МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1987

УДК 531.36

К ОЦЕНКЕ СОСТОЯНИЯ И АНАЛИЗУ НАБЛЮДАЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

ТКАЧЕНКО А. И.

Оценка вектора состояния линейного нестационарного объекта в фиксированный момент по результатам дискретных измерений на предшествующем промежутке времени находится при помощи решения системы нормальных уравнений, формируемой рекуррентно по мере поступления измерений. Рассматривается возможность анализа наблюдаемости отдельных координат искомого вектора состояния с использованием численных характеристик наблюдаемости в процессе решения нормальных уравнений. Обсуждается допустимость улучшения наблюдаемости модели, используемой при оценке состояния линейного объекта, путем отбрасывания части слабо наблюдаемых координат, приводящего к потере адекватности модели. Полученные результаты применены при анализе наблюдаемости в задаче уточнения ориентации твердого тела, совершающего малые угловые колебания вокруг точки на земной поверхности.

1. Пусть необходимо оценить значение $\mathbf{X}(t_f)=\mathbf{X}=[x_1 \ldots x_m]^T$ m-мерного вектора $\mathbf{X}(t)$, удовлетворяющего уравнению

$$\mathbf{X}^{\cdot}(t)=A(t)\mathbf{X}(t) \tag{1.1}$$

с использованием значений r_j-мерных векторов $\mathbf{y}_j$, поступающих в дискретные моменты $t=t_j$:

$$\mathbf{y}_j=D_j\mathbf{X}(t_j), \quad t_0\leqslant t_j\leqslant t_f \tag{1.2}$$

Индекс T означает транспонирование. Матрица $A(t)=A(t, \varphi(t))$ с размерами $m\times m$ зависит известным образом от вектора переменных параметров $\varphi(t)$, который непрерывен почти всюду при $t_0\leqslant t\leqslant t_f$ и становится известным лишь при соответствующем t. Так, $\mathbf{X}(t)$ может состоять из вариаций координат объекта относительно их значений в заранее не известном опорном движении, а $\varphi(t)$ — из некоторых параметров этого опорного движения. Матрицы D_j с размерами $r_j\times m$ также задаются при $t=t_j$. Вектор $\mathbf{y}_j$ содержит аддитивно r_j-мерный вектор случайных ошибок с центрированными и взаимно не коррелированными элементами.

Положим $\mathbf{X}(t)=F(t, t_i)\mathbf{X}(t_i)$. Здесь $F(t, t_i)$ — неособенная матрица с размерами $m\times m$; $F^{-1}(t, t_i)=F(t_i, t)$, $F(t_i, t_i)=E_m$, где E_q — единичная матрица с размерами $q\times q$. Пусть все значения $\mathbf{y}_j$, полученные при $t_0\leqslant t_j\leqslant t_k$, выражены через $\mathbf{X}(t_k)$, снабжены при необходимости масштабными коэффициентами и сведены в составной вектор $\mathbf{Y}_k$ размерности n_k, в результате получена система уравнений

$$H_{(k)}\mathbf{X}(t_k)=\mathbf{Y}_{(k)} \tag{1.3}$$

При $t_k\leqslant t\leqslant t_{k+1}$ вычисляется матрица $F(t_k, t)$ путем интегрирования уравнения $F^{\cdot}(t_k, t)=-F(t_k, t)A(t)$, $F(t_k, t_k)=E_m$. Если при $t=t_{k+1}$ подставить $\mathbf{X}(t_k)=F(t_k, t_{k+1})\mathbf{X}(t_{k+1})$ в равенство (1.3) и дополнить его выражением (1.2) для $\mathbf{y}_{k+1}$, то получится система уравнений $H_{(k+1)}X(t_{k+1})=Y_{(k+1)}$ с вектором $\mathbf{Y}_{(k+1)}$ размерности $n_{k+1}=n_k+r_{k+1}$. Таким образом, при $t_{k+1}=t_f$ получается система уравнений

$$H\mathbf{X}=\mathbf{Y} \tag{1.4}$$

где $\mathbf{Y}$ — составной вектор размерности $n>m$. Оценка вектора $\mathbf{X}$ получается решением системы (1.4) методом наименьших квадратов [1].

