МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1987

УДК 539.3:534.1

ДЕМПФИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕК СЛАБЫМИ МАГНИТНЫМИ ПОЛЯМИ

РАДОВИНСКИЙ А. Л.

Задача о свободных колебаниях тонких упругих оболочек в вакууме (s-задача) [1] имеет действительный спектр собственных значений, определяющий осциллирующие без затухания во времени колебания. Задача о колебаниях оболочек из электропроводящих материалов в стационарном магнитном поле (sm-задача) [2] имеет комплексный спектр, а соответствующие колебания затухают во времени. В данной работе исследована sm-задача и определено влияние слабых (это понятие конкретизируется ниже) магнитных полей на решения s-задачи. Особое внимание уделено оценке мнимых частей собственных значений, определяющих затухание колебаний в sm-задаче. Все общие результаты статьи справедливы в равной мере как для оболочек, так и для пластин.

1. При рассмотрении sm-задачи будем исходить из следующих уравнений, считая, что колебания происходят по закону $\exp(i\omega\tau)$ (τ — время):

$$L_{lj}u_j+\lambda^2u_l=\beta B_jN_{lj}(F) \tag{1.1}$$

$$\gamma\Delta_sF+i\lambda f=i\lambda(A_1A_2)^{-1}\partial/\partial\alpha_kA_q(B_ku_3-B_3u_k)\quad (\text{на } S)$$

$$\Delta\Phi=0\ (\text{в } V),\ F=(\Phi)_s^+-(\Phi)_s^-,\ f=(H_3^{-1}\partial\Phi/\partial\alpha_3)_s \tag{1.2}$$

$$\beta=(2Eh\mu_0)^{-1},\ \gamma=(2h\mu_0\sigma)^{-1}\sqrt{\rho/E},\ \lambda=\omega\sqrt{\rho/E},\ i=\sqrt{-1}$$

Здесь j, l, k, q — индексы суммирования (l, q=1, 2, 3; k, q=1, 2; $k\neq q$); (α_1, α_2, α_3) — параметры заданной в пространстве V, окружающем оболочку, триортогональной системы координат, в которой срединная поверхность оболочки S считается лежащей на координатной поверхности $\alpha_3=0$; $\mathbf{B}(B_1, B_2, B_3)$ — значение вектора магнитной индукции на S (считается известным из решения задачи магнитостатики, а его компоненты предполагаются отличными от тождественного нуля); $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$ — вектор перемещений срединной поверхности оболочки; Φ — потенциальная функция, через которую определяется возмущенная составляющая $\mathbf{b}$ магнитной индукции в окружающей оболочку среде ($\mathbf{b}=\operatorname{grad}\Phi$, $f=(b_3)_s$); нижний индекс s означает, что берутся значения соответствующих величин на поверхности S (при $\alpha_3=0$), причем $(\ )_s^*=(\ )_{\alpha_3\to0^*}$, Δ и Δ_s — операторы Лапласа в V и на S соответственно; μ_0 — магнитная постоянная, h, σ, ρ, E — полутолщина, электрическая проводимость, плотность и модуль Юнга материала оболочки, H_j — коэффициенты Ламе ($A_j=(H_j)_s$), L_{lj} — операторы теории оболочек (они приведены, например, в [3]); N_{lj} — дифференциальные операторы, введенные для удобства записи уравнений, они равны нулю, за исключением $N_{k3}=-N_{3k}=-A_k^{-1}\partial/\partial\alpha_k$ (k=1, 2).

Уравнения (1.1)–(1.2) получены из [2] с точностью $O(\eta^{1-p})$ (η — относительная полутолщина оболочки, p — показатель изменяемости искомого состояния [3]). К ним надо добавить однородные условия закрепления краев оболочки и условие ограниченности решения на бесконечности.

2. Примем, что магнитное поле обеспечивает малость параметра

$$\varepsilon=\max_s|\mathbf{B}|/E_*^{1/2},\quad E_*=2E\mu_0 \tag{2.1}$$

Решение уравнений (1.1)—(1.2) будем искать в виде рядов

$$\Phi=E_*^{1/2}\varepsilon\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{2n}\Phi_n\ [F,f];\qquad \lambda=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{2n}\lambda_n\ [u_1,u_2,\ u_3] \tag{2.2}$$

Для функций, перечисленных в квадратных скобках, ряды строятся согласно выражениям, стоящим непосредственно перед ними.

