0, \quad -l < x < l, \quad a(F_1'(-x) + F_2'(x)) = \begin{cases} v_0, & -l < x < 0 \\ 0, & 0 < x < l \end{cases}$$

Отсюда найдем значение функций $F_1'(\xi)$, $F_2'(\xi)$ на интервале $-l < \xi < l$

$$F_1'(\xi) = \begin{cases} v_0/(2a), & 0 < \xi < l \\ 0, & -l < \xi < 0 \end{cases}, \quad F_2'(\xi) = \begin{cases} 0, & 0 < \xi < l \\ v_0/(2a), & -l < \xi < 0 \end{cases}$$

Итак, на отрезке $(-l, l)$ $g'(\xi) = v_0/(2a)$. В силу периодичности $g'(\xi) = v_0/(2a)$ при всех $\xi > -l$. Таким образом, решение задачи можно представить в следующем виде

$$u = F(at - x) - F(at + x) + (v_0/2a)(at + x), \quad F(\xi) = F_1(\xi) \quad (17)$$

Решение будет полностью построено, если известна функция $F(\xi)$ при $\xi > -l$. Выше $F'(\xi)$ найдена в интервале $(-l, l)$. Определим ее при $\xi > l$. Из граничного условия (8) на правом свободном торце следует, что $-F'(at-l) - F'(at+l) + v_0/(2a) = -k^2 f(t)/(2l)$. Из этого уравнения, зная $f(t)$ и $F'(at-l)$, можно определить $F'(at+l)$ последовательно для интервалов $0 < at < l$, $l < at < 2l$, $2l < at < 3l$ и так далее.

Опуская вычисления, приведем результаты:

$$F'(\xi) = [v_0/(2a)] \exp[k^2(\xi-l)/l], \quad l < \xi < 2l \quad (18)$$

$$F'(\xi) = [v_0/(2a)] \{2 - \exp[k^2(\xi-3l)/l] + \exp[k^2(\xi-l)/l] - 2 \exp[k^2(\xi-2l)/l]\}, \quad 2l < \xi < 3l \quad (19)$$

Можно найти значения $F'(\xi)$ и в последующих интервалах. По найденных значений $F'(\xi)$ на интервале $(-l, 3l)$ уже достаточно для нахождения момента отделения стержней (продолжительности удара). Он определяется как момент T , при котором величина $u_{,x}|_{x=0}$ обращается в нуль или же меняет свой знак. Согласно (17), имеем $u_{,x}|_{x=0} = v_0/(2a) - 2F'(at)$. Вычисляя $u_{,x}|_{x=0}$ по этой формуле, получим следующие результаты:

$$u_{,x}|_{x=0} < 0, \quad 0 < at < 2l, \quad u_{,x}|_{x=0} = (v_0/2a) \{ 2 \exp[k^2(at-3l)/l] - 3 - 2 \exp[k^2(at-l)/l] + 4 \exp[k^2(at-2l)/l] \}, \quad 2l < at < 3l \quad (20)$$

Устремляя $t \rightarrow 2l/a + 0$, получим в пределе

$$u_{,x}|_{x=0} \rightarrow [v_0/(2a)] [1 + 2 \exp(-k^2) - 2 \exp(k^2)]$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что это выражение всегда больше нуля, если $0 < k^2 < 0,24$. Значит, при малых коэффициентах электромеханической связи $k^2 = e_k^2/(c\epsilon_k)$, удовлетворяющих этому неравенству, продолжительность удара определяется по классической теории соударения стержней $T = 2l/a$. При $k^2 > 0,24$: $T = l(2 + \delta)/a$, где δ — функция от k^2 . Нахождение функции $\delta(k^2)$ связано с нахождением нуля выражения, стоящего в правой части последнего соотношения (20).

