

УДК 539.374

## ДЕФОРМИРОВАНИЕ И ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ НЕУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

ГУДРАМОВИЧ В. С., КОНОВАЛЕНКОВ В. С.

Изучен процесс деформирования упругопластических оболочек, обладающих анизотропией пластических свойств материала, возникшей в процессе сложного нагружения.

Пределные нагрузки, характеризующие критические состояния оболочек, определены как точки первого локального максимума на кривых (поверхностях) равновесных состояний.

Проведен анализ результатов эксперимента по определению предельных нагрузок для цилиндрических оболочек при действии осевой сжимающей силы и внешнего давления, изменяющихся по различным программам. Результаты расчета сопоставлены с экспериментальными данными.

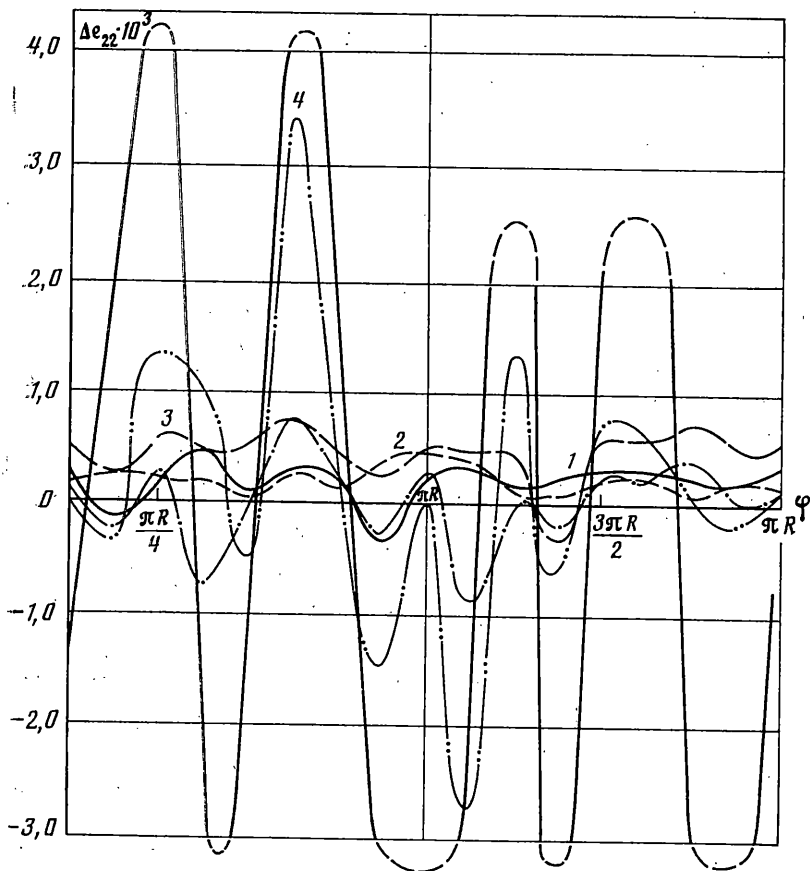
1. Существенное влияние на критические состояния оболочечных конструкций оказывает наличие геометрических и физических несовершенств, моментность исходного состояния, приводящие к неоднородности свойств конструкции. Сложное нагружение при неупругом деформировании приводит к появлению анизотропии физических свойств материала и, таким образом, также является фактором, усиливающим неоднородность рассматриваемых систем. Для таких систем определение параметров, характеризующих критические состояния, должно проводиться на основе исследования всего процесса деформирования с учетом указанных факторов.

Широко используемая бифуркационная постановка задачи (при допущении об однородности и безмоментности докритического состояния) не учитывает этих факторов и не позволяет в полной мере дать достоверные сведения о критическом состоянии системы [4–7].

Отметим, что при исследовании критических состояний возникает необходимость определения уровня деформации, соответствующего критической нагрузке [5]. Большинство металлов и их сплавов обладает малым упрочнением и разница между критическим напряжением ( $\sigma_*$ ) и пределом текучести ( $\sigma_s$ ), составляющая ~15%, имеет тот же порядок, что и разброс физических свойств материала, поэтому с указанной точностью за  $\sigma_*$  можно принять  $\sigma_s$ , тогда как  $\varepsilon_*$  может превышать  $\varepsilon_s$  в несколько раз и достигать такого уровня, при котором оболочка как элемент конструкции перестает отвечать своему функциональному назначению.

