

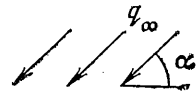
УДК 539.3

ТЕРМОУПРУГОСТЬ ПЛАСТИНКИ С ТОНКОСТЕННЫМ УПРУГИМ
ВКЛЮЧЕНИЕМ ПО ДУГЕ ОКРУЖНОСТИ

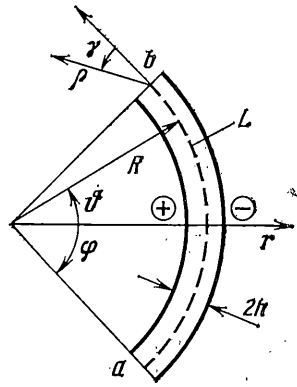
БЕРНАР И. И., ОПАНАСОВИЧ В. К.

Рассматривается плоская задача теплопроводности и термоупругости для пластинки с тонкостенным упругим включением по дуге окружности. Задача сводится к системам двух сингулярных интегродифференциальных уравнений, решение которых пригодно для включений произвольной теплопроводности и жесткости. Предложен иной, по сравнению с [1], подход к решению полученных систем. Приводится численный анализ коэффициентов интенсивности напряжений.

1. Рассмотрим изотропную пластинку, содержащую тонкостенное упругое включение постоянной ширины $2h$, расположенное по дуге окружности радиуса R . Пластинка находится под воздействием лишь тепловых факторов (однородный тепловой поток на бесконечности, постоянная температура). Предполагается, что боковые поверхности пластинки и включения теплоизолированы.



Обозначим через 2φ угол раствора включения, L — дугу окружности радиуса R с центральным углом 2φ , a и b — нижний и верхний концы включения (фиг. 1). Величины, характеризующие тонкостенное включение, обозначим индексом «ноль», граничные значения функций на берегу включения, расположенном ближе к центру окружности, — индексом «плюс», а на другом берегу — индексом «минус». Предполагается, что на берегах включения имеет место идеальный термомеханический контакт с окружающим материалом $(T+i\eta)_{0^{\pm}} = (T+i\eta)^{\pm}$, $\lambda_0 \frac{\partial}{\partial r}(T+i\eta)_{0^{\pm}} = \lambda \frac{\partial}{\partial r}(T+i\eta)^{\pm}$, $(\sigma_{rr}+i\tau_{r\theta})_{0^{\pm}} =$



Фиг. 1

$= (\sigma_{rr}+i\tau_{r\theta})^{\pm}$, $(V_r+iV_{\theta})_{0^{\pm}} = (V_r+iV_{\theta})^{\pm}$, где η — вспомогательная гармоническая функция [2], λ , λ_0 — коэффициенты теплопроводности пластинки и включения соответственно.

2. Согласно [2], температурное поле однородной изотропной пластинки определяется по формулам

$$F_1(z) + Q_1\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) = T + i\eta, \quad F(z) + \frac{R^2}{r^2} Q\left(\frac{R^2}{z}\right) = \frac{1}{iz} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (T + i\eta).$$

$$F(z) - \frac{R^2}{r^2} Q\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) = \frac{r}{z} \frac{\partial}{\partial r} (T + i\eta) \quad (2.1)$$

где $F(z) = F_1'(z)$, $Q(\bar{z}) = Q_1'(z)$, $F_1(\bar{z})$ и $Q_1(z)$ — кусочно-голоморфные функции.

В [3] получены следующие выражения комплексных потенциалов

температуры:

$$F(z) = h[I_1(z) + K_\lambda I_2(z)] / (2\pi R) + \bar{a}_\infty, \quad K_\lambda = \lambda_0 / \lambda \quad (2.2)$$

$$Q(z) = h[-I_1(z) + K_\lambda I_2(z)] / (2\pi R) - a_\infty R^2 / z^2, \quad a_\infty = -1/2 q_\infty e^{-i\alpha} / \lambda$$

$$I_k(z) = \int_L \left[\frac{\partial}{\partial \theta} F_0(t) + (-1)^k \frac{R^2}{t^2} \frac{\partial}{\partial \theta} R_0(t) \right] \frac{1}{t-z} dt \quad (k=1, 2)$$

