МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1987

УДК 539.388

УСТОЙЧИВОСТЬ РАСТУЩИХ АРМИРОВАННЫХ СТЕРЖНЕЙ

ДРОЗДОВ А. Д., СОЛОМЕНЦЕВ Ю. Е.

Устойчивость на конечном интервале времени неоднородно стареющих вязкоупругих стержней исследовалась в [1, 2]. Принятые в [1] определения устойчивости на конечном интервале времени соответствуют концепции устойчивости динамических систем по Четаеву. В [2] получены уравнения изгиба растущих вязкоупругих стержней и численно исследована зависимость критического времени от скорости наращивания. В данной работе приведены аналитические оценки критического времени растущего армированного вязкоупругого стержня в зависимости от скорости роста.

1. Постановка задачи. Рассмотрим полую цилиндрическую трубу длины l_0, изготовленную из упругого материала. Введем систему координат (x_1, x_2, x_3), ось $x=x_1$ которой направлена по продольной оси трубы, а ось x_2 лежит в плоскости изгиба.

В момент времени $t=0$ к трубе прикладывается внешняя нагрузка и начинается процесс непрерывного наращивания материала, который осуществляется на интервале времени $[0, t^\circ]$. Внешние усилия складываются из силы веса материала (основная нагрузка) и поперечной распределенной нагрузки интенсивности $q=q(t, x)$ (возмущение внешней нагрузки).

Процесс наращивания заключается в заполнении внутренней полости трубы вязкоупругим наполнителем и присоединении дополнительных элементов упругой арматуры. В произвольный момент времени $t\in[0, t^\circ]$ длина арматуры равна $l_0(t)$, $l_0(0)=l_0$, а длина заполненной наполнителем части стержня — $l(t)\leqslant l_0$. При непрерывном наращивании за время dt значения $l_0(t)$ и $l(t)$ изменяются на величины порядка dt. Наращиваемый элемент мгновенно присоединяется к растущему телу и сращивается с ним. Момент зарождения наращиваемого элемента в окрестности точки x совпадает с моментом присоединения этого элемента к растущему телу $\tau^*(x)=t$, $x=l(t)$.

В дальнейшем предполагается, что диаметр цилиндра много меньше его длины. Поэтому растущее тело можно рассматривать как стержень переменной длины, в котором реализуется одноосное напряженное состояние. Обозначим через S_0 площадь части поперечного сечения растущего цилиндра, занятой арматурой, а через J_0 — момент инерции этой части сечения относительно нейтральной оси. Пусть S — площадь занятой наполнителем части поперечного сечения стержня, а J — ее момент инерции. Предполагается, что в каждом поперечном сечении центры тяжести арматуры и наполнителя совпадают, ось x является нейтральной осью стержня, а величины S_0, S, J_0, J не зависят от координаты x. Плотности материалов арматуры и наполнителя постоянны и равны ρ_0 и ρ соответственно.

Ограничимся исследованием наращивания без натяга. Для материала арматуры это означает, что в естественном состоянии кривизна оси наращиваемого элемента равна нулю. Для материала наполнителя под наращиванием без натяга понимается такое наращивание, при котором в естественном состоянии кривизна оси наращиваемого элемента в окрестности точки x совпадает с кривизной продольной оси растущего стержня в этой точке в момент времени $\tau^*(x)$. При одноосном напряженном состоянии напряжение σ и деформация ε в материале арматуры связаны законом Гука $\sigma=E_0\varepsilon$, где E_0 — постоянный модуль Юнга материала арматуры. Уравнения состояния вязкоупругого наполнителя примем в виде

$$\sigma(t,x)=E\left[\varepsilon(t,x)-\int\limits_{\tau^*(x)}^{t} r(t-\tau^*(x),\tau-\tau^*(x))\,\varepsilon(\tau,x)\,d\tau\right]$$

В дальнейшем предполагается, что ядро релаксации $r(t,\tau)$ удовлетворяет условию

$$0\leqslant r(t-\tau^*(x),\quad \tau-\tau^*(x))\leqslant r_1(t,\tau)$$

$$|r_1|=\sup_t\int\limits_0^t r_1(t,\tau)\,d\tau<1\qquad (t\geqslant 0)\tag{1.1}$$