Чтобы избежать запоминания матрицы H с размерами $n\times m$, удобно вместо (1.4) формировать соответствующую систему нормальных уравнений

$$B\mathbf{X}=Z, \quad B=H^TH=[b_{ij}], \quad \mathbf{Z}=H^T\mathbf{Y}=[Z_1\dots Z_m]^T \tag{1.5}$$

Матрица B с размерами $m\times m$ (матрица наблюдаемости) является матрицей Грама [2] для столбцов $\mathbf{h}_1\dots\mathbf{h}_m$ матрицы H. Представим систему нормальных уравнений относительно $\mathbf{X}(t_k)$, соответствующую (1.3) в виде

$$B_{(k)}\mathbf{X}(t_k)=\mathbf{Z}_{(k)}, \quad B_{(k)}=H^T_{(k)}\ H_{(k)}, \quad \mathbf{Z}_{(k)}=H^T_{(k)}\ \mathbf{Y}_{(k)}.$$

Для получения системы нормальных уравнений относительно $X(t_{k+1})$ с учетом выражения (1.2), полученного при $t=t_{k+1}$, используются формулы [3]:

$$B_{(k+1)}=F^T(t_k,t_{k+1})B_{(k)}F(t_k,t_{k+1})+D^T_{k+1}Q^2_{k+1}D_{k+1}$$

$$\mathbf{Z}_{(k+1)}=F^T(t_k,t_{k+1})\mathbf{Z}_{(k)}+D^T_{k+1}Q_{k+1}\mathbf{y}_{k+1}$$

$$B_{(0)}=O_{m\times m}, \quad \mathbf{Z}_{(0)}=O_{m\times 1} \tag{1.6}$$

Здесь и далее $O_{i\times j}$ — нулевая матрица соответствующих размеров, Q_{k+1} — диагональная матрица масштабных коэффициентов с размерами $r_{k+1}\times r_{k+1}$. Коэффициенты системы (1.5) получаются по формулам (1.6) при $t_{k+1}=t_f$. Иной способ рекуррентного формирования системы (1.5) близок к изложенному в [4] для случая непрерывных измерений. Система нормальных уравнений относительно $\mathbf{X}(t_0)$, учитывающая значения $\mathbf{y}_0,\dots,\mathbf{y}_{k+1}$, находится в виде $G_{(k+1)}\mathbf{X}(t_0)=\overset{*}{\mathbf{Z}}_{(k+1)}$ посредством итерации

$$G_{(k+1)}=G_{(k)}+F^T(t_{k+1},t_0)D^T_{k+1}Q^2_{k+1}D_{k+1}F(t_{k+1},t_0)$$

$$\overset{*}{\mathbf{Z}}_{(k+1)}=\overset{*}{\mathbf{Z}}_{(k)}+F^T(t_{k+1},t_0)D^T_{k+1}Q_{k+1}\mathbf{y}_{k+1}$$

$$G_{(0)}=O_{m\times m}, \quad \overset{*}{\mathbf{Z}}_{(0)}=O_{m\times 1}$$

Здесь $G_{(i)}$ — матрица с размерами $m\times m$, $\mathbf{Z}_{(i)}{}^*$ — m-мерный вектор, $F^{\boldsymbol{\cdot}}(t,t_0)=A(t)F(t,t_0)$, $F(t_0,t_0)=E_m$. Система (1.5) получается при $t_{k+1}=t_f$ при помощи преобразования

$$B=F^T(t_0,t_f)G_{(k+1)}F(t_0,t_f), \quad \mathbf{Z}=F^T(t_0,t_f)\overset{*}{\mathbf{Z}}_{(k+1)}, \quad F(t_0,t_f)=F^{-1}(t_f,t_0)$$

2. Систему (1.5) удобно использовать для анализа наблюдаемости вектора $\mathbf{X}$, цель которого — определение мер или признаков [5], характеризующих наблюдаемость отдельных координат вектора $\mathbf{X}$. Поскольку зависимость $A(t)$, $D(t_j)$ в общем случае не выражается аналитически, указанный анализ наблюдаемости выполняется численно в процессе решения системы (1.5).