где q_∞ — интенсивность теплового потока на бесконечности, а неизвестные функции $F_0(t)$ и $R_0(t)$ определяются из системы сингулярных интегрально-дифференциальных уравнений

$$F_0(t) + R^2 R_0(t) / t^2 - K_\lambda h I_2(t) / \pi R = \bar{a}_\infty - a_\infty R^2 / t^2 \quad (2.3)$$

$$K_\lambda [F_0(t) - R^2 R_0(t) / t^2] - h I_1(t) / \pi R = \bar{a}_\infty + a_\infty R^2 / t^2, \quad t \in L$$

и условий

$$\int_L \frac{\partial}{\partial \theta} F_0(t) dt = 0, \quad \int_L \frac{R^2}{t^2} \frac{\partial}{\partial \theta} R_0(t) dt = 0 \quad (2.4)$$

Решение системы уравнений (2.3), (2.4) будем искать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial F_0(t) / \partial \theta \\ (R^2 / t^2) \partial R_0(t) / \partial \theta \end{array} \right\} = x_0^{-1}(t) \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} x_m \\ y_m \end{array} \right\} T_m(t_1), \quad t \in L \quad (2.5)$$

$$x_0(t) = -iX_0^+(t), \quad X_0(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)}$$

где x_m, y_m ($m=1, 2, \dots$) — неизвестные комплексные коэффициенты, $T_m(\xi)$ и $U_m(\xi)$ — полиномы Чебышева первого и второго рода соответственно, $z^{-1}X_0(z) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$, $t_1 = [2t - (a+b)] / (b-a)$.

Подставляя соотношения (2.5) в (2.2), находим

$$F(z) = \frac{h}{2R} \sum_{m=1}^{\infty} [x_m(K_\lambda + 1) + y_m(K_\lambda - 1)] L_m(z) + \bar{a}_\infty \quad (2.6)$$

$$Q(z) = \frac{h}{2R} \sum_{m=1}^{\infty} [x_m(K_\lambda - 1) + y_m(K_\lambda + 1)] L_m(z) - \frac{a_\infty R^2}{z^2}$$

$$L_m(z) = 2[U_{m-1}(z_1) - X_0^{-1}(z) T_m(z_1)] / (b-a)$$

$$z_1 = [2z - (a+b)] / (b-a)$$

Применяя процедуру метода ортогональных полиномов [4], приходим к следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов разложения x_m и y_m :

$$\frac{\pi h}{2R} K_\lambda (x_n + y_n) + \frac{b-a}{2i} \sum_{m=1}^{\infty} (X_{nm} x_m + Y_{nm} y_m) = (1 - \varepsilon_1) P_n^- \quad (2.7)$$

$$\frac{\pi h}{2R} (x_n - y_n) + \frac{b-a}{2i} K_\lambda \sum_{m=1}^{\infty} (X_{nm} x_m - Y_{nm} y_m) = (1 - \varepsilon_2) P_n^+$$

$$X_{nm} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{mk} R(k, n, 0), \quad Y_{nm} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left\{ \frac{b-a}{4} [R(m+1, n, k) + \right.$$

$$\left. + R(m-1, n, k) \right] + 1/2(a+b) R(m, n, k)$$

$$a_{mk} = \zeta_k (\alpha_{m+k} + \alpha_{|m-k|}), \quad \alpha_p = 2U_{p-1}(v) / (b-a) + R^{-1} T_p(v)$$

$$v = (a+b)/(a-b), \quad b_p = 4(p+1)\alpha_{p+1}^{(4)}/(b-a)$$

$$R(m, n, k) = -4n(k+1) \cos^2 [1/2(m+n+k)\pi] [m^2 - (n+k+1)^2]^{-1} \times \\ \times [m^2 - (n-k-1)^2]^{-1}$$

$$P_n^{\pm} = \bar{a}_{\infty} f_n^{(1)} \pm 1/4 a_{\infty} R^2 \pi (b-a) b_n, \quad f_n^{(1)} = 1/4 (b-a) \pi \delta_{n1}$$

$$\varepsilon_1 = M(\lambda, \lambda_0), \quad \varepsilon_2 = M(\lambda_0, \lambda), \quad M(\alpha_1, \alpha_2) = \min(\alpha_1, \alpha_2)/\alpha_1$$

где $\zeta_k = 1/2$ при $k=0$ и $\zeta_k = 1$ при $k \geq 1$, δ_{ij} — символ Кронекера.

