

УДК 624.072.21

О СТЕСНЕННОМ ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

ФЕОДОСЬЕВ В. И.

Исследуется устойчивость тонкого упругого стержня, заключенного в жесткую круглую прямолинейную трубу. Рассматривается пространственная форма потери устойчивости при продольном изгибе. Получено точное решение задачи.

Рассмотрим следующую задачу. Тонкий, упругий, шарнирно закрепленный стержень расположен с заданным постоянным зазором Δ внутри жесткой трубы. Требуется выявить механизм поведения стержня при сжимающей силе, значение которой существенно превышает эйлерово.

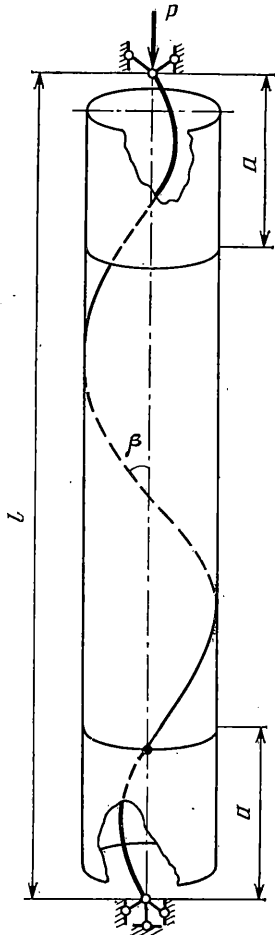
Подобная задача рассматривалась в [1], где предполагалась плоская форма изгиба стержня, расположенного с малым зазором между двумя жесткими стенками. Для изгиба стержня характерны последовательные скачкообразные переходы от одной формы изгиба к другой с различной последовательностью при возрастании и при убывании нагрузки.

Сейчас уже трудно вспомнить, когда и кто обратил внимание автора на то обстоятельство, что упругий стержень с круглым поперечным сечением в круглой трубе ведет себя иначе. При эйлеровой силе стержень изгибается сначала по полуволне синусоиды, прилегает в средней точке пролета к трубе, а затем при увеличении сжимающей силы упругая линия приобретает двоякую кривизну и образуется винтообразная линия, показанная на фиг. 1.

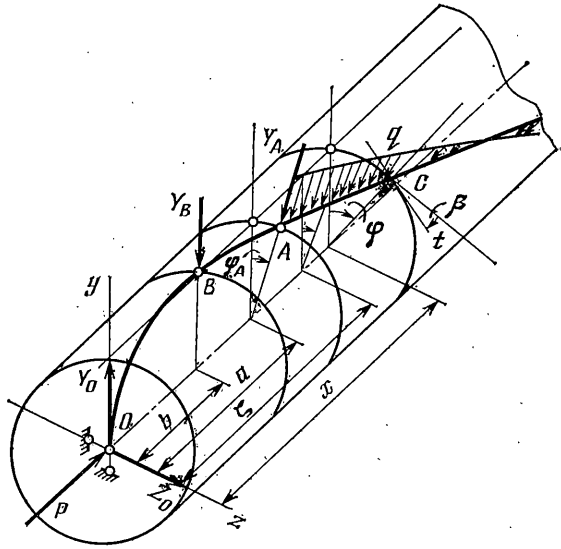
Проводившиеся у нас несколько лет назад опыты полностью подтвердили эту картину. С ростом силы P длина выходных участков a (фиг. 1) сокращается, а число витков в средней части возрастает. Форма упругой линии однозначно определяется силой P и при малом трении ее можно считать одинаковой при нагружении и разгрузке. Установить в опыте число контактных точек, их месторасположение и их сменяемость не удалось, а попытки сделать это при помощи логических рассуждений терпели неудачу. Тем не менее решение было найдено. Его описанию и посвящена настоящая заметка.

Поведение стержня удобнее рассмотреть, если следить не за возрастанием, а за убыванием силы P , имеющей первоначальное значение, во много раз превышающее эйлерово.

Предположим, что на участке $l-2a$ (фиг. 1) стержень плотно и без разрывов прилегает к поверхности трубы, а вдоль линии контакта возникает нормальная равномерно распределенная нагрузка интенсивности q (фиг. 2). На границе контактной зоны, т. е. в точке A , как и в других подобных случаях, возникает сосредоточенная сила Y_A . Но если этим ограничиться, то при такой расчетной схеме удовлетворить необходимые условия сопряжения свободного участка и участка плотного прилегания не удастся. Остается предположить, что имеется еще одна точка контакта, в которой возникает сила Y_B (точка B). Параллельно этой силе на фиг. 2 проведена ось y , а реакция шарнирной опоры O разложена на составляющие Y_0 и Z_0 . Неизвестными в этой предположительно построенной схеме являются силы Y_0 , Z_0 , Y_B , Y_A , распределенная нагрузка q , длины отрезков a и b , а также угол φ_A и угол наклона винтовой линии β . Сила P и зазор между стержнем и внутренней поверхностью трубы Δ считаются заданными.