Подставив (2.2) в (1.1)—(1.2) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε, получим уравнения, которые можно привести к виду

$$L_{lj}u_{j0}+\lambda_0^2u_{l0}=0 \tag{2.3}$$

$$L_{lj}u_{jn}+\lambda^2u_{ln}=-\sum_{\substack{m+t+g=n\\ g\neq n}}\lambda_m\lambda_t u_{lg}+h^{-1}B_{0j}N_{lj}(F_{n-1})\qquad (n=1,2,\ldots) \tag{2.4}$$

$$\gamma\Delta_sF_n+i\lambda_0f_n=-i\sum_{\substack{m+g=n\\ g\neq n}}\lambda_mf_g+i\sum_{m+g=n}\frac{\lambda_m}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_h}A_q(B_{0h}u_{3g}-B_{03}u_{hg}) \tag{2.5}$$

$$\Delta\Phi_n=0,\ F_n=(\Phi_n)_s^+-(\Phi_n)_s^-,\ f_n=(H_3^{-1}\partial\Phi_n/\partial\alpha_3)_s\ (n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

$$B_{0j}=B_j/\max_S|\mathbf{B}|$$

Уравнения (2.3)—(2.5) позволяют построить процесс последовательного определения всех неизвестных функций в разложениях (2.2). Сначала рассмотрим уравнения s-задачи (2.3). Пусть $\{\lambda_0,\ u_{j0}\}$ — совокупность значения частотного параметра и формы, принадлежащая некоторому собственному решению (2.3). Тогда уравнения (2.5), соответствующие $n=0$, определят m-задачу интегрирования уравнения Лапласа в V при неоднородном смешанном граничном условии на математическом разрезе S, в результате решения которой может быть найдена функция F_0. (Уравнения (2.4) и первое уравнение (2.5) записаны так, что здесь и ниже величины, стоящие в их правых частях, всегда оказываются известными из предыдущего рассмотрения.)

Перейдя к (2.4) ($n=1$), получим s-задачу о вынужденных колебаниях оболочки на резонансной частоте. Она, как известно, может иметь ограниченное решение только в случае, если вынуждающие силы не совершают работы на перемещениях, определяемых соответствующим собственным решением. Это означает, что правые части уравнений (2.4) должны быть в определенном смысле ортогональны собственной форме $\{u_{j0}\}$. Следуя [1, 4] и считая, что решение уравнений (2.4) ищется в виде разложения по собственным решениям уравнений (2.3), получим функции $\{u_{j1}\}$ и условие существования ограниченного решения, из которого выразим значение λ_1.

Дальнейшее рассмотрение уравнений (2.3)—(2.5) состоит в последовательном решении сформулированных выше задач для уравнений (2.5) и (2.4).

Получаемые из условия ортогональности формулы для членов разложения λ имеют вид

$$\lambda_n=\frac{1}{2\lambda_0I_{j0,j0}}\iint_S\Big[-\sum_{\substack{m+t+g=n\\ m,t,g\neq n}}\lambda_m\lambda_tu_{lg}+h^{-1}B_{0j}N_{lj}(F_{n-1})\Big]u_{l0}\,ds \tag{2.6}$$

$$I_{m,n}=\iint_S u_mu_n\,ds,\qquad ds=A_1A_2\,d\alpha_1\,d\alpha_2\qquad (n=1,2,\ldots)$$

3. Пользуясь результатами п.2, сформулируем задачу приближенного определения собственных значений λ уравнений (1.1)—(1.2) с точностью, соответствующей сохранению первых двух членов разложения (2.2). Их можно найти по формуле

$$\lambda=\Lambda+\frac{1}{2\Lambda I_{j,j}}\iint_S\beta B_jN_{lj}(F)u_l\,ds \tag{3.1}$$

где Λ, u_j — собственное решение s-задачи для уравнений

$$L_{lj}u_j+\Lambda^2 u_l=0 \tag{3.2}$$

а F — решение m-задачи для уравнений

$$\gamma\Delta_s F+i\Lambda f=i\Lambda(A_1A_2)^{-1}\partial/\partial\alpha_k A_q(B_k u_3-B_3 u_k) \tag{3.3}$$

$$\Delta\Phi=0,\quad F=(\Phi)_s^+-(\Phi)_s^-,\quad f=(H_3^{-1}\partial\Phi/\partial\alpha_3)_s$$

Как видно из (3.3), функция F комплексна и, следовательно, второе слагаемое в (3.1) представляет собой комплексную поправку к действительному значению s-задачи Λ.