3. Согласно [2], термоупругое состояние изотропной пластинки описывается формулами

$$\Phi(z) + \frac{R^2}{r^2} \Omega\left(\frac{R^2}{z}\right) + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) [\overline{\Phi(z)} - \overline{z\Phi'(z)}] = \sigma_{rr} + i\tau_{r\theta} \quad (3.1)$$

$$\kappa\Phi(z) - \frac{R^2}{r^2} \Omega\left(\frac{R^2}{z}\right) - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) [\overline{\Phi(z)} - \overline{z\Phi'(z)}] + \beta\Psi_1(z) = \\ = 2\mu \frac{e^{i\theta}}{iz} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} (V_r + iV_{\theta}) + i(V_r + iV_{\theta}) \right]$$

где $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$, $\beta = 2\alpha_1 E/(1-\nu)$, E — модуль Юнга, μ — модуль сдвига, α_1 — температурный коэффициент линейного расширения, $\Psi_1(z) = 1/2 [F_1(z) + \bar{Q}_1(R^2/z)]$.

На основании формул (3.1) с использованием результатов [1, 5, 6] приходим к следующим выражениям для комплексных потенциалов $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$:

$$\Phi(z) = \frac{h}{\pi R(1+\kappa)} [J_1(z) + K_{\mu} J_2(z)] - \frac{\beta}{1+\kappa} \Psi_1^*(z) \quad (3.2)$$

$$\Omega(z) = \frac{h}{\pi R(1+\kappa)} [-\kappa J_1(z) + K_{\mu} J_2(z)] - \frac{\beta}{1+\kappa} \Psi_1^*(z) + B_0 - \frac{\bar{b}_{\infty}}{z} \quad (B_0 = \overline{\Phi(0)})$$

$$J_k(z) = \int_L \frac{A_k(t)}{t-z} dt \quad (k=1, 2), \quad A_1(t) = \frac{\partial}{\partial\theta} \Phi_0(t) + \frac{\partial}{\partial\theta} \overline{\Phi_0(t)} - \frac{R^2}{t^2} \frac{\partial}{\partial\theta} \Gamma_0(t)$$

$$A_2(t) = \kappa_0 \frac{\partial}{\partial\theta} \Phi_0(t) - \frac{\partial}{\partial\theta} \overline{\Phi_0(t)} + \frac{R^2}{t^2} \frac{\partial}{\partial\theta} \Gamma_0(t) + \beta_0 \frac{\partial}{\partial\theta} \Psi_0(t) - i\beta\varepsilon_3 \bar{a}_{\infty} t$$

$$\Psi_1^*(z) = \frac{h}{2R} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} \{ [x_m(K_{\lambda}+1) + y_m(K_{\lambda}-1)] S_m(z) + \\ + [\bar{x}_m(K_{\lambda}-1) + \bar{y}_m(K_{\lambda}+1)] \bar{S}_m(R^2/z) \}$$

$$S_m(z) = -X_0(z) L_m(z), \quad K_{\mu} = \mu/\mu_0$$

$$\Psi_0(t) = T_0 + \bar{a}_{\infty} \varepsilon_1 t + \frac{1}{i(b-a)} \left\{ x_0(t) \sum_{m=1}^{\infty} x_m \left[u_m(t_1) - t \sum_{h=0}^{\infty} a_{mh} u_h(t_1) \right] + \right. \\ \left. + \overline{x_0(t)} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{y}_m \left\{ \frac{a-b}{4\bar{t}} [u_{m+1}(\bar{t}_1) + u_{m-1}(\bar{t}_1)] + \left(\frac{a-b}{\bar{t}} - 1 \right) u_m(\bar{t}_1) \right\} \right\}$$

$$\bar{b}_{\infty} = -\frac{\beta R}{1+\kappa} \left\{ a_* + \frac{h}{4R} (b-a) [x_1(K_{\lambda}+1) + y_1(K_{\lambda}-1)] \right\}, \quad \varepsilon_3 = M(\mu, \mu_0)$$

$$a_* = \frac{h}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} [\bar{x}_m(K_{\lambda}-1) + \bar{y}_m(K_{\lambda}+1)] \bar{a}_m^{(4)}, \quad u_m(\zeta) = m^{-1} U_{m-1}(\zeta)$$