Моделирование процесса деформирования и определение критического состояния с учетом факторов, присущих реальным системам, связано с построением (в общем случае многопараметрического нагружения) поверхностей равновесных состояний, определяемых комбинацией нагрузок и характерным прогибом, и нахождением предельных значений нагрузок на этих поверхностях. Такой подход (основанный на геометрически нелинейной постановке задачи) осуществлен в [7–10]. Степень приближения расчетных характеристик процесса деформирования и предельных нагрузок к реальным зависит от точности аппроксимации прогиба (удовлетворение граничных условий, число удерживаемых гармоник). При таком подходе на поверхностях (кривых) равновесных состояний могут быть определены и точки бифуркации, характеризующие ветвление процесса деформирования.

В качестве физического закона целесообразно использование зависи-



Фиг. 1

мостей, позволяющих вводить параметры, являющиеся мерой анизотропии пластических свойств материала, приобретаемой в процессе нагружения. Физические соотношения должны быть удобными с точки зрения их численной реализации при решении конкретных задач. К таким соотношениям можно отнести теории течения с анизотропным упрочнением, где мерой анизотропии являются накопленные остаточные микронапряжения [11]. Данные варианты теории пластичности применимы для широкого класса траекторий нагружения и использованы в решениях ряда задач для оболочечных систем (применимость их для траекторий нагружения с большими углами излома (более  $90^\circ$ ) должна быть обсуждена особо). Использование более общих зависимостей, характеризующих физические свойства материала, при геометрически нелинейной схеме описания процесса деформирования связано с существенными математическими трудностями. При этом в некоторых задачах отмечено малое отличие от результатов, полученных на основе указанных выше вариантов теории течения, для широкого класса траекторий нагружения.

Следует отметить, что учет взаимного влияния факторов, присущих оболочке как геометрически нелинейной системе, и анизотропии физических свойств материала, возникающей при различных историях сложного нагружения за пределом упругости, позволяет обнаружить новые эффекты, неизвестные ранее.

2. Рассмотрим полученную в эксперименте картину развития прогиба  $w(\varphi)$  цилиндрической оболочки при нагружении осевой сжимающей силой и внешним давлением, меняющимися по закону:  $q = kT$  ( $k = 0,00818$ ) для уровней нагрузки, превышающих  $q = 2,0$  МПа и  $T = 255$  кН для оболочек из алюминивно-магниевого сплава АМг-6М с  $R/h = 31$ ,  $L/R = 1,5$ ,  $R = 0,0915$  м. Кривая 1 соответствует распределению  $w(\varphi)$  при осевой сжимающей силе 285 кН и внешнему давлению 2 МПа, кривая 2 — 283 кН и

2,2 МПа, кривая 3 — 290 кН и 2,3 МПа, кривая 4 — 332 кН и 2,6 МПа (фиг. 1).

При меньших значениях нагрузки, когда амплитуда прогиба соизмерима с неизбежными несовершенствами формы, наблюдается хаотическая перестройка формы изгиба, вызванная взаимным влиянием начального прогиба  $w_0$ , изгибными компонентами  $w$ , моментностью исходного состояния и др. При прогибах, значительно превышающих  $w_0$ , формируется форма изгиба, сохраняющаяся вплоть до достижения предельного состояния.

Описание процесса деформирования проведем с использованием геометрически нелинейных соотношений. В общем случае равновесие оболочки описывается системой нелинейных уравнений в частных производных

$$\nabla^i \nabla^j M_{ij} + (B^{ij} + \nabla^i \nabla^j w) c_{ik} c_{jl} \nabla^k \nabla^l F + q = 0 \quad (2.1)$$

$$c_{im} c_{jn} (\nabla^i \nabla^j \varepsilon_{mn} + b^{ij} \nabla^m \nabla^n w + 1/2 \nabla^i \nabla^j w \nabla^m \nabla^n w) = 0$$

где  $M_{ij}$  — изгибающие моменты,  $\varepsilon_{mn}$  — деформации срединной поверхности оболочки,  $F_{ij}$  — функция усилий,  $q$  — поперечное давление,  $B^{ij}$ ,  $c_{ij}$ ,  $b^{ij}$  — функционалы, зависящие от принятого физического закона,  $\nabla^i$  — дифференциальные операторы.