4. Как показано в п. 2, комплексная поправка $\delta\Lambda$ к Λ ($\lambda=\Lambda+\delta\Lambda$) в (3.1) при сравнительно небольшой напряженности стационарного магнитного поля мала. Поэтому в ряде практических задач целесообразно ограничиться оценкой мнимой части λ.

Воспользуемся для этой цели асимптотическим методом [1, 3, 5], основанным на малости параметра относительной полутолщины $\eta=h/R$ (R — характерный размер оболочки).

Представим комплексные величины, входящие в формулы (3.1)—(3.3), в виде

$$\delta\Lambda=\delta\Lambda_1+i\delta\Lambda_2[\Phi, F, f],\quad \delta\Lambda_1=\mathrm{Re}\,\delta\Lambda,\ \delta\Lambda_2=\mathrm{Im}\,\delta\Lambda \tag{4.1}$$

Подставив представления (4.1) функций Φ, F, f в (3.3) и разделив действительные и мнимые части уравнений, получим систему с действительными коэффициентами

$$\gamma\Delta_s F_2+\Lambda f_1=\Lambda(A_1A_2)^{-1}\partial/\partial\alpha_k A_q(B_k u_3-B_3u_k),\ \gamma\Delta_s F_1-\Lambda f_2=0 \tag{4.2}$$

$$\Delta\Phi_n=0,\ F_n=(\Phi_n)_s^+-(\Phi_n)_s^-,\ f_n=(H_3^{-1}\partial\Phi_n/\partial\alpha_3)_s$$

Произведем растяжение масштабов, замену искомых величин и коэффициентов уравнений согласно равенствам

$$\alpha_j=R\eta^p\xi_j,\ R\Lambda=\eta^r\Lambda_0,\ R\delta\Lambda_k=\eta^{r_k}\delta\Lambda_k^\circ \tag{4.3}$$

$$\Phi_k=E_*^{1/2}R\eta^{t_k}\Phi_k^\circ,\ F_k=E_*^{1/2}R\eta^{t_k}F_k^\circ,\ f_k=E_*^{1/2}\eta^{t_k-p}f_k^\circ$$

$$u_j=R\eta^{d_j}u_j^\circ,\ \gamma=\eta^{a-1}\gamma_0,\ B_j=E_*^{1/2}\eta^{-g}B_j^\circ$$

Все числа, стоящие здесь в показателях степеней η, подбираются так, чтобы для рассматриваемого состояния, являющегося решением уравнений (3.1), (3.2), (4.1), (4.2), для оболочки с заданными электромеханическими свойствами величины, стоящие в правых частях выражений (4.3) и обозначенные нуликами, были порядка $O(\eta^\circ)$, а дифференцирование искомых величин по ξ_j не приводило бы к их асимптотическому изменению. Это, в частности, означает, что p представляет собой показатель изменяемости, r (совпадающее с точностью до знака с принятым в [1]) определяет асимптотику главного значения Λ, а r_k — поправок (r_1 — действительной $\delta\Lambda_1$, а r_2 — мнимой $\delta\Lambda_2$) к собственному значению s-задачи; $\eta^{-g}=\varepsilon$, где ε определяется формулой (2.1).

Подставляя (4.3) в (4.2) и приравнивая показатели степеней асимптотически главных слагаемых (в число которых обязательно должны войти некоторые из слагаемых, содержащих u_j), получим следующие формулы для определения t_1 и t_2:

$$t_1=\begin{cases}2\varkappa+g-d, & \varkappa>0\\ -g+d, & \varkappa\leqslant 0\end{cases}\quad t_2=\begin{cases}\varkappa-g+d, & \varkappa>0\\ -\varkappa-g+d, & \varkappa\leqslant 0\end{cases} \tag{4.4}$$

$$\varkappa=p+r+1-a,\ d=\min(d_j)$$

Сделав в (3.1) подстановки (4.1), (4.3), разделив действительную и мнимую части полученного выражения, проведя оценку входящих в правые части интегралов и приравняв показатели степеней η выражений, стоящих по разные стороны знака равенства, получим формулы для r_1 и r_2:

$$r_1=\begin{cases}-2a+1+p+r-2g, & \varkappa>0\\ -1-p-r-2g, & \varkappa\leqslant 0\end{cases}\quad r_2=\begin{cases}-a-2g, & \varkappa>0\\ a-2(1+p+r)-2g, & \varkappa\leqslant 0\end{cases} \tag{4.5}$$