Здесь неизвестные функции $\Phi_0(t)$ и $\Gamma_0(t)$ определяются из следующей

системы сингулярных интегродифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1-\kappa}{1+\kappa} \frac{h}{\pi R} J_1(t) + \frac{2K_\mu}{1+\kappa} \frac{h}{\pi R} J_2(t) - \Phi_0(t) - \overline{\Phi_0(t)} - \frac{R^2}{t^2} \Gamma_0(t) = \\ = -\frac{\beta}{1+\kappa} H(t) - B_0 - \frac{\bar{b}_\infty}{t} \quad (t \in L) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\kappa}{1+\kappa} \frac{h}{\pi R} J_1(t) - \frac{1-\kappa}{1+\kappa} \frac{h}{\pi R} K_\mu J_2(t) - K_\mu \left[\kappa_0 \Phi_0(t) - \overline{\Phi_0(t)} - \frac{R^2}{t^2} \Gamma_0(t) + \beta_0 \Psi_0(t) \right] = \\ = -\frac{\beta}{1+\kappa} H(t) + B_0 + \bar{b}_\infty/t - \beta(a_* + \bar{a}_\infty t + T_\infty) + 2i\mu\varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(t) = \frac{h}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \{ [x_m(K_\lambda+1) + y_m(K_\lambda-1)] T_m(t_1) + \\ + [\bar{x}_m(K_\lambda-1) + \bar{y}_m(K_\lambda+1)] T_m(\bar{t}_1) \} \\ \int_L A_k(t) dt = 0 \quad (k=1, 2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

где ε — угол поворота включения как жесткого целого, T_0 и T_∞ — значения температуры во включении и на бесконечности.

Решение системы уравнений (3.3), (3.4) будем искать в виде

$$\begin{Bmatrix} A_1(t) \\ A_2(t) \end{Bmatrix} = x_0^{-1}(t) \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} s_m \\ z_m \end{Bmatrix} T_m(t_1) \quad (t \in L) \quad (3.5)$$

где s_m, z_m ($m=1, 2, \dots$) — неизвестные комплексные коэффициенты. Подставляя (3.5) в (3.2), находим

$$\begin{aligned} \Phi(z) = \frac{h}{R(1+\kappa)} \sum_{m=1}^{\infty} (s_m + K_\mu z_m) L_m(z) - \frac{\beta}{1+\kappa} \Psi_1^*(z) \quad (3.6) \\ \Omega(z) = \frac{h}{R(1+\kappa)} \sum_{m=1}^{\infty} (-\kappa s_m + K_\mu z_m) - \frac{\beta}{1+\kappa} \Psi_1^*(z) - \frac{\bar{b}_\infty}{z} + \\ + \frac{h}{R(1+\kappa)} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\alpha}_m^{(1)} \left\{ \bar{s}_m + K_\mu \bar{z}_m - \frac{\beta R}{4m} [\bar{x}_m(K_\lambda+1) + \bar{y}_m(K_\lambda-1)] \right\} \end{aligned}$$

Выполнив преобразования, из (3.3) получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов s_m и z_m :

$$\begin{aligned} \frac{\pi h}{2R(1+\kappa)} [(1-\kappa)s_n + 2K_\mu z_n] + \frac{b-a}{2i(1+\kappa_0)} \sum_{m=1}^{\infty} \times \\ \times (S_{nm}^{(1)} s_m + Z_{nm}^{(1)} z_m + S_{nm}^{(1)*} \bar{s}_m + Z_{nm}^{(1)*} \bar{z}_m) = B_n^{(1)} + 2\beta_0 T_* f_n^{(1)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi h}{2R(1+\kappa)} [2\kappa s_n + K_\mu(\kappa-1)z_n] + \frac{b-a}{2i(1+\kappa_0)} K_\mu \sum_{m=1}^{\infty} \times \\ \times (S_{nm} s_m + Z_{nm}^{(2)} z_m + S_{nm}^{(2)*} \bar{s}_m + Z_{nm}^{(2)*} \bar{z}_m) - 2i\mu\varepsilon f_n^{(1)} = B_n^{(2)} + K_\mu(\kappa_0-1)\beta_0 T_* f_n^{(1)} \end{aligned}$$