Координату x_i вектора $\mathbf{X}$, удовлетворяющего уравнению (1.4), считаем наблюдаемой, если любому значению $\mathbf{Y}$ из множества образов матрицы H соответствует единственное значение x_i. В противном случае координата x_i ненаблюдаема. Подчеркнем, что имеется в виду наблюдаемость не координат вектора $\mathbf{X}(t)$ на некотором промежутке времени, а значений этих координат при $t=t_f$. Наблюдаемую координату x_i считаем слабо наблюдаемой, если найдутся векторы $\mathbf{Y}'$, $\mathbf{Y}''$, такие, что $\|\mathbf{Y}'-\mathbf{Y}''\|\ll\|\mathbf{Y}''\|$ и $|x_i'-x_i''|=O(|x_i'|)$, где x_i', x_i'' — значения i-й координаты векторов $\mathbf{X}'$, $\mathbf{X}''$, удовлетворяющих уравнениям $H\mathbf{X}'=\mathbf{Y}'$, $H\mathbf{X}''=\mathbf{Y}''$. Здесь и далее $\|\mathbf{r}\|$ — евклидова норма вектора $\mathbf{r}$. Если любым малым вариациям вектора $\mathbf{Y}$ соответствуют только малые вариации координаты x_i, то эта координата хорошо наблюдаема. В общем случае возможны достоверные оценки только хорошо наблюдаемых координат x_i. Если, в частности, $\mathbf{y}_j$ не содержат ошибок и $\det B=0$, то в составе псевдорешения $\mathbf{X}^+=H^+\mathbf{Y}=B^+\mathbf{Z}$, где H^+, B^+ — псевдообратные матрицы, точно оцениваются только наблюдаемые координаты.

В дальнейшем полагаем $\det B \neq 0$. Пусть имеется совокупность не малых по норме столбцов $\mathbf{h}_i$ матрицы H, из которых можно составить весьма малую линейную комбинацию со всеми не малыми коэффициентами, но если отбросить любой из этих столбцов, то из оставшихся не может быть образована малая линейная комбинация указанного вида. Такую совокупность столбцов назовем связкой. Столбец $\mathbf{h}_i$ с не малой нормой, не входящий ни в какую связку, будем называть независимым. Существенно, что независимым столбцам, столбцам с малой нормой и связкам столбцов матрицы H соответствуют обладающие такими же свойствами столбцы и группы столбцов (а также, в силу симметрии, строки и группы строк) матрицы B.

Очевидно, хорошо наблюдаемы те и только те координаты x_i, которые соответствуют независимым столбцам $\mathbf{h}_i$. С другой стороны, если B плохо обусловлена, то в пространстве всех m-мерных векторов имеются подпространство R_m^* – множество всех векторов, почти ортогональных всем столбцам B в смысле малости соответствующих скалярных произведений, и его ортогональное дополнение – хорошо наблюдаемое подпространство R_m°. Точной оценке доступна только составляющая вектора $\mathbf{X}$, принадлежащая R_m°. Оцениваемые величины x_i суть координаты $\mathbf{X}$ в естественном ортонормированном базисе, образованном столбцами $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ матрицы E_m. Если проекция орта $\mathbf{e}_i$ на R_m^* не мала, то координата x_i слабо наблюдаема. Пусть $\dim R_m^* = p$. Построим в R_m^* ортонормированный базис U^*, образованный ортами $\mathbf{u}_l^* = [u_{l1}^* \dots u_{lm}^*]^T$ $(l=1, \dots, p)$. Координата x_i хорошо наблюдаема тогда и только тогда, если

$$\varkappa_i = p^{-1}[u_{1i}^{*2} + \dots + u_{pi}^{*2}]^{1/2} \ll 1 \qquad (2.1)$$

Здесь $0 \leqslant \varkappa_i \leqslant 1$. Чем меньше $\varkappa_i$, тем лучше наблюдаемость координаты x_i. Показатель $\varkappa_i$ количественно более точен, если столбцы $\mathbf{h}_i$ заменены нормированными столбцами $\mathbf{h}_i^\circ = \|\mathbf{h}_i\|^{-1}\mathbf{h}_i$. Для этого нужно разделить i-е уравнение (1.5) и i-й столбец матрицы B на $\sqrt{b_{ii}}$ $(i=1, \dots, m)$. После решения нормированной таким образом системы (1.5) оценка координаты x_i делится на $\sqrt{b_{ii}}$ для восстановления масштаба.