Предположим, что прогиб стержня $w(t,x)$ достаточно мал (так что величинами порядка $[w'(t,x)]^2=(\partial w(t,x)/\partial x)^2$ можно пренебречь по сравнению с единицей) и справедлива гипотеза плоских сечений. При сформулированных предположениях функция $w(t,x)$ удовлетворяет уравнению

$$\Biggl\{EJH(l(t)-x)\Biggl[\Biggl(w''(t,x)-\int\limits_{\tau^*(x)}^{t} r(t-\tau^*(x),\tau-\tau^*(x))\,w''(\tau,x)\,d\tau\Biggr)-$$

$$-w''(\tau^*(x),x)\Biggl(1-\int\limits_{\tau^*(x)}^{t} r(t-\tau^*(x),\tau-\tau^*(x))\,d\tau\Biggr)\Biggr]+E_0J_0w''(t,x)\Biggr\}'=$$

$$=-g[\rho_0(l_0(t)-x)+\rho(l(t)-x)H(l(t)-x)]\,w'(t,x)-\int\limits_x^{l(t)} q(t,\xi)\,d\xi\tag{1.2}$$

Здесь g — ускорение свободного падения, $H(x)$ — функция Хевисайда: $H(x)=1$, $x>0$; $H(x)=0$, $x\leqslant 0$.

Граничные условия для уравнения (1.2) имеют вид

$$w(t,0)=0,\quad w'(t,0)=0,\quad w''(t,l_0(t))=0\tag{1.3}$$

Зафиксируем максимально допустимую величину q_0 интенсивности поперечной нагрузки q: $|q(t,x)|\leqslant q_0$, $x\in[0,l_0(t)]$, $t\in[0,t^\circ]$. Обозначим через w_0 максимально допустимое значение прогиба. Критическое время t^* определим как первый момент достижения абсолютной величиной прогиба $|w(t,x)|$ в какой-либо точке x значения w_0.

Определение. Растущий стержень называется устойчивым на интервале времени $[0,t^\circ]$, если $t^*>t^\circ$, т. е. если на заданном интервале времени $[0,t^\circ]$ абсолютная величина прогиба стержня не превосходит значения w_0 для любой допустимой поперечной нагрузки q.

2. Вывод условий устойчивости. Проинтегрируем равенство (1.2) по x в пределах от 0 до x, а затем положим $t=\tau^*(x)$. Найдем

$$E_0J_0w''(\tau^*(x),x)=\rho_0 g\int\limits_x^{l_0(\tau^*(x))}(l_0(\tau^*(x)-\xi)\,w'(\tau^*(x),\xi)\,d\xi+$$

$$+\int\limits_x^{l_0(\tau^*(x))}(\xi-x)\,q(\tau^*(x),\xi)\,d\xi\tag{2.1}$$

Теперь умножим соотношение (1.2) на $w'(t,x)$ и проинтегрируем по x в пределах от 0 до $l_0(t)$. Интегрируя по частям и учитывая граничные условия (1.3), получим

$$\int_0^{l(t)} (w''(t,x))^2\,dx+k\int_0^{l_0(t)} (w''(t,x))^2\,dx=$$

$$=\int_0^{l(t)} w''(t,x)\,dx\int_{\tau^*(x)}^{t} r(t-\tau^*(x),\tau-\tau^*(x))\,w''(\tau,x)\,d\tau+$$

$$+\int_0^{l(t)} w''(t,x)\,w''(\tau^*(x),x)\,dx\left(1-\int_{\tau^*(x)}^{t} r(t-\tau^*(x),\tau-\tau^*(x))\,d\tau\right)+$$

$$+(EJ)^{-1}\left[g\int_0^{l_0(t)} (\rho_0(l_0(t)-x)+\rho(l(t)-x)H(l(t)-x))\,(w'(t,x))^2\,dx+\right.$$

$$\left.+\int_0^{l_0(t)} q(t,x)\,w(t,x)\,dx\right]=M_1+M_2+M_3,\qquad k=E_0J_0(EJ)^{-1} \tag{2.2}$$

