МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1987

УДК 539.376

О НЕКОТОРЫХ ПОСТАНОВКАХ И РЕШЕНИЯХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СИСТЕМ ШТАМПОВ

МАНЖИРОВ А. В.

Даются постановки и строятся решения контактных задач о действии произвольных систем штампов на составные основания. Индивидуальные представления решений и подбор спектральных соотношений при различных постановках позволяют получать искомые характеристики сложных многопараметрических задач в компактном виде. Рассматривается пример.

1. В теории ползучести неоднородных стареющих тел [1] плоские задачи о взаимодействии произвольных систем жестких штампов с шероховатыми либо составными основаниями [2–6] приводят к системам двумерных интегральных уравнений. С учетом неоднородности и старения элементов оснований (шероховатости, тонкого слоя, стержневого слоя, слоя произвольной толщины) и неодновременности приложения либо снятия различных штампов (групп штампов) их можно после соответствующих замен переменных записать в виде

$$c(t)(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_1^*)q^i(x,t)+(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_2^*)\sum_{j=1}^{n}\mathbf{A}_{ij}^*q^j(x,t)=\delta^i(t)+\alpha^i(t)x-g^i(x,t) \tag{1.1}$$

$$\int_{-1}^{1}q^i(x,t)\,dx=p^i(t),\qquad \int_{-1}^{1}q^i(x,t)x\,dx=m^i(t)\quad(i=1,\ldots,n) \tag{1.2}$$

$$\mathbf{L}_k^*w(t)=\int_{\tau_0}^{t}w(\tau)K_k(t,\tau)\,d\tau\quad(k=1,2),\qquad t\in[\tau_0,\tau^*]$$

$$\mathbf{A}_{ij}^*v(x)=\int_{-1}^{1}k^{ij}(x,\xi)v(\xi)\,d\xi,\qquad k^{ij}(x,\xi)=k^{ji}(\xi,x)\qquad(i,j=1,\ldots,n)$$

где введены следующие безразмерные величины: $q^i(x,t)$, $\delta^i(t)$, $\alpha^i(t)$, $p^i(t)$, $m^i(t)$ — непрерывные по t в $L_2[-1,1]$ контактные давления, непрерывные по t осадка, угол поворота, сила и момент для i-го штампа соответственно; $c(t)>0$ — непрерывная по t функция упругих и геометрических характеристик оснований; I^* — тождественный оператор; L_k^* — оператор с ядром Вольтерра, описывающий ползучесть шероховатости, тонкого слоя и т. п. ($k=1$), или слоя произвольной толщины ($k=2$); $k^{ij}(x,\xi)$ — суммируемые с квадратом ядра, получаемые из ядра контактной задачи при приведении различных интервалов изменения геометрических переменных к интервалу $[-1,1]$; $t\in[\tau_0,\tau^*]$ — время на интервале, когда число взаимодействующих штампов фиксировано (здесь равно n), причем при $t<\tau_0$ (при другом числе штампов на предыдущем шаге) решение известно; $g^i(x,t)$ — непрерывная в $L_2[-1,1]$ по t функция, учитывающая форму основания i-го штампа и искажение формы деформируемой поверхности под ним за счет ползучасти материалов. Искажение формы свободной поверхности за счет ползучести необходимо учитывать при присоединении к основанию новых штампов, его всегда можно найти зная решение на предыдущем шаге.

Для удобства дальнейшего изложения воспользуемся символикой тензорного анализа из [7] и обозначим векторы, тензоры и операторы соответственно малыми, большими и большими со звездочкой буквами. По повторяющимся верхним индексам будем производить суммирование.