Для демонстрации связи показателя (2.1) со свойствами столбца $\mathbf{h}_i$ примем, что $\dim R_m^* = 2$ и среди столбцов $\mathbf{h}_i$ имеются две связки, не содержащие общих столбцов. Каждой из этих связок соответствует единственный (с точностью до малых вариаций) орт подпространства R_m^*, у которого не малы только координаты, соответствующие столбцам данной связки; эти орты не коллинеарны и образуют базис в R_m^*. Ортогонализация этого базиса приводит к базису U^*. Очевидно, (2.1) выполняется, если компоненты столбца $\mathbf{h}_i$ независимы. Аналогичное утверждение справедливо при ином числе связок и при наличии столбцов $\mathbf{h}_i$ с малой нормой.

3. Пусть система (1.5) решается методом вращений [6]. При этом находятся матрица $\Lambda = \mathrm{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_m]$ и ортогональная матрица V, задающая преобразование $\Lambda = VBV^T$. Здесь $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ – собственные значения матрицы B, которые предполагаются различными; столбцами матрицы V^T являются ортонормированные собственные векторы $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ матрицы B, соответствующие упомянутым собственным значениям. Решение находится в виде $X = V^T\mathbf{X}^*$, $\mathbf{X}^* = \Lambda^{-1}V\mathbf{Z} = [x_1^* \dots x_m^*]^T$. Пусть p собственных значений (для определенности $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, $p<m$) весьма малы. Тогда $x_1^*, \dots, x_p^*$ слабо наблюдаемы, а орты $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ образуют базис U^*. Выражение

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{e}_i^T \mathbf{v}_j x_j^* \qquad (i=1, \dots, m)$$

указывает связь критерия (2.1) с точностью оценки x_i.

Положим в (1.4) $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^\circ + \delta\mathbf{Y}$, где $\delta\mathbf{Y}$ – вектор, составленный из случайных ошибок измерений. Пусть $H\mathbf{X}^\circ = \mathbf{Y}^\circ$, $\delta\mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}^\circ$. Выбором масштабных коэффициентов можно выполнить условие $M(\delta\mathbf{Y}\delta\mathbf{Y}^T) = \sigma^2 E_n$, где M – символ математического ожидания. Так как $M(\delta\mathbf{Z}\delta\mathbf{Z}^T)=\sigma^2 B$, где $\delta\mathbf{Z}=H^T\delta\mathbf{Y}$, то

$$M(\delta\mathbf{X}\,\delta\mathbf{X}^T)=\sigma^2\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^{-1}\,\mathbf{v}_j\mathbf{v}_j^T.$$

Отсюда видно, что координатам x_i, для которых не выполняется условие (2.1), соответствуют большие дисперсии ошибок оценки.

4. Пусть система (1.5) решается методом исключения (методом Гаусса). После k-го этапа исключения получается система уравнений [2]:

$$\begin{aligned}
&b_{11}x_1+b_{12}x_2+\ldots+b_{1m}x_m=Z_1\\
&b_{22}^{(1)}x_2+\ldots+b_{2m}^{(1)}x_m=Z_2^{(1)}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&b_{k+1,k+1}^{(k)}x_{k+1}+\ldots+b_{k+1,m}^{(k)}x_m=Z_{k+1}^{(k)}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&b_{m,k+1}^{(k)}x_{k+1}+\ldots+b_{mm}^{(k)}x_m=Z_m^{(k)}
\end{aligned}\qquad(4.1)$$

В силу свойств матрицы Грама [2] квадрат объема параллелепипеда, построенного на ортах $\mathbf{h}_1^\circ,\ldots,\mathbf{h}_j^\circ$ как на ребрах с общей вершиной, равен $(b_{11}\ldots b_{jj})^{-1}B_j$, где B_j — j-й ведущий минор матрицы B [7]. Скаляр $s_j^2=$ $=B_j(b_{jj}B_{j-1})^{-1}$ равен квадрату высоты упомянутого параллелепипеда, опущенной из конца ребра $\mathbf{h}_j^\circ$ на противоположное основание. Неравенство $s_j^2\ll1$ показывает, что столбец $\mathbf{h}_j$ образует связку с некоторыми из столбцов $\mathbf{h}_1,\ldots,\mathbf{h}_{j-1}$, т. е. x_j и некоторые из координат $x_1,\ldots,x_{j-1}$ слабо наблюдаемы. Так как в (4.1) $b_{k+1,k+1}^{(k)}=B_{k+1}(B_k)^{-1}$ [2], то выражение $s_{k+1}^2=$ $=(b_{k+1,k+1})^{-1}\,b_{k+1,k+1}^{(k)}$ позволяет вычислить s_{k+1}^2 после k-го этапа метода Гаусса. Неравенство $b_{ii}\ll1$ означает, что $\|\mathbf{h}_i\|\ll1$.

