

ОБ АСИМПТОТИКЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ
ВОЛНОВОГО ОПЕРАТОРА С ПАМЯТЬЮ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

КЕЛЬБЕРТ М. Я., САЗОНОВ И. А.

Найдена асимптотика фундаментального решения волнового оператора с экспоненциальным ядром ползуучести в размерности $\nu=2$ в дальней зоне, вдали и вблизи от фронта возмущения.

Многие характерные особенности распространения колебаний в средах с памятью описываются интегрально-дифференциальным оператором $L=c^{-2}(\partial_t^2+K*\partial_t^2)-\Delta_\nu$ (см. [1, 2]). Здесь $\nu=1, 2, 3$ – размерность задачи, Δ_ν – оператор Лапласа, K – ядро ползуучести, c – высокочастотная скорость звука; звездочкой обозначена операция свертки по времени от $-\infty$ до t . Асимптотическому исследованию фундаментальных решений E_ν этого оператора в размерностях $\nu=1, 3$ посвящен ряд работ (см., например, [3, 4]). Однако двумерный случай до сих пор остается неизученным.

Фундаментальное решение $E_2(r, t)$ может быть записано с помощью обратного преобразования Лапласа (K_0 – функция Макдональда):

$$E_2(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} K_0\left(\frac{s}{c} \sqrt{1+K^\vee(s)} r\right) e^{st} ds, \quad K^\vee(s) = \int_0^\infty K(t) e^{-st} dt \quad (1)$$

а также через фундаментальное решение $E_3(R, t)$ методом спуска:

$$E_2(r, t) = r \int_{-A}^A E_3(r\sqrt{1+u^2}, t) du, \quad r = \sqrt{x_1^2+x_2^2} \quad (2)$$

$$R = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}, \quad u=x_3/r, \quad A = \sqrt{(ct/r)^2-1}$$

Для исследования асимптотики E_2 вблизи фронта $r=ct$ будем использовать представление (1), а для остальных r – представление (2).

Используя результаты исследования асимптотики плоских и сферических импульсов в среде с экспоненциальным ядром ползуучести [3, 4]: $K(t)=(2\gamma/\tau) \exp(-t/\tau)$ (τ – время релаксации, $\gamma=(c^2-c_0^2)/(2c_0^2)$, c_0 – низкочастотная скорость распространения звука), можно показать, что при $\gamma \ll 1$ в дальней зоне $R \gg c\tau/\gamma$ асимптотика E_3 для такого ядра может быть записана следующим образом (I_1 – модифицированная функция Бесселя):

$$E_3(R, t) \approx \frac{\exp(-\lambda_1(\beta_1-\beta_0)^2)}{8(\pi\beta_1)^{3/2}(2\lambda_1)^{1/2}R\tau} \quad \text{при} \quad ct-R \gg \frac{c\tau^2}{\gamma t} \quad (3)$$

$$E_3(R, t) \approx \frac{\exp(-\lambda_1(\beta_1^2+1))}{8\pi^2 R\tau} (\delta(R-ct) + I_1(2\lambda_1\beta_1)) \quad \text{при} \quad ct-R \ll \gamma ct \quad (4)$$

$$\lambda_1=R\gamma/c\tau, \quad \beta_1=\sqrt{(ct/R-1)/\gamma}, \quad \beta_0=\sqrt{(c/c_0-1)/\gamma}$$

С учетом (2) и (3) фундаментальное решение $E_2(r, t)$ вдали от фронта $ct-r \gg \gg c\tau^2/\gamma t$ для экспоненциального ядра может быть выражено через интеграл

$$E_2(r, t) = \int_{-A+\varepsilon}^{A-\varepsilon} \exp(\lambda\Psi(u)) f(u) du + O(e^{-\lambda}) \quad (5)$$

$$\Psi = -\sqrt{1+u^2}(\sqrt{(1+\gamma\beta^2)/\sqrt{1+u^2}-1})/\gamma - \beta_0$$

$$f = (\sqrt{1+u^2}(\sqrt{(1+\gamma\beta^2)/\sqrt{1+u^2}-1})/\gamma)^{-3/4} (8\pi^{3/2}\lambda^{1/2}\tau)^{-1}$$

$$\lambda = r\gamma/c\tau, \quad \beta = \sqrt{(ct/r-1)/\gamma}$$

Интегрирование по ε -окрестностям точек $-A, A$ вдали от фронта при $\varepsilon \gg \gg (c\tau^2/\gamma t)(1-(r/ct)^2)^{-1/2}$ вносит экспоненциально малую погрешность в решение.