Рассмотрим полное гильбертово пространство $L_2([-1, 1], V)$ вектор-функций со следующим глобальным скалярным произведением и нормой [8, 9]:

$$\mathbf{a}(x), \mathbf{b}(x) \in L_2([-1,1], V): \quad (\mathbf{a}(x), \mathbf{b}(x)) = \int_{-1}^{1} \mathbf{a}(x)\cdot\mathbf{b}(x)\,dx$$

$$\|\mathbf{a}(x)\| = (\mathbf{a}(x), \mathbf{a}(x))^{1/2} < \infty$$

$$\mathbf{a}(x)\cdot\mathbf{b}(x) = a^k(x)\mathbf{i}^k\cdot b^j(x)\mathbf{i}^j = a^k(x)\,b^k(x) \quad (k, j = 1, \ldots, n)$$

причем, если $\mathbf{a}(x) \in L_2([-1, 1], V)$, то $a^k(x) \in L_2[-1, 1]$, и наоборот.

Рассмотрим также полное гильбертово пространство $\mathbf{L}_2([-1, 1], V)$ тензор-функций двух переменных:

$$\mathbf{K}(x, \xi), \mathbf{M}(x, \xi) \in \mathbf{L}_2([-1, 1], V): \quad [\mathbf{K}(x,\xi), \mathbf{M}(x,\xi)] =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (\mathbf{K}(x,\xi)\cdot\cdot\mathbf{M}(x,\xi))\,d\xi\,dx, \qquad |\mathbf{K}(x,\xi)| = [\mathbf{K}(x,\xi), \mathbf{K}(x,\xi)]^{1/2} < \infty$$

$$\mathbf{K}(x,\xi)\cdot\cdot\mathbf{K}(x,\xi) = k^{ij}(x,\xi)\,k^{ij}(x,\xi)$$

причем, если $\mathbf{K}(x, \xi) \in \mathbf{L}_2([-1, 1], V)$, то $k^{ij}(x, \xi) \in \mathbf{L}_2[-1, 1]$, и наоборот, кроме того

$$(\mathbf{K}(x,\xi), \mathbf{a}(\xi)) = \int_{-1}^{1} \mathbf{K}(x,\xi)\cdot\mathbf{a}(\xi)\,d\xi$$

Можно показать, что оператор $\mathbf{A}^*$: $\mathbf{A}^*\mathbf{a}(x) = (\mathbf{K}(x, \xi), \mathbf{a}(\xi))$, $\mathbf{K}(x, \xi) \in \mathbf{L}_2([-1, 1], V)$ вполне непрерывен из $L_2([-1, 1], V)$ в $L_2([-1, 1], V)$; если $\mathbf{K}(x, \xi) = \mathbf{K}^T(\xi, x)$ $(k^{ij}(x, \xi) = k^{ji}(\xi, x))$, то $\mathbf{A}^*$ — самосопряженный.

Разложим $\mathbf{a}(x) \in L_2([-1, 1], V)$ и $\mathbf{K}(x, \xi) \in \mathbf{L}_2([-1, 1], V)$ в ряды по функциональным векторным базисам. Пусть $\{P_k^*(x)\}$ — базис $L_2[-1, 1]$, причем $P_0^*(x) = 2^{-1/2}$, $P_1^*(x) = (3/2)^{1/2}x$, тогда

$$\mathbf{a}(x) = a^i(x)\mathbf{i}^i = \sum_{k=0}^{\infty} a_k{}^i P_k^*(x)\mathbf{i}^i = \sum_{k=0}^{\infty} a_k{}^i \mathbf{p}_k{}^i(x)$$

$$\mathbf{p}_k{}^i(x) = P_k^*(x)\mathbf{i}^i, \qquad (\mathbf{p}_k{}^i(x), \mathbf{p}_n{}^j(x)) = \begin{cases} 1; & k=n,\ i=j \\ 0; & k\neq n \text{ или } i\neq j \end{cases} \tag{1.3}$$

где $\{\mathbf{p}_k{}^i(x)\}$ $(i=1, \ldots, n;\ k=0, \ldots \infty)$ — базис $L_2([-1, 1], V)$.

Для $\mathbf{K}(x, \xi)$ получим

$$\mathbf{K}(x,\xi) = k^{ij}(x,\xi)\mathbf{i}^i\mathbf{i}^j = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} r_{mn}{}^{ij} P_m^*(x)\mathbf{i}^i P_n^*(\xi)\mathbf{i}^j =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} r_{mn}{}^{ij}\mathbf{p}_m{}^i(x)\,\mathbf{p}_n{}^j(\xi) \tag{1.4}$$

если $\mathbf{K}(x, \xi) = \mathbf{K}^T(\xi, x)$, то $r_{mn}{}^{ij} = r_{nm}{}^{ji}$.