Примем без потери общности, что $s_i^2=O(1)$, $b_{ii}=O(1)$ при $1\leqslant i\leqslant k$, а при $k+1\leqslant i\leqslant m$ выполняется одно из неравенств $s_i^2\ll1$, $b_{ii}\ll1$. Тогда строки коэффициентов левых частей первых k уравнений (4.1) после транспонирования образуют базис подпространства R_m°. Дополним этот базис ортами $\mathbf{e}_{k+1},\ldots,\mathbf{e}_m$ до системы m линейно независимых векторов. Применив к ней процедуру ортогонализации Грама — Шмидта, преобразуем $\mathbf{e}_{k+1},\ldots,\mathbf{e}_m$ в орты $\mathbf{u}_{k+1},\ldots,\mathbf{u}_m$, образующие ортонормированный базис U^* в $(m-k)$-мерном подпространстве R_m^* [8], и используем для анализа наблюдаемости условие (2.1).

Если методом Гаусса решается система (1.5), предварительно нормированная путем деления всех b_{ji}, b_{ij}, Z_i на $\sqrt{b_{ii}}$ $(i=1,\ldots,m)$, то $s_{k+1}^2=$ $=b_{k+1,k+1}^{(k)}$.

5. Не уменьшая общности, положим $H=[H_1H_2]$, $H\mathbf{X}=H_1\mathbf{X}_1+H_2\mathbf{X}_2$. Здесь H_1, H_2 — матрицы с размерами $n\times m_1$ и $n\times m_2$ соответственно $(m_1+m_2=m)$; $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ — векторы размерностей m_1 и m_2. Матрицу H_2 образуют все столбцы $\mathbf{h}_i$ с малой нормой, а также по одному столбцу из каждой связки столбцов матрицы H. Используя формулу Фробениуса [2], находим

$$\mathbf{X}_1=(H_1^TH_1)^{-1}H_1^T(\mathbf{Y}-H_2\mathbf{X}_2)\qquad(5.1)$$

$$\mathbf{X}_2=P\mathbf{Y}=\mathbf{X}_2^\circ+P\delta\mathbf{Y},\quad P=N^{-1}H_2^TS$$

$$N=H_2^TSH_2,\quad S=E_n-H_1(H_1^TH_1)^{-1}H_1^T$$

Здесь $\mathbf{X}_2^\circ=P\mathbf{Y}^\circ$ — значение $\mathbf{X}_2$ при $\delta\mathbf{Y}=0$. Матрица $H_1^TH_1$ обусловлена хорошо, а N — плохо.

Вычеркнем в системе (1.5) последние m_2 уравнений и m_2 последних столбцов матрицы B. Полученная система нормальных уравнений имеет вид

$$H_1^TH_1\mathbf{X}_1=H_1^T\mathbf{Y}\qquad(5.2)$$

Система (5.2), в которой все координаты вектора $\mathbf{X}_1$ хорошо наблюдаемы, не адекватна объекту, порождающему вектор $\mathbf{Y}$. Подобный прием получения полностью наблюдаемой модели предложен в [9] для стационарных объектов. Сравнение решения системы (5.2) с (5.1) показывает, что такое упрощение может повысить точность оценки слабо наблюдаемых координат решения системы (1.5), оставшихся в составе $\mathbf{X}_1$, если $\|\mathbf{X}_2{}^\circ\| \ll \ll \|P\delta\mathbf{Y}\|$. Указанное нарушение адекватности модели эквивалентно произвольно введенному ограничению $\mathbf{X}_2=0$. Более жесткое ограничение $\mathbf{X}_2(t)\equiv 0$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_f)$, связанное с упрощением исходной модели (1.1), (1.2), обеспечивает хорошую наблюдаемость всех координат вектора $\mathbf{X}_1$, сокращая вычисления при формировании (1.5).