Для исследования асимптотик интеграла (5) воспользуемся методом перевала. Фазовая функция $\Psi(u)$ имеет три перевальных точки $u_0=0, u_1(\beta), u_2(\beta)=-u_1(\beta)$, которые сливаются при $\beta=\beta_0$ ($r=c_0t$). Произведя в (5) замену $u \rightarrow w$, такую, что $\Psi(u)=X(w)=-\left(w^2-(\beta-\beta_0)^2\right)^2$, получим

$$E_2 = \int_{-B}^B g(w) \exp(\lambda X(w)) dw \approx g(w_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\lambda X(w)) dw +$$

$$+ \frac{g(w_1) - g(w_0)}{w_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 \exp(\lambda X(w)) dw, \quad g(w) = f(u(w)) \left(\frac{du}{dw} \right)$$

Здесь $w_0=0$, $w_1=(\beta-\beta_0)^{1/2}$, $w_2=-w_1$ — перевальные точки функции $X(w)$. Таким образом, асимптотика E_2 может быть выражена через следующие модельные интегралы:

$$y_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(z^2-x)^2) dz =$$

$$= \begin{cases} (x/2)^{1/2} \exp(-x^2/2) (K_{1/4}(x^2/2) - \pi^{1/2} \bar{I}_{1/4}(x^2/2)), & x > 0 \\ (|x|/2)^{1/2} \exp(-x^2/2) K_{1/4}(|x^2/2|), & x < 0 \end{cases}$$

$$y_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \exp(-(z^2-x)^2) dz =$$

$$= \begin{cases} (x/2)^{1/2} \exp(-x^2/2) (K_{1/4}(x^2/2) - K_{-3/4}(x^2/2) + \pi^{1/2} (I_{1/4}(x^2/2) + I_{-3/4}(x^2/2))), & x > 0 \\ (|x|/2)^{1/2} \exp(-x^2/2) (K_{1/4}(|x^2/2|) - K_{-3/4}(|x^2/2|)), & x < 0 \end{cases}$$

Отметим, что $y_0(x)$ — частный случай так называемой функции Пирси (см. [5, 6]). В силу симметрии точек перевала $w_2=-w_1$ ее удалось выразить через цилиндрические функции.

Вычисляя в явном виде $g(w_0)$, $g(w_1)$, получим

$$E_2(r, t) = \frac{\gamma^{1/2} \lambda^{-3/4}}{4\pi^{3/2} \tau} \left[\frac{y_0(\lambda^{1/2}(\beta-\beta_0))}{\beta(1+\gamma\beta\beta_0)^{1/2}} + \left(\frac{2}{\gamma\beta_0(\beta+\beta_0)(2+\gamma\beta^2+\gamma\beta_0^2)} - \frac{1}{\beta\gamma(1+\gamma\beta\beta_0)} \right) \frac{y_2(\lambda^{1/2}(\beta-\beta_0))}{\lambda^{1/2}(\beta-\beta_0)} \right]$$

В частности, вблизи точки $r=c_0 t$ ($\lambda^{1/2}|\beta-\beta_0| \ll 1$):

$$E_2(r, t) \approx \frac{1}{4\pi^{3/2}(\gamma\tau t^3)^{1/4}} y_0\left(\frac{r-c_0 t}{2c(\gamma\tau t)^{1/2}}\right) \quad (6)$$

Вдали от точки $r=c_0 t$ ($\lambda^{1/2}|\beta-\beta_0| \gg 1$):

$$E_2(r, t) \approx \exp(-\lambda(\beta-\beta_0)^2) (\pi\tau\beta)^{-1} 2^{-3/2} \gamma^{1/2} \lambda^{-3/4} (\beta_0-\beta)^{-1/2}, \quad r > c_0 t$$

$$E_2(r, t) \approx (2\pi)^{-1} (t^2 - r^2/c_0^2)^{-1/2}, \quad r < c_0 t$$

Наконец, найдем асимптотику $E_2(r, t)$ вблизи фронта $r=ct$. При больших τ интеграл (1) сводится к

$$E_2(r, t) \approx \frac{c^{1/2} e^{-\lambda}}{2^{1/2} \pi^{1/2} r} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \exp(s\tau\lambda\beta^2 + \lambda/s\tau) \frac{ds}{s^{1/2}}$$

отсюда получаем (см. [7], с. 231): $E_2(r, t) = (\gamma^{1/2}/\pi r) \exp(-\gamma r/ct) \operatorname{ch} v/v$, $ct-r \ll \gamma ct$, где $v=2(\gamma r(ct-r))^{1/2} (ct)^{-1}$.