Введем обозначение

$$N^2(t)=\int_0^{l(t)} (w''(t,x))^2\,dx+k\int_0^{l_0(t)} (w''(t,x))^2\,dx$$

Перейдем к оценке величин, стоящих в правой части (2.2). Из неравенства Коши — Буняковского и (1.1) найдем

$$|M_1|\leqslant N(t)\int^{t} r_1(t,\tau)N(\tau)\,d\tau \tag{2.3}$$

Для оценки второго слагаемого в правой части (2.2) воспользуемся соотношением (2.1). Имеем

$$|M_2|\leqslant\frac{N(t)}{E_0J_0\sqrt{3}}\left\{\rho_0 g\left[\int_0^{t} P(t,s)\,(l_0(s)-l(s))^3N^2(s)\lambda^{-1}(s)\,l^{\boldsymbol{\cdot}}(s)\,ds\right]^{1/2}+\right.$$

$$\left.+\frac{q_0\sqrt{3}}{2}\left[\int_0^{t} P(t,s)\,(l_0(s)-l(s))^4 l^{\boldsymbol{\cdot}}(s)\,ds\right]^{1/2}\right\}$$

$$l^{\boldsymbol{\cdot}}(t)=\frac{dl(t)}{dt},\qquad P(t,s)=\left[1-\int_s^t r(t-s,\tau-s)\,d\tau\right]^2 \tag{2.4}$$

где $\lambda(t)$ — минимальное значение функционала

$$\Phi(t,y)=\left\{\int_0^{l(t)} [y''(x)]^2\,dx+k\int_0^{l_0(t)} [y''(x)]^2\,dx\right\}\left\{\int_0^{l_0(t)} [y'(x)]^2\,dx\right\}^{-1}$$

на множестве отличных от тождественного нуля непрерывно дифференцируемых функций $y=y(x)$, удовлетворяющих краевым условиям

$$y(0)=0,\qquad y'(0)=0 \tag{2.5}$$

Обозначим через $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ минимальные значения функционалов

$$\Phi_1(t,y)=\left\{\int_0^{l(t)} [y''(x)]^2\,dx+k\int_0^{l_0(t)} [y''(x)]^2\,dx\right\}\left\{\rho\int_0^{l(t)} (l(t)-\right.$$

$$-x)[y'(x)]^2dx+\rho_0\int\limits_0^{l_0(t)}(l_0(t)-x)[y'(x)]^2dx\Big\}^{-1}$$

$$\Phi_2(t,y)=\left\{\int\limits_0^{l(t)}[y''(x)]^2dx+k\int\limits_0^{l_0(t)}[y''(x)]^2dx\right\}\left\{\int\limits_0^{l_0(t)}y^2(x)dx\right\}^{-1}$$

на множестве дважды непрерывно дифференцируемых функций $y=y(x)$, для которых выполняются краевые условия (2.5). Справедливо неравенство

$$|M_3|\leqslant(EJ)^{-1}N(t)[g\lambda_1^{-1}(t)N(t)+q_0(l_0(t)\lambda_2^{-1}(t))^{1/2}] \qquad (2.6)$$

Из соотношений (2.2)–(2.4), (2.6) получим

$$[1-g(EJ\lambda_1(t))^{-1}]N(t)\leqslant\int\limits_0^t r_1(t,s)N(s)ds+(E_0J_0\sqrt{3})^{-1}\rho_0 g\Bigg[\int\limits_0^t P(t,s)(l_0(s)-$$

$$-l(s))^3N^2(s)\lambda^{-1}(s)l^{\cdot}(s)ds\Bigg]^{1/2}+\Bigg\{\frac{1}{2E_0J_0}\Bigg[\int\limits_0^t P(t,s)(l_0(s)-$$

$$-l(s))^4l^{\cdot}(s)ds\Bigg]^{1/2}+l_0^{1/2}(t)[\lambda_2^{1/2}(t)EJ]^{-1}\Bigg\}q_0 \qquad (2.7)$$

В дальнейшем будем предполагать, что

$$\sup_t g(EJ\lambda(t))^{-1}<1,\qquad t\in[0,\ t^\circ] \qquad (2.8)$$

Условие (2.8) гарантирует для любого $t\in[0,\ t^\circ]$ устойчивость упругого стержня фиксированной длины $l_0(t)$.