В отличие от классической теории, в рассматриваемой задаче кинетическая энергия ударяющего стержня после соударения не полностью переходит в кинетическую энергию ударяемого стержня. Часть этой кинетической энергии запасена во внутренних энергиях обоих стержней, что вызывает их вибрацию после соударения.

Вычислим теперь разность электрических потенциалов на электродах ударяемого стержня в процессе соударения. По формуле (6) находим

$$\psi(l) - \psi(l/2) = (e_k/\epsilon_k) \{ -u(l/2) + [u(l) - u(-l)]/4 + [u(l) + u(-l)]/2 \} \quad (21)$$

Для вычисления разности потенциалов по (21) нужно знать величины $u(l) - u(-l)$, $u(l) + u(-l)$ и $u(l/2)$. Величина $u(l) - u(-l) = f(t)$ уже найдена (формулы (13), (15)). Для величины $u(l) + u(-l)$ имеем $u(l) + u(-l) = v_0 t$, $0 < at < 2l$. Для величины же $u(l/2)$ из (17) следует, что $u(l/2) = F(at - l/2) - F(at + l/2) + v_0(at + l/2)/(2a)$.

Таким образом, если известна $F(\xi)$, то $u(l/2)$ также можно найти. Функция $F(\xi)$ находится по ее производной $F'(\xi)$ (см. (18), (19)). Опуская вычисления, приведем значения разности потенциалов $\psi(l) - \psi(l/2) = (e_k/\epsilon_k) \{ v_0 l [-\exp(ak^2 t/l) + 1] / (4ak^2) + v_0 t/2 \}$, $0 < t < l/(2a)$, $\psi(l) - \psi(l/2) = (e_k/\epsilon_k) \{ v_0 l / (4a) + v_0 l [1 - \exp(ak^2 t/l)] / (4ak^2) \}$, $l/(2a) < t < l/a$.

Производная от $\psi(l) - \psi(l/2)$ по t равна $e_k v_0 [2 - \exp(ak^2 t/l)] / (4\epsilon_k)$ при $0 < t < l/(2a)$ и $-e_k v_0 \exp(ak^2 t/l) / (4\epsilon_k)$ при $l/(2a) < t < l/a$. Она нигде не обращается в нуль во внутренних точках интервалов $(0, l/(2a))$ и $(l/(2a), l/a)$. Следовательно, $\psi(l) - \psi(l/2)$ достигает максимума либо при $t = 0$, либо при $t = l/(2a)$, либо при $t = l/a$. Легко проверить, что максимум достигается при $t = l/(2a)$ (четверть продолжительности соударения) и

$$\max[\psi(l) - \psi(l/2)] = e_k v_0 l \{ 1 + [1 - \exp(k^2/2)] / k^2 \} / (4a\epsilon_k) = e_k v_0 l / (8\epsilon_k a) + O(k^2) \quad (22)$$

Полученные результаты позволяют предложить следующую методику экспериментального измерения модулей электроупругости пьезокерамика (при малых k^2). Сначала статическим путем определяется l , ρ , e_k ; по измеренной продолжительности удара T , определяются a и c по формуле $T = 2l/a$. Наконец, измеряя максимум разности потенциала, можно найти e_k и k^2 по формуле (22). Такая методика отличается от традиционной, основанной на измерении частот резонанса и антирезонанса [3], и может дополнить ее в качестве проверочной процедуры.

Отметим, что аналогичная задача об ударе тяжелым жестким телом по пьезокерамическому стержню с заделанным торцом решена в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Физическая акустика. Т. 1. Ч. А. М.: Мир, 1966. 592 с.
2. Ляв А. Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935. 674 с.
3. Мэзон У. Пьезоэлектрические кристаллы и их применения в ультразвуке. М.: Изд-во иностр. литер., 1952. 447 с.
4. Кулиев Ю. Н. Разматулин Х. А. Продольный удар по пьезоэлектрическому стержню. — Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 5, с. 117—122.

Вьетнам

Поступила в редакцию
14.X.1985