Для решения задач напряженно-деформированного состояния и определения предельных нагрузок (и соответствующих им значений деформаций) исходную систему уравнений необходимо дополнить соотношениями между приращениями внутренних силовых факторов, деформаций и кривизн (здесь, как и ранее, производится суммирование по повторяющемуся индексу):

$$\Delta \varepsilon_{ij} = A_{ij}^{kl} \Delta T_{kl} + B_{ij}^{kl} \Delta \kappa_{kl}, \quad \Delta M_{ij} = C_{ij}^{kl} \Delta T_{kl} + D_{ij}^{kl} \Delta \kappa_{kl} \quad (2.2)$$

$$A_{11}^{11} = (a_{22}^{22} a_{12}^{12} - a_{12}^{22} a_{22}^{12}) \delta^{-1}, \quad A_{11}^{22} = (a_{11}^{12} a_{12}^{22} - a_{11}^{22} a_{12}^{12}) \delta^{-1}$$

$$A_{11}^{12} = (a_{11}^{22} a_{22}^{12} - a_{11}^{12} a_{22}^{22}) \delta^{-1}, \quad A_{22}^{11} = (a_{22}^{11} a_{12}^{11} - a_{22}^{11} a_{12}^{12}) \delta^{-1}$$

$$A_{22}^{22} = (a_{11}^{11} a_{12}^{12} - a_{11}^{12} a_{12}^{11}) \delta^{-1}, \quad A_{22}^{12} = (a_{11}^{12} a_{22}^{11} - a_{11}^{11} a_{22}^{12}) \delta^{-1}$$

$$A_{12}^{11} = (a_{22}^{11} a_{12}^{22} - a_{22}^{22} a_{12}^{11}) \delta^{-1}, \quad A_{11}^{22} = (a_{11}^{22} a_{12}^{11} - a_{11}^{11} a_{12}^{22}) \delta^{-1}$$

$$A_{12}^{12} = (a_{11}^{11} a_{22}^{22} - a_{11}^{22} a_{22}^{11}) \delta^{-1}, \quad \delta = \det[a_{ij}^{kl}]$$

$$B_{ij}^{kl} = b_{11}^{kl} A_{ij}^{11} + b_{22}^{kl} A_{ij}^{22} + b_{12}^{kl} A_{ij}^{12}$$

$$C_{ij}^{kl} = c_{ij}^{11} A_{11}^{kl} + c_{ij}^{22} A_{22}^{kl} + c_{ij}^{12} A_{12}^{kl}$$

$$D_{ij}^{kl} = c_{ij}^{11} B_{11}^{kl} + c_{ij}^{22} B_{22}^{kl} + c_{ij}^{12} B_{12}^{kl} + d_{ij}^{kl}$$

При этом использованы соотношения ( $h$  — толщина оболочки):

$$\Delta T_{ij} = a_{ij}^{kl} \Delta \varepsilon_{kl} + b_{ij}^{kl} \Delta \kappa_{kl}, \quad \Delta M_{ij} = c_{ij}^{kl} \Delta \varepsilon_{kl} + d_{ij}^{kl} \Delta \kappa_{kl} \quad (2.3)$$

$$a_{ij}^{kl} = \int_{-h/2}^{h/2} g_{ij}^{kl} dz, \quad b_{ij}^{kl} = c_{ij}^{kl} = \int_{-h/2}^{h/2} g_{ij}^{kl} z dz, \quad d_{ij}^{kl} = \int_{-h/2}^{h/2} g_{ij}^{kl} z^2 dz$$