Можно показать, что соотношения (1.1), (1.2) эквивалентны уравнению

$$c(t)\,(\mathbf{I}^* - \mathbf{L}_1^*)\,\mathbf{q}(x, t) + (\mathbf{I}^* - \mathbf{L}_2^*)\,\mathbf{A}^*\mathbf{q}(x, t) = \mathbf{\delta}(t) + \mathbf{\alpha}(t) - \mathbf{g}(x, t) \tag{1.5}$$

с дополнительными условиями

$$\int_{-1}^{1} \mathbf{q}(x,t)\,dx=\mathbf{p}(t), \qquad \int_{-1}^{1} \mathbf{q}(x,t)\,x\,dx=\mathbf{m}(t) \tag{1.6}$$

где $c(t)>0$ — непрерывная по t функция, $\mathbf{q}(x, t)$, $\mathbf{g}(x, t)$ — непрерывные по t в $L_2([-1, 1], V)$ вектор-функции, $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{m}(t)$, $\boldsymbol{\delta}(t)$ и $\boldsymbol{\alpha}(t)$ — непрерывные по t вектор-функции, $\mathbf{A}^*$ — самосопряженный, вполне непрерывный и положительно-определенный оператор из $L_2([-1, 1], V)$ в $L_2([-1, 1], V)$, $t\in[\tau_0, \tau^*]$.

Итак, будем изучать систему n штампов, состоящую из двух групп. Штампы первой группы (соответственно, и компоненты вектор-функций) пронумеруем от 1 до n_0, а второй — от n_0+1 до n; i, j пробегают значения от 1 до n; l, r — от 1 до n_0; p, q — от n_0+1 до n.

Пусть на части штампов заданы осадки $\delta^l(t)$ и углы поворотов $\alpha^l(t)$, а на части — силы $p^p(t)$ и моменты $m^p(t)$. Требуется найти $q^i(x,t)$, $\delta^p(t)$, $\alpha^p(t)$, $p^l(t)$ и $m^l(t)$.

Представим $L_2([-1, 1], V)$ в виде суммы ортогональных подпространств $L_2([-1,1], V)=L_2([-1,1], V)_1\oplus L_2([-1, 1], V)_2$, а вектор-функции из $L_2([-1, 1], V)$ — в виде суммы двух вектор-функций [10], причем (см. 1.3)):

$$\mathbf{a}(x)\in L_2([-1, 1], V):\ \mathbf{a}(x)=\mathbf{a}_1(x)+\mathbf{a}_2(x)$$

$$\mathbf{a}_1(x)\in L_2([-1,1],V)_1:\quad \mathbf{a}_1(x)=\sum_{k=0}^{1} a_k{}^p\mathbf{p}_k{}^p(x) \tag{1.7}$$

$$\mathbf{a}_2(x)\in L_2([-1,1],V)_2:\quad \mathbf{a}_2(x)=\sum_{s=0}^{1} a_s{}^r\mathbf{p}_s{}^r(x)+\sum_{s=2}^{\infty} a_s{}^j\mathbf{p}_s{}^j(x)$$

Теорема 1. Оператор $\mathbf{A}^*=\mathbf{B}_1{}^*+\mathbf{B}_2{}^*$, $\mathbf{B}_k{}^*$ действует из $L_2([-1, 1], V)$ в $L_2([-1, 1], V)_k$ ($k=1, 2$) и $\mathbf{B}_2{}^*$ — вполне непрерывный, самосопряженный и положительно-определенный из $L_2([-1, 1], V)_2$ в $L_2([-1, 1], V)_2$.