Формулы (4.5) и соответствующие выражения (4.3) определяют асимптотику действительной и мнимой частей поправки к собственным значениям s-задачи, возникающих вследствие воздействия слабых магнитных полей. Если поправка к собственным значениям Λ s-задачи асимптотически мала в сравнении с Λ, будем считать, что магнитные поля «слабые». Условие малости выражается неравенством $\min(r_1, r_2)>r$ и сводится к ограничению на параметр g, определяющему вместе с выражениями (4.3) уровень напряженности стационарного магнитного поля. Таким образом, слабыми можно считать магнитные поля, для которых

$$|\mathbf{B}|<B^*=\eta^{-g}E_*^{1/2}, \qquad g=\begin{cases} -(a+r)/2, & \varkappa>0 \\ -(1+p)/2-r, & \varkappa\leqslant 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

При таких полях правомерно использование метода и формул, приведенных в пп. 2 и 3. Влияние более сильных полей на формы и частоты свободных колебаний оболочки становится определяющим, а изложенный в п. 2 процесс расходится.

Из (4.6) следует, что B^* растет с увеличением частоты колебаний (r уменьшается), т. е. B^* имеет наименьшее значение при первых частотах колебаний, которые, согласно [1], характеризуются для оболочки произвольной кривизны значениями параметров $p=0$, $r=0$, а для пластины — $p=0$, $r=1$. Тогда для оболочки и пластины из нержавеющей стали с характерными размерами $R=1$ м, $2h=2$ мм ($\eta=10^{-3}$, $a=1{,}7$) первые частоты попадут соответственно в области $\varkappa<0$ и $\varkappa>0$, а вычисленные по формуле (4.6) значения B^* составят 24 Т (для оболочки) и $7\cdot 10^{-2}$ Т (для пластины). Это, в частности, значит, что колебания основного спектра такой оболочки практически всегда могут быть рассчитаны методом п. 2.

Замечание. Спектры оболочек нулевой и отрицательной кривизн содержат более низкие частоты. Для них B^* будет меньше. Эти случаи могут быть проанализированы с помощью формул (4.6).

5. Из асимптотических результатов п.4 можно сделать следующие выводы. В рамках применимости двумерной теории оболочек [1] и гипотез магнитоупругости [2], определяемых неравенствами $0\leqslant p<1$, $\max(-1, a-2)<r<\infty$, можно выделить две области, в которых влияние слабого магнитного поля на свободные колебания принципиально различно: низкочастотную область, определяемую неравенством $p+r>a-1$ ($\varkappa>0$), и высокочастотную область, в которой $p+r<a-1$ ($\varkappa<0$).

В низкочастотной области мнимая часть поправки к собственным значениям s-задачи асимптотически больше действительной ($\delta\Lambda_1\ll\delta\Lambda_2$) и имеет порядок

$$\delta\Lambda_2=R^{-1}O(\eta^{-a-2g}) \tag{5.1}$$

Как видно, она не зависит ни от частоты, ни от изменяемости соответствующих собственных решений (связанных с асимптотическими параметрами r и p), но зависит от параметров a и g, определяемых последними равенствами (4.3), подстановка которых в (5.1) дает $\delta\Lambda_2\sim\sigma B^2/\sqrt{\rho E}$.

Таким образом, мнимая поправка к собственному значению пропорциональна проводимости оболочки и квадрату напряженности магнитного поля.

Собственное значение уравнений (1.1)—(1.2) в низкочастотной области можно приближенно определить по формуле

$$\omega=\Omega+i\sigma B^2\rho^{-1}A \tag{5.2}$$

где Ω — собственное значение s-задачи, множитель $A=O(\eta^0)$.

В высокочастотной области мнимая часть поправки всегда меньше действительной ($\delta\Lambda_1\gg\delta\Lambda_2$) и имеет порядок

$$\delta\Lambda_2=R^{-1}O(\eta^{a-2(1+p+r)-2g}) \tag{5.3}$$

Она обратно пропорциональна проводимости оболочки, пропорциональна квадрату напряженности магнитного поля, а также зависит от частоты и изменяемости искомого собственного решения.