Коэффициенты  $g_{ij}^{kl}$  определяются на основе соотношений теории пластичности [11] в зависимости от способа нагружения. Для различных линейных и ступенчатых траекторий нагружения они приведены в [10, 12]. Криволинейные пути формируются совокупностью вписанных в них хорд. Учитывая (2.2) и соотношения для приращений кривизн  $\Delta \kappa_{kl}$  согласно линейной теории, применяя к (2.1) вариант метода продолжения по параметру (метод последовательных нагружений [13]), приходим к системе дифференциальных уравнений в частных производных относительно функций  $\Delta F$ ,  $\Delta w$  на  $i$ -м этапе нагружения

$$L_1(\Delta F_i) + L_2(\Delta w_i) + \Delta q_i = 0, \quad L_3(\Delta F_i) + L_4(\Delta w_i) = 0 \quad (2.4)$$

где  $L_j$  ( $j=1, 4$ ) — дифференциальные операторы, зависящие от входящих в (2.2) коэффициентов [10].

Приращения функции усилий  $\Delta F_i$  и прогиба  $\Delta w_i$  представляются в виде  $(X_m(x), Y_n(y), \chi_m(x), \psi_n(y))$  — координатные функции):

$$\Delta F_i = \sum_{mn} A_{mni} X_m(x) Y_n(y), \quad \Delta w_i = \sum_{mn} B_{mni} \chi_m(x) \psi_n(y) \quad (2.5)$$

Применяя на каждом этапе нагружения метод переменных параметров упругости и процедуру Бубнова — Галеркина, приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$[H] \cdot \{\Omega\} = \{Z\} \quad (2.6)$$

где  $[H]$  — квадратная матрица,  $\{\Omega\}$  — вектор неизвестных  $A_{mni}$ ,  $B_{mni}$ ,  $\{Z\}$  — вектор правых частей.

Решение системы (2.6) осуществляется известными методами в зависимости от обусловленности системы. В результате решения определяются неизвестные коэффициенты в представлениях (2.5).

На каждом этапе нагружения для достигнутого уровня внешней нагрузки определяется прогиб  $w = \sum \Delta w_i$  и функция усилий  $F = \sum \Delta F_i$  (суммирование по  $i$  от 1 до  $N-1$ ). Согласно (2.2), определяется  $\Delta \varepsilon_{ij(i)}$ . Приращение деформации в любой точке по толщине оболочки подчиняется гипотезе Кирхгофа — Лява:  $\Delta e_{ij(i)} = \Delta \varepsilon_{ij(i)} + z \Delta \kappa_{ij(i)}$ . Далее строится поверхность (кривая) равновесных состояний, отражающая с определенной точностью реальный процесс деформирования (адекватность реальному процессу определяется точностью аппроксимации искомых функций и величиной шага по нагрузке). При приближении к предельной точке происходит резкое возрастание прогиба, вызывающее расхожимость вычислительного процесса и как следствие этого смену знака приращения прогиба  $\Delta w_i$  в окрестности предельной точки. Избежать этого можно путем смены ведущего параметра (внешней нагрузки) на этапах, предшествующих перемене знака  $\Delta w_i$ , т. е. заданием не внешней нагрузки, а иного параметра, в частности прогиба. Перемена знака  $\Delta w_i$  может произойти вследствие перехода через точку излома траектории при путях нагружения сложной конфигурации, что необязательно соответствует предельной точке.

3. Проиллюстрируем изложенный алгоритм на примере шарнирно опертой цилиндрической оболочки под действием осевой сжимающей силы и внешнего давления. В пластической области поведение материала описывается теорией течения с комбинированным (кинематическим и изотропным) упрочнением [11]. Приращения  $\Delta F_i$ ,  $\Delta w_i$  (2.5) запишем следующим образом:

$$\Delta F_i = f_i \sin \lambda x \sin \eta y - 1/2 \Delta T_{11}^0 x^2 - 1/2 \Delta T_{22}^0 y^2 \quad (3.1)$$

$$\Delta w_i = g_{1i} \sin \lambda x \sin \eta y + g_{2i} \sin^2 \lambda x$$

$$\lambda = m\pi/L, \quad \eta = n/R$$

где  $\Delta T_{jki}^0$  — приращения внешних нагрузок в срединной поверхности оболочки,  $m$  — число полуволн вдоль образующей оболочки,  $n$  — число волн по направляющей,  $L_1$  — длина оболочки,  $R$  — радиус срединной поверхности. Коэффициенты в (2.2) представимы в виде [8]:

$$A_{ij}^{kl} = A_{ij(0)}^{kl} + (A_{ij(1)}^{kl} - A_{ij(0)}^{kl}) \sin^2 \lambda x \sin^2 \eta y \quad (3.2)$$

$$B_{ij}^{kl} = B_{ij}^{kl} \sin \lambda x \sin \eta y, \quad C_{ij}^{kl} = C_{ij(1)}^{kl} \sin \lambda x \sin \eta y$$

$$D_{ij}^{kl} = D_{ij(0)}^{kl} + (D_{ij(1)}^{kl} - D_{ij(0)}^{kl}) \sin^2 \lambda x \sin^2 \eta y$$

индексы нуль, единица соответствуют значениям указанных коэффициентов на торцах оболочки ( $x=0, L$ ) и в середине оболочки (по образующей) ( $x=L/2, yR^{-1}=\pi/2+k\pi, k=1, 2$ ).

Решение задачи сводится к решению системы (2.6) при следующих значениях коэффициентов:

$$\begin{aligned}
 H_{11} = & -\{\lambda^4 [D_{11(0)}^{11} + 9/_{16} (D_{11(1)}^{11} - D_{11(0)}^{11})] + \lambda^2 \eta^2 [D_{11(0)}^{22} + 2D_{12(0)}^{12} + D_{22(0)}^{11}] + \\
 & + 9/_{16} [D_{11(1)}^{22} - D_{11(0)}^{22} + 2(D_{12(1)}^{12} - D_{12(0)}^{12}) + D_{22(1)}^{11} - D_{22(0)}^{11}] + \eta^4 [D_{22(0)}^{22} + \\
 & + 9/_{16} (D_{22(1)}^{22} - D_{22(0)}^{22})] - 3/_{4} [\lambda^4 (D_{11(1)}^{11} - D_{11(0)}^{11}) + \lambda^2 \eta^2 (D_{11(1)}^{22} - D_{11(0)}^{22} + \\
 & + D_{22(1)}^{11} - D_{22(0)}^{11}) + \eta^4 (D_{22(1)}^{22} - D_{22(0)}^{22})] - 1/_{2} \lambda^2 \eta^2 (D_{12(1)}^{12} - D_{12(0)}^{12}) + \\
 & + \lambda^2 (T_{11}^0 + \Delta T_{11i}^0) + \eta^2 (T_{22}^0 + \Delta T_{22i}^0) \} \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

$$H_{12} = H_{21} = \lambda^2 \eta^2 f, \quad H_{13} = H_{31} = \lambda^2 (g_2 \eta^2 - R^{-1})$$

$$H_{22} = 2\lambda^2 [-\lambda (D_{11(0)}^{11} + 3D_{11(1)}^{11}) + T_{11}^0 + \Delta T_{11i}^0]$$

$$H_{23} = 3/_{2} C_{11(1)}^{22} \lambda^4 + (C_{11(1)}^{11} + C_{22(1)}^{22} + C_{12(1)}^{12} + g_1) \lambda^2 \eta^2 + C_{22(1)}^{11} \eta^4$$

$$H_{32} = -[\lambda^2 \eta^2 (B_{11(1)}^{11} - g_1) + 5B_{22(1)}^{11} \lambda^4]$$

$$\begin{aligned}
 H_{33} = & \lambda^4 [A_{22(0)}^{22} + 9/_{16} (A_{22(1)}^{22} - A_{22(0)}^{22})] + \lambda^2 \eta^2 [A_{11(0)}^{22} + A_{12(0)}^{12} + A_{22(0)}^{11} + \\
 & + 9/_{16} (A_{11(1)}^{22} - A_{11(0)}^{22} + A_{12(1)}^{12} - A_{12(0)}^{12} + A_{22(1)}^{11} - A_{22(0)}^{11})] + \eta^4 [A_{11(0)}^{11} + \\
 & + 9/_{16} (A_{11(1)}^{11} - A_{11(0)}^{11})] + 3/_{4} [\lambda^2 (A_{22(1)}^{22} - A_{22(0)}^{22}) + \lambda^2 \eta^2 (A_{11(1)}^{22} - A_{11(0)}^{22} + A_{22(1)}^{11} - \\
 & - A_{22(0)}^{11}) + \eta^4 (A_{11(1)}^{11} - A_{11(0)}^{11})] + 1/_{4} \lambda^2 \eta^2 (A_{11(0)}^{12} - A_{12(0)}^{12})
 \end{aligned}$$