6. Пример. Рассмотрим задачу уточнения ориентации правого ортогонального трехгранника *123*, связанного с твердым телом, совершающим малые угловые колебания вокруг закрепленной на земной поверхности точки O. Измеряются вектор $\mathbf{a}$, составленный из проекций ускорения силы тяжести в точке O на оси *1*, *2*, *3*, и вектор $\boldsymbol{\omega}^*=\boldsymbol{\omega}+\mathbf{c}$, где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор абсолютной угловой скорости трехгранника *123* в проекциях на его оси, $\mathbf{c}= =[c_1c_2c_3]^T=\text{const}$ — вектор систематических ошибок измерения названных проекций угловой скорости. Вследствие этих ошибок и неточного задания начальной ориентации трехгранника *123* вместо ортогональной матрицы направляющих косинусов $L(t)$, характеризующей ориентацию трехгранника *123* относительно связанного с Землей в точке O правого ортогонального трехгранника $\xi\eta\zeta$ с вертикальной осью ζ, при $t_0 \leqslant t \leqslant t_f$ вычисляется матрица $L^*(t) \approx L(t)[E_3+\Phi(\boldsymbol{\gamma})+{}^1/_2\Phi^2(\boldsymbol{\gamma})]$. Здесь $\boldsymbol{\gamma}=[\gamma_\xi\gamma_\eta\gamma_\zeta]^T$ — малый вектор, характеризующий отклонение вычисленного положения трехгранника $\xi\eta\zeta$ относительно самого этого трехгранника (γ_ξ, γ_η — ошибки построения вертикали, γ_ζ — ошибка в азимуте), $\Phi(\boldsymbol{\gamma})$ — кососимметрическая матрица с размерами 3×3, задающая векторное произведение $\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{r}= =\Phi(\boldsymbol{\gamma})\mathbf{r}$. Система (1.1) имеет вид $\dot{\boldsymbol{\gamma}}=-\Phi(\mathbf{u})\boldsymbol{\gamma}-L^T\mathbf{c}$, $\dot{\boldsymbol{\alpha}}=0$, $\dot{\mathbf{c}}=0$. Здесь $\mathbf{u}= =[u_\xi u_\eta u_\zeta]^T$ — вектор угловой скорости вращения Земли, $\boldsymbol{\alpha}=[\alpha_1\alpha_2\alpha_3]^T$ — вектор, характеризующий амплитудно-частотные свойства угловых колебаний трехгранника *123* и фигурирующий в приближенном выражении, справедливом при больших значениях разности:

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\omega}(t)\,dt\,dt \approx {}^1/_2(t-t_0)^2 L\mathbf{u}+(t-t_0)\boldsymbol{\alpha} \tag{6.1}$$

Можно рассматривать $\boldsymbol{\alpha}$ как вектор малого поворота, задающий отклонение трехгранника *123* при $t=t_0$ от его среднего положения при колебаниях объекта. Векторы $\mathbf{y}_j=[y_{j1}\ldots y_{j5}]^T$ формируются в дискретные моменты $t=t_j$ в виде

$$\begin{gathered} y_{j1}=g^{-1}\int_{t_0}^{t_j} \mathbf{l}_2{}^T\mathbf{a}\,dt=(t_j-t_0)\gamma_\xi-{}^1/_2\,y_{j2}\gamma_\zeta+{}^1/_2(t_j-t_0)^2\mathbf{l}_1{}^T(t_j)\mathbf{c} \\ y_{j2}=g^{-1}\int_{t_0}^{t_j} \mathbf{l}_1{}^T\mathbf{a}\,dt=(t_0-t_j)\gamma_\eta+{}^1/_2\,y_{1j}\gamma_\zeta-{}^1/_2(t_j-t_0)^2 l_2{}^T(t_j)\mathbf{c} \end{gathered} \tag{6.2}$$

$$\begin{gathered} [y_{j3}y_{j4}y_{j5}]^T=\int_{t_0}^{t_j}\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\omega}^*(\tau)\,d\tau\,dt-{}^1/_2\,L^*(t_j)\,\mathbf{u}\,(t_j-t_0)^2= \\ ={}^1/_2(t_j-t_0)^2 L^*(t_j)\,\Phi(\mathbf{u})\,\boldsymbol{\gamma}+(t_j-t_0)\boldsymbol{\alpha}+{}^1/_2(t_j-t_0)^2\mathbf{c} \end{gathered} \tag{6.3}$$