Фиг. 1



Фиг. 2

Изгибающий момент в сечении $x > a$ определяется суммой моментов сил относительно оси t (Фиг. 2):

$$\begin{aligned}
 M = & Y_0 [x \cos \varphi \cos \beta + \Delta \sin \varphi \sin \beta] - \\
 & - Y_B [(x-b) \cos \varphi \cos \beta + \Delta \sin \varphi \sin \beta] - \\
 & - Y_A [(x-a) \cos (\varphi - \varphi_A) \cos \beta + \Delta \sin (\varphi - \varphi_A) \sin \beta] + \\
 & + Z_0 [x \sin \varphi \cos \beta - \Delta \cos \varphi \sin \beta] - P \Delta \cos \beta - M_q
 \end{aligned}$$

Последнее слагаемое представляет собой момент сил q , распределенных на участке AC , определяемый интегрированием элементарного момента $dM_q = q ds (x - \xi) \cos (\varphi - \psi) \cos \beta + q ds \Delta \sin (\varphi - \psi) \sin \beta$, где $ds = d\xi / \cos \beta$ — элемент дуги винтовой линии.

Так как $\Delta d\psi = d\xi \operatorname{tg} \beta$, то после интегрирования по частям получим

$$M_q = q \Delta \{ (x-a) \sin (\varphi - \varphi_A) \operatorname{ctg} \beta + \Delta [1 - \cos (\varphi - \varphi_A)] (1 - \operatorname{ctg}^2 \beta) \}$$

Поскольку кривизна винтовой линии постоянна, то постоянным по длине должен оставаться и изгибающий момент M . В его выражение входят четыре типа переменных: $x \cos \varphi$, $x \sin \varphi$, $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$, которые надо сгруппировать, а коэффициент при каждом из них — приравнять нулю. Из полученных таким образом четырех уравнений находим

$$Y_0 = \frac{q \Delta}{\sin \beta \sin \varphi_A} \left(\frac{a}{b} - 1 + \frac{\Delta}{a} \sin \varphi_A \cos \varphi_A \operatorname{ctg} \beta \right)$$

$$Y_B = \frac{q\Delta a}{b \sin \beta \sin \varphi_A}, \quad Y_A = \frac{q\Delta}{\sin \beta} \left(\frac{\Delta}{a} \operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \varphi_A \right)$$

$$Z_0 = \frac{q\Delta^2}{a \sin \beta} \sin \varphi_A \operatorname{ctg} \beta$$

Если эти условия выполнены, изгибающий момент M по длине винтовой линии не меняется: $M = -q\Delta^2(1 - \operatorname{ctg}^2 \beta) - P\Delta \cos \beta$ и связан с кривизной винтовой линии очевидным соотношением $M = -EI \sin^2 \beta / \Delta$. Полагая β малым, получим $q\Delta = P\beta^2 - EI\beta^4/\Delta^2$. После исключения q выражения для четырех сил примут вид ($k^2 = P/EI$):

$$Y_0 = P \left(1 - \frac{\beta^2}{k^2 \Delta^2} \right) \left[\left(\frac{a}{b} - 1 \right) \frac{\beta}{\sin \varphi_A} + \frac{\Delta}{a} \cos \varphi_A \right]$$

$$Z_0 = P \left(1 - \frac{\beta^2}{k^2 \Delta^2} \right) \frac{\Delta}{a} \sin \varphi_A, \quad Y_B = P \left(1 - \frac{\beta^2}{k^2 \Delta^2} \right) \frac{a\beta}{b \sin \varphi_A}$$

$$Y_A = P \left(1 - \frac{\beta^2}{k^2 \Delta^2} \right) \left(\frac{\Delta}{a} - \beta \operatorname{ctg} \varphi_A \right)$$

Заметим, что при найденных значениях сил крутящий момент на участке прилегания также остается постоянным.

Остается построить упругую линию на отрезке длиной a от точки O до точки A и плавно состыковать ее с винтовой линией. Для этого надо проинтегрировать уравнения упругой линии (J и z — перемещения по соответствующим осям): $EIy'' = -Py + Y_0x|_{OB} - Y_B(x-b)|_{BA}$, $EIz'' = -Pz + Z_0x$. Штрихами вверх обозначаются производные по координате x .

В правой части первого уравнения при переходе от участка OB к участку BA добавляется слагаемое $Y_B(x-b)$. Функция z для этих участков остается общей.