$$\{\Omega\} = \{g_{1i}, g_{2i}, f_i\}^T, \quad \{Z\} = \{Z_{11}, Z_{22}, Z_{33}\}^T$$

$$(f, g_1, g_2) = \sum_{i=1}^{N-1} (f_i, g_{1i}, g_{2i}), \quad Z_{11} = -\{[ (C_{11(1)}^{11} + g_1) \lambda^2 + C_{22(1)}^{11} \eta^2 ] \Delta T_{11i}^0 +$$

$$+ [C_{11(1)}^{22} \lambda^2 + (C_{22(1)}^{22} + g_1) \eta^2] \Delta T_{22i}^0\}, \quad Z_{22} = -2g_2 \lambda^2 \Delta T_{11i}^0, \quad Z_{33} = 0$$

Из (2.2) с учетом (3.2) и выражений

$$\Delta T_{11} = \partial^2 \Delta F / \partial x^2, \quad \Delta T_{22} = \partial^2 \Delta F / \partial y^2 \quad (3.4)$$

$$\Delta T_{12} = -\partial^2 \Delta F / \partial x \partial y, \quad \Delta \kappa_{11} = \partial^2 \Delta w / \partial x^2$$

$$\Delta \kappa_{22} = -\partial^2 \Delta w / \partial y^2, \quad \Delta \kappa_{12} = -\partial^2 \Delta w / \partial x \partial y$$

для приращений кривизн и деформаций на  $i$ -м этапе нагружения в срединной поверхности оболочки имеем

$$\Delta \kappa_{11i} = \lambda^2 g_{1i} \sin \lambda x \sin \eta y + 2\lambda^2 g_{2i} \cos 2\lambda x$$

$$\Delta \kappa_{22i} = \eta^2 g_{1i} \sin \lambda x \sin \eta y, \quad \Delta \kappa_{12i} = 0$$

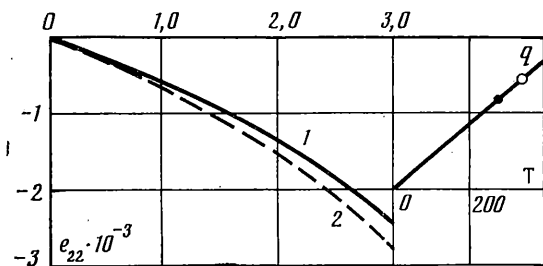
$$\Delta \varepsilon_{11i} = -(A_{11}^{11} \eta^2 + A_{11}^{22} \lambda^2) f_i \sin \lambda x \sin \eta y + (B_{11}^{11} \lambda^2 + B_{11}^{22} \eta^2) g_{1i} \sin \lambda x \sin \eta y + \quad (3.5)$$

$$+ 2\lambda^2 B_{11}^{11} g_{2i} \cos 2\lambda x - 1/_{2} A_{11}^{11} \Delta T_{11i}^0 x^2 - 1/_{2} A_{11}^{22} \Delta T_{22i}^0 y^2, \quad \Delta \varepsilon_{12i} = 0$$

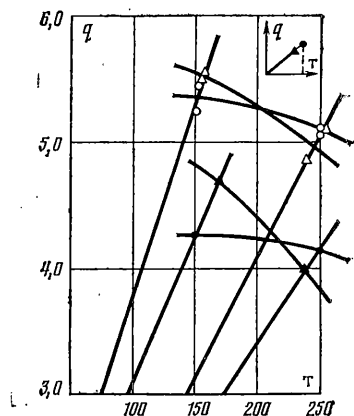
$$\Delta \varepsilon_{22i} = -(A_{22}^{11} \lambda^2 + A_{22}^{22} \eta^2) f_i \sin \lambda x \sin \eta y + (B_{22}^{11} \lambda^2 + B_{22}^{22} \eta^2) g_{1i} \sin \lambda x \sin \eta y +$$

$$+ 2\lambda^2 B_{22}^{11} g_{2i} \cos 2\lambda x - 1/_{2} A_{22}^{11} \Delta T_{11i}^0 x^2 - 1/_{2} A_{22}^{22} \Delta T_{22i}^0 y^2$$

где коэффициенты  $A_{ij}^{kl}$ ,  $B_{ij}^{kl}$  определяются по (3.2).