Здесь g — величина ускорения силы тяжести в точке O, $\mathbf{l}_i$ $(i=1, 2, 3)$ — i-й столбец матрицы L^*. Слагаемые с y_{j2}, y_{j1} в правых частях (6.2) аппроксимируют член ${}^1/_2\Phi^2(\boldsymbol{\gamma})$ в выражении для L^* при $(t_j-t_0)\|\mathbf{c}\| \ll \|\boldsymbol{\gamma}(t_0)\|$. Выражения (6.3), используемые только при достаточно больших значениях разности t_j-t_0, вводятся в сочетании с умножением y_{j1}, y_{j2} на малый коэффициент для уменьшения неблагоприятного влияния квантования информации о векторе $\mathbf{a}$. Другие источники ошибок формирования $\mathbf{y}_j$ — квантование информации о $\boldsymbol{\omega}^*$, случайные погрешности измерений, не учтенные в (6.1) малые периодические слагаемые. Составим вектор $\mathbf{X}(t)$ в виде $\mathbf{X}^T(t)=[\boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{c}^T]$. Основная трудность связана с оценкой γ_ζ (координаты γ_ξ, γ_η хорошо наблюдаемы, остальные элементы $\mathbf{X}$ являются второстепенными). В одном из численных расчетов, в котором моделировались колебания осей *1*, *2*, *3* соответственно вблизи осей η, ζ, ξ при $\alpha_1=2\cdot10^{-3}$, $\alpha_2=3{,}3\cdot10^{-3}$, $\alpha_3=1{,}1\cdot10^{-3}$, в момент $t_f=t_0+200$ с были получены следующие значения $s_i^2=1$; 1; 0,85; 0,44; 0,95; 0,024; 0,006; 0,01; $2{,}7\cdot10^{-5}$ (в порядке нумерации элементов $\mathbf{X}$). Так как только $s_9^2\ll1$, то подпространство R_m^* есть единственное направление (с точностью до малых вариаций), определяемое ортом $\mathbf{u}_9$, который найден в процессе решения нормированной системы (1.5) методом Гаусса в результате ортогонализации восьми строк вида (4.1), дополненных ортом $\mathbf{e}_9$: $\mathbf{u}_9=[8\cdot10^{-3}; -8\cdot10^{-3}; -0{,}71; 2\cdot10^{-4}; -1{,}5\cdot10^{-4}; -1{,}5\cdot10^{-2}; -0{,}50; -4\cdot10^{-3}; 0{,}51]^T$.

На основании (2.1) координаты γ_ζ, c_1, c_3 слабо наблюдаемы (соответствующие им столбцы $\mathbf{h}_i$ образуют связку). Если упростить используемую модель, сделав ее полностью наблюдаемой за счет потери адекватности (например, отказавшись от оценки c_3), то даже при значительных величинах названных выше ошибок формирования $\mathbf{y}_j$ можно получить точность оценки γ_ζ порядка отношения c_1, c_3 к горизонтальной составляющей вектора $\mathbf{u}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эльясберг П. Е.* Определение движения по результатам измерений. М.: Наука, 1976. 416 с.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
3. *Браммер К., Зиффлинг Г.* Фильтр Калмана–Бьюси. М.: Наука, 1982. 200 с.
4. *Каленова В. И.* Об одном способе коррекции инерциальных навигационных систем.– В кн.: Некоторые вопросы теории навигационных систем. М.: Изд-во МГУ, 1979, с. 70–79.
5. *Парусников Н. А., Каленова В. И., Морозов В. М., Шакотько А. Г.* О мере наблюдаемости.– В кн.: Некоторые вопросы навигации и управления. М.: Изд-во МГУ, 1980, с. 29–37.
6. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. Т. 1. М.: Наука, 1975. 631 с.
7. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 318 с.
8. *Гавурин М. К.* О плохо обусловленных системах линейных алгебраических уравнений.– Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1962, т. 2, № 3, с. 387–397.
9. *Кузовков Н. Т., Карабанов В. С., Салычев О. С.* Непрерывные и дискретные системы управления и методы идентификации. М.: Машиностроение, 1978. 222 с.

Киев

Поступила в редакцию 28.VIII.1985