Таким образом, наличие экспоненциального ядра $K(t)$ в операторе L существенно меняет характер решения E_2 в волновой зоне $c_0 t < r < ct$. В точке $r=c_0 t$ решение имеет локальный максимум, равный $0,65(\gamma\tau t^3)^{-1/4}$. Вблизи максимума на расстоянии от него, сравнимом с $d=c(\gamma\tau t)^{1/2}$, решение выражается через цилиндрические функции (см. (6)). При $r > c_0 t$ с ростом r решение E_2 экспоненциально убывает и имеет локальный минимум, равный $0,48\gamma^{1/2}\tau^{-1} \exp(-\gamma r/ct)$ в точке $r=ct-0,36c\tau^2/\gamma t$, асимптотически приближающейся к фронту $r=ct$. На фронте сохраняется корневая особенность, характерная для фундаментального решения E_2 обычного волнового оператора (без потерь), но появляется дополнительный множитель $\exp(-\gamma r/ct)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
2. Локиши А. А., Суворова Ю. В. Математическая теория распространения волн в средах с памятью. М.: Изд-во МГУ, 1982. 151 с.
3. Кукуджанов В. Н. Распространение сферических волн в упруговязкой среде.— Инж. журн., 1963, т. 3, № 3, с. 472—481.
4. Чу В. Т. Stress waves in isotropic linear viscoelastic materials.— J. Мес., 1962, v. 1, No. 4, p. 439—461.
5. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Т. 2. М.: Наука, 1984. 335 с.
6. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Кн. 1. М.: Мир, 1984. 350 с.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 831 с.

Москва

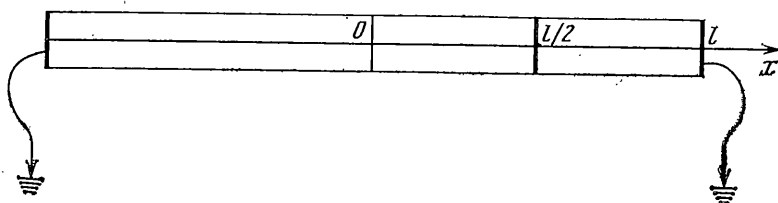
Поступила в редакцию
19.XI.1985

УДК 539.3

О СОУДАРЕНИИ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

ЛЕ ХАНЬ ЧАУ

Рассмотрим одинаковые пьезокерамические стержни, предварительно поляризованные по своим осям. На свободных торцах стержней имеются электроды, которые электрически заземлены. В середине первого стержня вставлен электрод, жестко соединенный с ним. Пусть на первый стержень, расположенный на оси x в интервале $0 < x < l$, движется по положительному направлению этой же оси x второй стержень со скоростью v_0 . В момент $t=0$ оба стержня соударяются (фиг. 1). Нужно найти



Фиг. 1

электроупругое напряженное состояние стержней при $t>0$ и продолжительность удара. Согласно [1], движение стержней описывается уравнениями

$$\rho u_{,tt} = c_h u_{,xx} + e_h \psi_{,xx} \quad e_h u_{,xx} = \epsilon_h \psi_{,xx} \quad (1)$$

где u — смещение стержней, ψ — электрический потенциал, ρ — плотность, c_h , e_h , ϵ_h — одномерные модули электроупругости стержней. На торцах стержней $x=\pm l$ должны быть выполнены условия свободного края и электрического заземления

$$c_h u_{,x} + e_h \psi_{,x} = 0, \quad \psi = 0 \quad (x = \pm l) \quad (2)$$

На контактирующих торцах стержней $x=0$ формулируются условия непрерывности перемещений, электрического потенциала, напряжений и электрической индукции

$$\begin{aligned} u(-0) &= u(+0), \quad \psi(-0) = \psi(+0), \quad (c_h u_{,x} + e_h \psi_{,x})|_{x=0-} = \\ &= (c_h u_{,x} + e_h \psi_{,x})|_{x=+0}, \\ (e_h u_{,x} - \epsilon_h \psi_{,x})|_{x=0-} &= (e_h u_{,x} - \epsilon_h \psi_{,x})|_{x=+0} \end{aligned} \quad (3)$$

Кроме того, решения могут иметь разрывы, тогда в точках разрыва должны выполняться условия непрерывности смещения, потенциала электрической индукции и следующее динамическое условие:

$$V[\rho u_{,t}] = [c_h u_{,x} + e_h \psi_{,x}] \quad (4)$$

где V — скорость фронта разрыва, $[A] = A_+ - A_-$. Постановка задачи завершается заданием начальных условий

$$u|_{t=0} = 0 \quad (-l < x < l), \quad u_{,t}|_{t=0} = v_0 \quad (-l < x < 0), \quad u_{,t}|_{t=0} = 0 \quad (0 < x < l) \quad (5)$$

Для решения поставленной задачи (1)–(5) сначала нужно выразить ψ через u . Из (1)–(3) следует, что

$$\psi = (e_h/\epsilon_h) \{u - [u(l) - u(-l)]x/2l - [u(l) + u(-l)]/2\} \quad (6)$$