Фиг. 2



Фиг. 3

Задача упрощается в силу симметрии и достаточно определять деформации и строить поверхность равновесных состояний «комбинация нагрузок — прогиб» лишь в некоторых характерных сечениях оболочки (при регулярной форме прогиба — в сечениях, проходящих через точки максимального прогиба  $w=w_+$ ).

На внутренней поверхности оболочки в вершинах вмятин ( $w=w_+$ ) приращения деформаций на  $i$ -м этапе нагружения определяются следующим образом:

$$\Delta e_{11i} = -(\lambda^2 A_{11}^{22} + \eta^2 A_{11}^{11}) f_i + [\lambda^2 (B_{11}^{11} + h/2) + \eta^2 B_{11}^{22}] g_{1i} + \\ + 2\lambda^2 B_{11}^{11} (1+h/2) g_{2i} - A_{11}^{11} \Delta T_{11i}^0 - A_{11}^{22} \Delta T_{22i}^0$$

$$\Delta e_{22i} = -(\lambda^2 A_{22}^{11} + \eta^2 A_{22}^{22}) f_i + [\lambda^2 B_{22}^{11} + \eta^2 (B_{22}^{22} + h/2)] g_{1i} + 2\lambda^2 B_{22}^{11} g_{2i} - \\ - A_{22}^{11} \Delta T_{11i}^0 - A_{22}^{22} \Delta T_{22i}^0$$

В этих соотношениях  $\lambda = \pi/L$  ( $m=1$ ). При этом учтено, что при наличии внешнего давления вдоль образующей реализуется обычно одна полу-волна.

Расчет осуществляется для ряда значений  $n$ . Затем проводится минимизация найденных значений предельных нагрузок. Для определения предельных нагрузок проведена численная минимизация по числу волн в окружном направлении ( $n$ ). Отметим, что описанный алгоритм требует задания некоторого возмущения в правой части системы уравнений (2.6) для получения нетривиального решения. Естественным представляется задание несимметричной составляющей начального прогиба, присущего любой реальной конструкции. Расчеты показывают, что для оболочек с рассмотренными параметрами неизменность предельных значений нагрузок обеспечивается для значений амплитуды несимметричной составляющей  $w_0$ , лежащих в диапазоне  $(10^{-8} - 10^{-4})h$ .

Соотношения (2.6) — (3.6) являются основой для расчетов критических деформаций и соответствующих им критических (предельных) нагрузок при различных режимах нагружения (пропорциональное, ступенчатое изменение действующих нагрузок и криволинейные пути нагружения).

4. На фиг. 2 представлены результаты расчета развития деформации  $e_{22}$  в окружном направлении на внутренней поверхности оболочки из сплава АМг-6М в вершине вмятины. Кривая 1 построена по результатам обработки данных тензомертирования; 2 — по результатам расчета. Фиг. 2 иллюстрирует удовлетворительное совпадение экспериментальных и расчетных данных (светлые значки соответствуют эксперименту, сплошные — расчетным данным). Отметим, что деформация, соответствующая началу пластического деформирования, равна  $1,8 \cdot 10^{-3}$ . В [7, 10] приведены сведения о ряде других экспериментальных данных по предельным нагрузкам и деформациям для цилиндрических оболочек при различных программах нагружения, удовлетворительно совпадающих с результатами расчетов на основе предложенного выше подхода.