Заметим, что

$$\mathbf{B}_1{}^*\mathbf{a}(x)=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{1} r_{mn}{}^{pj}\mathbf{p}_m{}^p(x)\mathbf{p}_n{}^j(\xi),\mathbf{a}(\xi)\Big)$$

$$\mathbf{B}_2{}^*\mathbf{a}(x)=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{m=0}^{1} r_{mn}{}^{lj}\mathbf{p}_m{}^l(x)+\sum_{m=2}^{\infty} r_{mn}{}^{ij}\mathbf{p}_m{}^i(x)\Big)\mathbf{p}_n{}^j(\xi),\mathbf{a}(\xi)\Big) \tag{1.8}$$

$$(\mathbf{B}_2{}^*\mathbf{a}_2(x),\mathbf{b}_2(x))=(\mathbf{A}^*\mathbf{a}_2(x),\mathbf{b}_2(x)),\ \mathbf{a}_2(x),\mathbf{b}_2(x)\in L_2([-1, 1], V)_2$$

Рассмотрим спектральную задачу

$$\mathbf{B}_2{}^*\boldsymbol{\varphi}_k(x)=\alpha_k\boldsymbol{\varphi}_k(x)\quad (k=2,\ldots,\infty) \tag{1.9}$$

где собственные вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}_k(x)$ оператора $\mathbf{B}_2{}^*$, соответствующие его собственным числам α_k, составляют базис $L_2([-1, 1], V)_2$ (см. теорему 1 и [10]). Будем искать их в виде (1.7), тогда

$$\boldsymbol{\varphi}_k(x)=\sum_{s=0}^{1} a_{s(k)}^{r}\mathbf{p}_s{}^r(x)+\sum_{s=2}^{\infty} a_{s(k)}^{j}\mathbf{p}_s{}^j(x) \tag{1.10}$$

и из (1.8)—(1.10) получим систему алгебраических уравнений с симметричной матрицей (см. (1.4) и далее):

$$\sum_{s=0}^{1} r_{ms}{}^{lr}a_{s(k)}^{r}+\sum_{s=2}^{\infty} r_{ms}{}^{lj}a_{s(k)}^{j}=\alpha_k a_{m(k)}^{l}\qquad (m=0,1;\ l=1,\ldots,n_0)$$

$$\sum_{s=0}^{1} r_{ms}{}^{ir} a_{s(k)}^{r} + \sum_{s=2}^{\infty} r_{ms}{}^{ij} a_{s(k)}^{j} = \alpha_k a_{m(k)}^{i} \qquad (m=2,\ldots,\infty;\ i=1,\ldots,n)$$

Ограничивая систему размерностью k_0, получим k_0-е приближение метода Бубнова — Галеркина [11].

Представим решение в виде суммы вектор-функций, непрерывных по t в $L_2([-1, 1], V)_1$ и $L_2([-1, 1], V)_2$:

$$\mathbf{q}(x,t) = \mathbf{q}_1(x,t) + \mathbf{q}_2(x,t), \qquad \mathbf{q}_1(x,t) = \sum_{k=0}^{1} z_k{}^p(t)\,\mathbf{p}_k{}^p(x) \tag{1.11}$$

$$\mathbf{q}_2(x,t) = \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\,\boldsymbol{\varphi}_k(x), \qquad \boldsymbol{\delta}(t) = \boldsymbol{\delta}_1(t) + \boldsymbol{\delta}_2(t), \qquad \boldsymbol{\delta}_1(t) = 2^{1/2}\delta^p(t)\,\mathbf{p}_0{}^p(x)$$

$$\boldsymbol{\delta}_2(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \delta_k(t)\,\boldsymbol{\varphi}_k(x), \qquad \delta_k(t) = 2^{1/2}\delta^l(t)\,a_{0(k)}^{l}, \qquad \boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\alpha}_1(t) + \boldsymbol{\alpha}_2(t)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_1(t)x = (2/3)^{1/2}\alpha^p(t)\,\mathbf{p}_1{}^p(x), \qquad \boldsymbol{\alpha}_2(t)x = \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k(t)\,\boldsymbol{\varphi}_k(x),$$

$$\alpha_k(t) = (2/3)^{1/2}\alpha^l(t)\,a_{1(k)}$$

$$\mathbf{g}(x,t) = \mathbf{g}_1(x,t) + \mathbf{g}_2(x,t), \qquad \mathbf{g}_1(x,t) = \sum_{k=0}^{1} g_k{}^p(t)\,\mathbf{p}_k{}^p(x),$$