Возведем обе части соотношения (2.7) в квадрат и оценим правую часть при помощи неравенства Коши – Буняковского. Имеем

$$N^2(t)\leqslant 2\int\limits_0^t G(t,s)N^2(s)ds+F^2(t)q_0^2 \qquad (2.9)$$

$$G(t,s)=\frac{1}{2}\Bigg[3\int\limits_0^t r_1^2(t,\tau)d\tau+\left(\frac{\rho_0 g}{E_0J_0}\right)^2P(t,s)(l_0(s)-$$

$$-l(s))^3\frac{l^{\cdot}(s)}{\lambda(s)}\Bigg]\Bigg[1-\frac{g}{EJ\lambda(t)}\Bigg]^{-2}$$

$$F^2(t)=6\Bigg[\frac{1}{(2E_0J_0)^2}\int\limits_0^t P(t,s)(l_0(s)-l(s))^4l^{\cdot}(s)ds+$$

$$+\frac{l_0(t)}{\lambda_2(t)(EJ)^2}\Bigg]\Bigg[1-\frac{g}{EJ\lambda(t)}\Bigg]^{-2}$$

Из результатов [3] и (2.9) следует оценка

$$N(t)\leqslant F_0(t)q_0\exp\Bigg[\int\limits_0^t G_0(t,s)ds\Bigg] \qquad (2.10)$$

$$F_0(t)=\sup_s F(s)\quad(0\leqslant s\leqslant t);\qquad G_0(t,\ \tau)=\sup_s G(s,\ \tau)\quad(\tau\leqslant s\leqslant t)$$

Согласно (1.3), найдем

$$|w(t,\ x)|\leqslant[l_0^3(t)/(3k)]^{1/2}N(t),\qquad 0\leqslant x\leqslant l_0(t) \qquad (2.11)$$

Обозначим через T^* минимальный положительный корень уравнения

$$F_0(t)\exp\left[\int_0^t G_0(t,s)\,ds\right]=\frac{w_0}{q_0}\left(\frac{3k}{l_0^3(t)}\right)^{1/2}$$

Из соотношений (2.10), (2.11) следует, что критическое время t^* удовлетворяет неравенству $t^*>T^*$. При этом справедлива следующая

Теорема. Пусть для любого $t\in[0,\ t^\circ]$ выполняется неравенство

$$C(t)=F_0(t)\,l_0^{3/2}(t)\exp\left[\int_0^t G_0(t,s)\,ds\right]<\frac{w_0}{q_0}\,(3k)^{1/2}$$

Тогда вязкоупругий стержень устойчив на интервале времени $[0,\ t^\circ]$. Если дополнительно предположить, что функция $G(t,\ s)$ непрерывна по t и непрерывно дифференцируема по s, то утверждение теоремы справедливо, если

$$C(t)=F^\circ l_0^{3/2}(t)\exp\left[\int_0^t\left(G(s,s)+\int_0^s\frac{\partial G(s,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau\right)ds\right]$$

$$F^\circ=\sup_t F(t)\qquad(0\leqslant t\leqslant t^\circ)$$

Отметим, что оценка критического времени t^* и условие устойчивости существенно зависят от законов, по которым изменяются функции $l(t)$, $l_0(t)$. Численное подтверждение этого результата содержится в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
2. *Арутюнян Н. Х., Потапов В. Д.* Об устойчивости растущего вязкоупругого стержня, подверженного старению.– Докл. АН СССР, 1983, т. 270, № 4, с. 799–803.
3. *Филатов А. Н., Шарова Л. В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний, М.: Наука, 1976. 152 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.VIII.1986