На фиг. 3 приведены данные испытаний восьми выточенных цилиндрических

оболочек из АМг-6М с геометрическими параметрами  $L/R=1,5$ ,  $R/h=31,0$  ( $q$  — в МПа,  $T$  — в кН). Режимы нагружения изображены в правой верхней части. Максимальное различие между данными эксперимента и расчета достигает 16%. Среди причин такого различия следует отметить несовпадение граничных условий (в эксперименте реализованы более жесткие граничные условия, чем шарнирное опирание при расчете), естественные разбросы физических и геометрических свойств объектов испытаний.

Бифуркационные нагрузки соответствуют перемене знака определителя однородной системы алгебраических уравнений второго порядка и определяются в процессе реализации описанного выше вычислительного алгоритма. Для оболочек с рассмотренными геометрическими параметрами при ступенчатом нагружении бифуркационные нагрузки отличаются от предельных незначительно ( $\sim 2,3\%$ ).

Проведенные многочисленные расчеты обнаруживают некоторые новые качественные эффекты. В частности, получено, что простое нагружение не всегда дает нижние значения предельных нагрузок. Из фиг. 3 видно, что кривые, характеризующие предельное состояние, при простом и сложном нагружениях пересекаются. Данные кривые могут иметь невыпуклые участки [10]. Эти эффекты характеризуют взаимное влияние особенностей поведения оболочки как геометрически нелинейной системы и сложного нагружения в задачах построения процесса деформирования и определения предельных нагрузок при упругопластической деформации.

Отметим, что аналогичные эффекты обнаружены в бифуркационных задачах (геометрически линейная постановка) для цилиндрических оболочек и прямоугольных пластин при использовании теории течения с трансляционным упрочнением [12].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хорн М. Устойчивость упругопластических конструкций.— Период. сб. перев. иностр. статей, 1965, № 1, с. 115—149.
2. Hutchinson J. W. Plastic buckling.— In: Advances in Applied Mechanics. N. Y.: Acad. Press, 1974, v. 14, p. 67—144.
3. Koiter W. T. Current trends in theory of buckling.— In: Buckling of structures. Berlin, e. a.: Springer, 1974, p. 1—16.
4. Калошников В. Д. Устойчивость упругопластических систем. М.: Наука, 1980. 240 с.
5. Ильюшин А. А. Общая характеристика проблемы неупругой устойчивости в механике деформируемого твердого тела.— В кн.: Устойчивость в механике деформируемого твердого тела: Материалы Всесоюз. симпоз. Калинин: Изд-е Калинин. ун-та, 1981. с. 4—11.
6. Зубчинов В. Г. О современных проблемах неупругой устойчивости.— В кн.: Устойчивость в механике деформируемого твердого тела: Материалы Всесоюз. симпоз. Калинин: Изд-е Калинин. ун-та, 1981, с. 12—60.
7. Гудрамович В. С. Критические состояния неупругих оболочек при сложном нагружении.— В кн.: Устойчивость в механике деформируемого твердого тела: Материалы Всесоюз. симпоз. Калинин: Изд-е Калинин. ун-та, 1981, с. 61—87.
8. Сорокин В. В. Приближенный метод исследования больших прогибов и несущей способности упругопластических оболочек.— Инж. ж., МГТ, 1966, № 4, с. 81—87.
9. Mazzolani F. M. Inelastic buckling of metal bars.— Staveb. čas., 1975, t. 23, No. 9, p. 657—666.
10. Гудрамович В. С., Герасимов В. П., Коноваленков В. С., Пошивалов В. П. Предельные состояния оболочек при сложном нагружении и ползучести материала. Киев: Наук. думка, 1984. 252 с.
11. Кадашевич Ю. И., Новожилков В. В. Теория пластичности и ползучести металлов, учитывающая микронапряжения.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 5, с. 99—110.
12. Гудрамович В. С. О критических поверхностях в задачах выпучивания пластин и оболочек за пределами упругости.— В кн.: Тр. X Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Кутаиси, 1975. Тбилиси: Мецниереба, 1975, т. 1, с. 366—373.
13. Григолюк Э. И., Шалашилин В. И. Метод продолжения по параметру в задачах нелинейного деформирования стержней, пластин и оболочек.— В кн.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984, вып. 17, ч. 1, с. 3—58.

Днепропетровск

Поступила в редакцию  
8.VII.1985