$$\mathbf{g}_2(x,t) = \sum_{k=2}^{\infty} g_k(t)\,\boldsymbol{\varphi}_k(x)$$

Подставляя (1.11) в (1.5), с учетом теоремы 1 получим два соотношения для вектор-функций, принадлежащих ортогональным подпространствам пространства непрерывных по t в $L_2([-1, 1], V)$ вектор-функций. Первое является уравнением с вполне непрерывным самосопряженным и положительно-определенным оператором $\mathbf{B}_2{}^*$ для отыскания $\mathbf{q}_2(x, t)$ и имеет следующий вид:

$$c(t)\,(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_1{}^*)\,\mathbf{q}_2(x,t) + (\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_2{}^*)\,\mathbf{B}_2{}^*\mathbf{q}_2(x,t) = -(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_2{}^*)\,\mathbf{B}_2{}^*\mathbf{g}_1(x,t) +$$
$$+\boldsymbol{\delta}_2(t) + \boldsymbol{\alpha}_2(t)x - \mathbf{g}_2(x,t) \tag{1.12}$$

Второе соотношение позволяет определить $\boldsymbol{\delta}_1(t)$ и $\boldsymbol{\alpha}_1(t)$:

$$\boldsymbol{\delta}_1(t) + \boldsymbol{\alpha}_1(t)x = c(t)\,(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_1{}^*)\,\mathbf{q}_1(x,t) +$$
$$+(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_2{}^*)\,\mathbf{B}_1{}^*(\mathbf{q}_1(x,t) + \mathbf{q}_2(x,t)) + \mathbf{g}_1(x,t) \tag{1.13}$$

Теперь с учетом (1.6)—(1.13) получим

$$z_k(t) = (\mathbf{I}^*+\mathbf{N}_k{}^*)\left\{\left[\delta_k(t) + \alpha_k(t) - g_k(t) - (\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_2{}^*)\sum_{m=0}^{1} z_m{}^p(t)\,A_{m(k)}^{p}\right] \Big/ \right.$$
$$\left. \Big/ [c(t) + \alpha_k]\right\} \qquad (k=2,\ldots,\infty)$$

$$\mathbf{N}_k{}^*\, z(t) = \int_{\tau_0}^{t} z(\tau)\,R_k{}^\circ(t,\tau)\,d\tau, \qquad t \in [\tau_0, \tau^*]$$

$$A_{m(k)}^{p} = \sum_{s=0}^{1} r_{sm}{}^{lp}\,a_{s(k)}^{l} + \sum_{s=2}^{\infty} r_{sm}{}^{ip}\,a_{s(k)}^{i}, \qquad z_0{}^p(t) = 2^{-1/2}p^p(t)$$

$$z_1^p(t)=(3/2)^{1/2}m^p(t),\quad p^l(t)=2^{1/2}\sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)a^l_{0(k)},\quad m^l(t)=(3/2)^{1/2}\sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)a^l_{1(k)}$$

$$\delta^p(t)=2^{-1/2}\Big\{c(t)(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_1^*)z_0^p(t)+$$
$$+(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_2^*)\Big[\sum_{k=0}^{1}r_{0k}^{pq}z_k^q(t)+\sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)A^p_{0(k)}\Big]+g_0^p(t)\Big\}\tag{1.14}$$
$$\alpha^p(t)=(3/2)^{1/2}\Big\{c(t)(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_1^*)z_1^p(t)+$$
$$+(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_2^*)\Big[\sum_{k=0}^{1}r_{1k}^{pq}z_k^q(t)+\sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)A^p_{1(k)}\Big]+g_1^p(t)\Big\}$$

где $R_k^\circ(t,\tau)$ — резольвента ядра $K_k^\circ(t,\tau,\alpha_k)=[c(t)K_1(t,\tau)+\alpha_kK_2(t,\tau)]/$ $/[c(t)+\alpha_k]$. Таким образом, решение построено.