$$S_{nm} = X_{nm} - \kappa_0 Y_{nm}, \quad S_{nm} = \kappa_0 (X_{nm} - Y_{nm}), \quad Z_{nm} = X_{nm} + Y_{nm}$$

$$\begin{aligned}
Z_{nm}^{(2)} &= \kappa_0 X_{nm} - Y_{nm}, & S_{nm}^{(1)*} &= V_{nm} + v_{nm}, & S_{nm}^{(2)*} &= -V_{nm} - K_\mu^{-1} v_{nm} \\
Z_{nm}^{(1)*} &= V_{nm} + K_\mu v_{nm}, & Z_{nm}^{(2)*} &= -S_{nm}^{(1)*}, & v_{nm} &= i\pi\hbar(1 + \kappa_0)\delta_{n1}\bar{\alpha}_m^{(1)}/R(1 + \kappa) \\
V_{nm} &= \sum_{k=0}^{\infty} [\bar{a}_{mk}\varphi_0(k, n) + \bar{e}_{mk}\varphi_{(-2)}(k, n)], & T_* &= \frac{T_0[1 - M(\mu_0, \mu)]}{1 + \kappa_0} \\
e_{mk} &= \zeta_k(\alpha_{m+k}^{(3)} + \alpha_{|m-k|}^{(3)}), & \alpha_p^{(3)} &= \alpha_p^{(1)} [p(p + \cos\varphi) + 3\cos^2\varphi - 1] \\
B_n^{(1)} &= \omega_n^{(1)} + \omega_n^{(2)} + \omega_n^{(3)}, & B_n^{(2)} &= -\omega_n^{(1)} + K_\mu(\kappa_0\omega_n^{(2)} - \omega_n^{(3)} + \beta_0\chi_n + \bar{a}_\infty\beta_*f_n^{(2)}) + \\
&+ (\beta_0K_\mu T_0 - \beta T_\infty - \beta a_*)f_n^{(1)}, & \beta_* &= \beta_0K_\mu\varepsilon_1 - \beta \\
\omega_n^{(1)} &= \frac{\beta\hbar}{2R(1 + \kappa)} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} \left\{ \frac{b-a}{8} \pi H_1(n, m) [x_m(K_\lambda + 1) + y_m(K_\lambda - 1)] + \right. \\
&+ [H_2(n, m) + {}^{1/2}\alpha_m^{(1)}f_n^{(1)}] [\bar{x}_m(K_\lambda - 1) + \bar{y}_m(K_\lambda + 1)] \left. \right\} + \bar{b}_\infty f_n^{(3)} \\
\omega_n^{(2)} &= -\bar{a}_\infty \varepsilon_* f_n^{(2)} - \beta_0\chi_n / (1 + \kappa_0), & \varepsilon_* &= (\beta\varepsilon_3 - \beta_0\varepsilon_1)(1 + \kappa_0)^{-1} \\
\omega_n^{(3)} &= \varepsilon_* \left(\frac{1}{3} \bar{a}_\infty f_n^{(2)} - 2 \operatorname{Re} a_\infty R^2 f_n^{(3)} \right) + \frac{\beta_0(b-a)}{4i(1 + \kappa_0)} \sum_{m=1}^{\infty} \times \\
&\times \left\{ \frac{x_m}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \{ a_{mk} \{ {}^{1/4}(b-a) [R(k, n-1, 0) + R(k, n+1, 0)] + {}^{1/2}(a+b)R(k, n, 0) \} - \right. \\
&- b_k p_{mnk} \} + y_m \left[R(m, n, 0) - \sum_{k=0}^{\infty} b_k p_{mnk} \right] - \bar{x}_m \left\{ \varphi_0(m, n) - R \sum_{k=0}^{\infty} [\bar{a}_{mk}(\varphi_1(k, n) + \right. \\
&+ \varphi_{-1}(k, n)) + \bar{d}_{mk}\varphi_{-2}(k, n)] \left. \right\} - \frac{\bar{y}_m}{3} \left\{ \frac{a-b}{4R} [\varphi_0(m-1, n) + \varphi_0(m+1, n)] + \right. \\
&+ \left. \frac{a+b}{2R} \varphi_0(m, n) - R \sum_{k=0}^{\infty} \bar{d}_{mk}\varphi_{-2}(k, n) \right\} \left. \right\} \\
p_{mnk} &= 1/16(b-a)^2 [R(m-2, n, k) + 2R(m, n, k) + R(m+2, n, k)] + \\
&+ {}^{1/4}(b^2 - a^2) [R(m+1, n, k) + R(m-1, n, k)] + \\
&+ {}^{1/4}(a+b)^2 R(m, n, k) \\
\chi_n &= \frac{b-a}{4i} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ x_m \left[R(m, n, 0) - \sum_{k=0}^{\infty} a_{mk} \left[\frac{b-a}{4} (R(k, n-1, 0) + \right. \right. \right. \\
&+ R(k, n+1, 0)) + \left. \left. \frac{a+b}{2} R(k, n, 0) \right] \right\} + \bar{y}_m \left[\frac{a-b}{4R} (\varphi_1(m+1, n) + \varphi_1(m-1, n)) + \right. \\
&+ \left. \left(\frac{a+b}{2R} - 1 \right) \varphi_1(m, n) \right] \left. \right\} \\
\varphi_p(k, n) &= \frac{1}{k} \int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{x^2 s^2 + c^2} \frac{(-xs+ic)^p}{(sx+ic)^{p+2}} U_{k-1}(\bar{\xi}) U_{n-1}(\xi) dx \\
&\xi = (ixc+s)/(xs+ic) \\
H_1(n, m) &= 1 \quad (n=m+1); \quad H_1(n, m) = -1 \quad (n=m-1); \\
H_1(n, m) &= 0 \quad (n \neq m \pm 1); \quad d_{mk} = \zeta_k(\alpha_{m+k}^{(2)} + \alpha_{|m-k|}^{(2)})
\end{aligned}$$