Уравнения интегрируются элементарно; остается выполнить следующие условия сопряжения: $y=0, z=0$ при $x=0$; далее $y=\Delta, z=0, y'=0$ при $x=b$; наконец, $y \cos \varphi_A + z \sin \varphi_A = \Delta, y' = -\beta \cos \varphi_A, z' = \beta \sin \varphi_A$ при $x=a$. Раскрывая эти условия и исключая из полученных выражений силы Y_0, Z_0 и Y_B , приходим к четырем уравнениям ($\beta_0 = \beta/k\Delta$):

$$\left\{ \frac{ka \cos kb - \sin ka}{kb \cos kb - \sin kb} + \beta_0(1 - \beta_0^2) \frac{ka}{kb \sin \varphi_A} [\sin k(a-b) - k(a-b)] \right\} \cos \varphi_A +$$

$$+ (1 - \beta_0^2) \left(\frac{kb}{ka} \frac{\sin ka}{\sin kb} - 1 \right) \sin^2 \varphi_A - 1 = 0$$

$$+ \frac{\cos kb - \cos ka}{kb \cos kb - \sin kb} + \beta_0(1 - \beta_0^2) \frac{ka}{kb} [\cos k(a-b) - 1] \frac{1}{\sin \varphi_A} + \beta_0 \sin \varphi_A = 0$$

$$\frac{kb}{ka} (1 - \beta_0^2) \left(\frac{\cos ka}{\sin ka} - \frac{1}{ka} \right) \sin \varphi_A = \beta_0 \cos \varphi_A$$

$$\frac{\cos kb}{kb \cos kb - \sin kb} - (1 - \beta_0^2) \frac{1}{\sin \varphi_A} \left[\left(\frac{ka}{kb} - 1 \right) \beta_0 + \frac{1}{ka} \sin \varphi_A \cos \varphi_A \right] = 0$$

Неизвестными здесь являются φ_A, ka, kb и β_0 . Возможное упрощение только одно: найти из третьего уравнения $\operatorname{tg} \varphi_A$ и исключить $\sin \varphi_A$ и $\cos \varphi_A$. В результате остается три трансцендентных уравнения, в которых нет свободных параметров. Заданные сила P и зазор Δ входят в ka, kb и β_0 , и их роль выяснится уже после того, как будет решена система.

Численное решение уравнений можно произвести по-разному, но приблизительно зная область поиска. Ориентиром в данном случае послужило приближенное решение, полученное энергетическим методом. После этого было найдено и точное решение системы: $a = 4,8098 (EI/P)^{1/2}, b = 2,5824$

$(EI/P)^{1/2}$, $\beta=0,71146 (P\Delta^2/EI)^{1/2}$, $\varphi_A=1,4949=85,65^\circ$, $q=0,24996 P^2\Delta/EI$,
 $Y_0=0,31170P (P\Delta^2/EI)^{1/2}$, $Z_0=0,10237P (P\Delta^2/EI)^{1/2}$, $Y_B=0,65626P (P\Delta^2/EI)^{1/2}$,
 $Y_A=0,075960P (P\Delta^2/EI)^{1/2}$.

В полученные значения параметров длина стержня l , естественно, не входит, но накладывает ограничение на его применимость. Если длина стержня невелика, а сила P не достигает необходимой величины, то участок полного прилегания стержня к внутренней поверхности трубы вырождается в точку. Тогда $a=l/2=4,8098 (EI/P)^{1/2}$. Значит, при $P < 9,376 P_*$ (P_* — эйлерова сила) стержень соприкасается с трубой только в трех точках (точка A и две точки B). Последующая схема точек контакта легко поддается анализу, хотя и приходится еще два раза решать совместно два трансцендентных уравнения.

Дадим итоговое описание процесса по мере возрастания силы.

При $P > P_*$ стержень имеет сначала касание с трубой в средней точке пролета и сохраняет плоскую форму изгиба.

Когда сила достигнет значения $4P_*$, начинается изгиб во второй плоскости и среднее контактирующее сечение получает соответственно угловое перемещение. Но поскольку при $P=4P_*$ кривизна стержня в средней точке равна нулю, вместо одной точки касания образуется две расходящиеся (две точки B), а средняя точка из контакта выходит. По мере возрастания силы зазор в средней точке пролета сначала возрастает, затем уменьшается и при $P=7,859 P_*$ (эти вычисления не приводятся) контакт в средней точке пролета восстанавливается. При $P=9,376 P_*$ от средней точки пролета (точка A) начинает в обе стороны расти зона сплошного контакта по винтовой линии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Феодосьев В. И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.—Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. 244 с.

Москва

Поступила в редакцию
24.II.1986.