Используя асимптотические свойства собственных решений s-задачи [1], получим из (5.3) для трех основных типов колебаний оболочки следующие оценки $\delta\Lambda_2$ в высокочастотной области:

для квазипоперечных колебаний с малой изменяемостью

$$r=0, \quad \delta\Lambda_2=R^{-1}O(\eta^{a-2(1+p)-2g}), \quad 0\leqslant p<{}^1/_2$$

для квазипоперечных колебаний с большой изменяемостью

$$r=1-2p, \quad \delta\Lambda_2=R^{-1}O(\eta^{a-2+p-2g}), \quad {}^1/_2\leqslant p<1$$

для квазитангенциальных колебаний

$$r=-p,\quad \delta\Lambda_2=R^{-1}O(\eta^{a-2-2g}),\quad 0\leqslant p<1$$

В высокочастотной области мнимая поправка к собственному значению для квазипоперечных колебаний с увеличением номера колебаний (ростом p) сначала резко растет ($\sim\eta^{-2p}$), а затем постепенно уменьшается ($\sim\eta^{p}$); для квазитангенциальных колебаний асимптотической зависимости $\delta\Lambda_2$ от номера колебаний нет.

Как следует из (4.5), в высокочастотной области действительная поправка к собственному значению от проводимости оболочки не зависит. (Выражение для r_1 не содержит параметра a.)

В высокочастотной области мнимые поправки к собственным значениям асимптотически меньше, чем в низкочастотной (в $\eta^{-2\varkappa}$ раза). Это, в совокупности с тем, что главная действительная часть Λ собственных значений в высокочастотной области больше, чем в низкочастотной, означает, что на высоких частотах демпфирование колебаний магнитными полями, вообще говоря, пренебрежимо мало.

В промежуточной области, где $p+r=a-1$ ($\varkappa=0$), действительная и мнимая части поправки к собственному значению асимптотически равны ($\delta\Lambda_1\sim\delta\Lambda_2$).

В [2] приведено решение sm-задачи об осесимметричных свободных колебаниях бесконечной цилиндрической оболочки в продольном магнитном поле и получено частотное уравнение, которое в рамках применимости двумерной теории оболочек для состояний с изменяемостью, соответствующей $p>0$, может быть приведено к виду $\omega^2-i\omega\alpha(1+i\omega\delta^{-1})^{-1}-\Omega^2=0$, где $\delta=K/(\mu_0\sigma h)$, $\alpha=\sigma B^2/\rho$, K – волновое число, Ω – частота соответствующих колебаний в s-задаче.

При слабых магнитных полях это уравнение допускает следующие приближенные решения (выписанные с точностью до первого члена, содержащего i):

в низкочастотной области (параметры Ω/δ, α/Ω – малые)

$$\omega=\Omega+i{}^1\!/_2\alpha \tag{5.4}$$

в высокочастотной области (параметры δ/Ω, α/Ω – малые):

$$\omega=\Omega+{}^1\!/_2\alpha\delta\Omega^{-1}+i{}^1\!/_2\alpha\delta^2\Omega^{-2} \tag{5.5}$$

Формулы (5.4), (5.5) полностью подтверждают качественные выводы, сделанные из анализа зависимостей (5.1), (5.3), а формула (5.4), более того, совпадает с (5.2) при $A=0{,}5$.

В низкочастотной области рассмотренный пример находится также в соответствии с результатом [6].

Принципиальная возможность использованных в данной статье подходов к решению задачи магнитоупругости согласуется с результатами работы [7]. Параметры Ω/δ и α/Ω, по которым здесь велось разложение, могут рассматриваться как аналоги магнитного числа Рейнольдса и магнитного давления [7] в теории оболочек.

Заметим, что в данной работе, так же как и в [2, 6, 7], вопрос о демпфировании упругих колебаний рассмотрен исключительно с точки зрения влияния на них магнитных полей без учета внутреннего трения, которое в ряде случаев является основным фактором, вызывающим демпфирование. Предлагаемый метод может быть распространен и на исследование уравнений, учитывающих наряду с магнитными полями влияние внутреннего трения (например, введением комплексных модулей упругости [8]), однако это выходит за рамки статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
3. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
4. *Гольденвейзер А. Л.* Об ортогональности форм собственных колебаний тонкой упругой оболочки.– В кн.: Пробл. механики тверд. деформированного тела. Л.: Судостроение, 1970. с. 121–128.
5. *Радовинский А. Л.* Классификация свободных колебаний оболочек, содержащих жидкость.– Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 6, с. 124–135.
6. *Гонткевич В. С.* О расчете затухания магнитоупругих колебаний круговой цилиндрической оболочки.– В кн.: Рассеяние энергии при колебаниях упругих систем. Киев: Наук. думка, 1968, с. 100–106.
7. *Селезов И. Т.* Некоторые приближенные формы уравнений движения магнитоупругих сред.– Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 5, с. 86–91.
8. *Сорокин Е. С.* К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Госстройиздат, 1960. 131 с.

Москва

Поступила в редакцию
30.VIII.1985