$$H_2(n, m) = i \sin \varphi \int_{-1}^1 (1-x^2)^{1/2} (xs+ic)^{-3} T_m(\bar{\xi}) U_{n-1}(\xi) dx,$$

$$s = \sin(\varphi/2), \quad c = \cos(\varphi/2)$$

$$f_n^{(2)} = 1/4 \pi (b-a) [1/4 (b-a) \delta_{n2} + 1/2 (a+b) \delta_{n1}]$$

$$f_n^{(3)} = \pi R \alpha_n^{(1)}, \quad \alpha_p^{(2)} = \alpha_p^{(1)} (p + \cos \varphi)$$

Угол поворота ε найдем из соотношения [1] (интегрирование проводится по области включения): $\operatorname{Re} \oint (R^2/z) [\Phi(z) - \bar{\Omega}(R^2/z)] dz = 0$, которое с учетом (3.6) примет вид

$$\operatorname{Im} \sum_{m=1}^{\infty} s_m \alpha_m^{(1)} = 0 \quad (3.8)$$

Квазирегулярность бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (3.7), (3.8) исследовалась численно при разных параметрах задачи.

Следуя [7], напряженное состояние пластинки в окрестности концов включения в системе координат (ρ, γ) (фиг. 1) можно представить в виде

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\rho \\ \sigma_\tau \\ \sigma_{\rho\tau} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{2\rho}} [N_1 \sim (-1)k_1 + N_2 \sim (3)k_2 + N_1 \sim (1+2\kappa)k_3 + N_2 \sim (1-2\kappa)k_4] + O(1)$$

где k_i ($i=1, 4$) — коэффициенты интенсивности напряжений, определяемые по формулам ($j=1$ для точки a , $j=2$ для точки b ; суммирование по m от 1 до ∞):

$$k_1^j - ik_2^j = \Delta \Sigma (-1)^{(2-j)m} s_m, \quad k_3^j - ik_4^j = K_\mu \Delta \Sigma (-1)^{(2-j)m} z_m \quad (3.9)$$

$$\Delta = 2ihR^{-3/2} (1+\kappa)^{-1} \exp[-1/2 i\varphi(2j-3)] (\sin \varphi)^{-1/2}$$

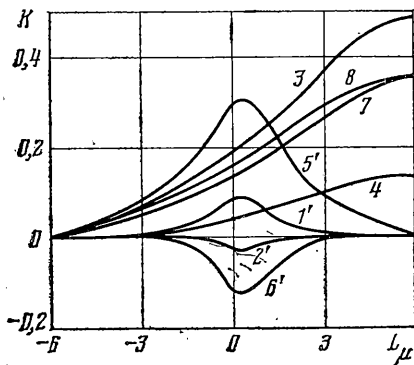
$$N_1 \sim (\xi) = \begin{Bmatrix} 5c_1 - \xi c_3 \\ 3c_1 - \xi c_3 \\ s_1 - \xi s_3 \end{Bmatrix}, \quad N_2 \sim (\xi) = \begin{Bmatrix} -5s_1 + \xi s_3 \\ -3s_1 - \xi s_3 \\ c_1 + \xi c_3 \end{Bmatrix}$$

$$c_i = \cos 1/2 i\gamma, \quad s_i = \sin 1/2 i\gamma \quad (i=1, 3)$$

Отметим, что если в (3.3) и (3.7) сделать соответствующие предельные переходы, получим решения задачи для бездефектной пластинки, пластинки с дугообразной трещиной [8], пластинки с прямолинейным тонкостенным упругим включением [5] или пластинки с жестким включением по дуге окружности (решение для этого предельного случая можно получить иным путем на основании работ [2, 9]).

4. Вычисления коэффициентов интенсивности напряжений согласно (3.7)–(3.9), обусловленные постоянным температурным полем, проводились при следующих значениях параметров: $\nu = \nu_0 = 1/3$, $h/R = 0,1$, $\alpha_i^{(0)} = 0$.

На фиг. 2 представлена зависимость коэффициентов интенсивности напряжений $K = k(R \sin \varphi)^{-1/2} / (\beta T_\infty)$ в точке $z = b$ от относительной жесткости $L_\mu = 1/g K_\mu$ пластинки и включения. Кривые 1–4 характеризуют значения K_t при угле раствора включения $\varphi = \pi/6$, кривые 5–8 — при $\varphi = \pi/2$. Штрих



Фиг. 2

у номера кривой указывает, что соответствующие значения коэффициентов интенсивности напряжений увеличены на фиг. 2 в десять раз.

Коэффициенты интенсивности напряжений k_i ($i=1, 4$) знакопостоянны во всей области изменения параметра L_μ , причем k_3 и k_4 изменяются монотонно, а k_1 и k_2 в положительной окрестности точки $L_\mu=0$ (однородная по механическим свойствам пластинка) достигают своих экстремальных значений, в чем проявляется сильное влияние температурного коэффициента линейного расширения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бернар И. И., Опанасович В. К.* Напряженное состояние пластинки с тонкостенным упругим включением по дуге окружности.— Прикл. математика и механика (ПММ), 1983, т. 47, вып. 2, с. 249—256.
2. *Прусов И. А.* Некоторые задачи термоупругости. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1972. 198 с.
3. *Бернар И. И.* Влияние дугообразного включения на температурное поле пластинки.— Инж.-физ. журн., 1984, т. 47, № 6, с. 1024—1025.
4. *Морарь Г. А., Попов Г. Я.* К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением.— Прикл. математика и механика (ПММ), 1970, т. 34, вып. 3, с. 412—421.
5. *Грилицкий Д. В., Драган М. С., Опанасович В. К.* Температурное поле и термоупругое состояние пластинки с тонкостенным упругим включением.— Прикл. математика и механика (ПММ), 1980, т. 44, вып. 2, с. 338—345.
6. *Бернар И. И., Опанасович В. К.* Изгиб плиты с тонкостенным упругим включением по дуге окружности.— Прикл. механика, 1984, т. 20, № 8, с. 61—68.
7. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацишин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 444 с.
8. *Кит Г. С., Кривцул М. Г.* Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1983. 277 с.
9. *Бережницкий Л. Т., Паньків Б. И.* Коэффициенты интенсивности напряжений возле дугообразного жесткого включения.— Физ.-хим. механика материалов, 1976, т. 12, № 2, с. 91—96.

Львов

Поступила в редакцию
4.VII. 1985