2. Рассмотрим другую постановку задачи: на части штампов заданы углы поворота $\alpha^l(t)$, на части — моменты $m^p(t)$ и на всех штампах заданы силы $p^i(t)$; найти $q^i(x,t)$, $\alpha^p(t)$, $m^l(t)$ и $\delta^i(t)$.

Заметим, что

$$L_2([-1,1],V)=L_2([-1,1],V)_3\oplus L_2([-1,1],V)_4$$
$$\mathbf{b}(x)\in L_2([-1,1],V):\ \mathbf{b}(x)=\mathbf{b}_3(x)+\mathbf{b}_4(x)$$
$$\mathbf{b}_3(x)\in L_2([-1,1],V)_3:\ \mathbf{b}_3(x)=b_0^i\mathbf{p}_0^i(x)+b_1^p\mathbf{p}_1^p(x)\tag{2.1}$$
$$\mathbf{b}_4(x)\in L_2([-1,1],V)_4:\ \mathbf{b}_4(x)=b_1^l\mathbf{p}_1^l(x)+\sum_{s=2}^{\infty}b_s^i\mathbf{p}_s^i(x)$$

Кроме того, справедлива теорема 1, где индексы 1 и 2 меняются на 3 и 4 соответственно и

$$\mathbf{B}_3^*\mathbf{a}(x)=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(r_{0n}^{ij}\mathbf{p}_0^i(x)+r_{1n}^{pj}\mathbf{p}_1^p(x))\mathbf{p}_n^j(\xi),\mathbf{a}(\xi)\Big)\tag{2.2}$$

$$\mathbf{B}_4^*\mathbf{a}(x)=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\Big((r_{1n}^{lj}\mathbf{p}_1^l(x)+\sum_{m=2}^{\infty}r_{mn}^{ij}\mathbf{p}_m^i(x)\Big)\mathbf{p}_n^j(\xi),\mathbf{a}(\xi)\Big)$$

$(\mathbf{B}_4^*\mathbf{a}_4(x),\ \mathbf{b}_4(x))=(\mathbf{A}^*\mathbf{a}_4(x),\ \mathbf{b}_4(x)),\ \mathbf{a}_4(x),\ \mathbf{b}_4(x)\in L_2([-1,1],V)_4$

Из спектральной задачи

$$\mathbf{B}_4^*\psi_k(x)=\beta_k\psi_k(x)\qquad(k=2,\dots,\infty)\tag{2.3}$$

найдем $\{\psi_k(x)\}$ — базис $L_2([-1,1],V)_4$, при этом будем представлять $\psi_k(x)$ в виде (см. (2.1)):

$$\psi_k(x)=b^l_{1(k)}\mathbf{p}_1^l(x)+\sum_{s=2}^{\infty}b^i_{s(k)}\mathbf{p}_s^i(x)\tag{2.4}$$

Из (2.2)—(2.4) получим систему уравнений

$$r_{11}^{lr}b^r_{1(k)}+\sum_{n=2}^{\infty}b^j_{n(k)}r_{1n}^{lj}=\beta_kb^l_{1(k)}\qquad(l=1,\dots,n_0)$$

$$r_{m1}^{ir}b^r_{1(k)}+\sum_{n=2}^{\infty}b^j_{n(k)}r_{mn}^{ij}=\beta_kb^i_{m(k)}\qquad(m=2,\dots,\infty;\ i=1,\dots,n)$$

Будем искать решение в виде суммы вектор-функций, непрерывных по t в $L_2([-1, 1], V)_k$ ($k=3, 4$), т. е. $\mathbf{q}(x, t)=\mathbf{q}_3(x, t)+\mathbf{q}_4(x, t)$ и

$$\mathbf{q}_3(x,t)=\omega_0{}^i(t)\mathbf{p}_0{}^i(x)+\omega_1{}^p(t)\mathbf{p}_1{}^p(x), \quad \mathbf{q}_4(x,t)=\sum_{k=2}^{\infty}\omega_k(t)\boldsymbol{\psi}_k(x)$$

$$\delta_3(t)=2^{1/2}\delta^i(t)\mathbf{p}_0{}^i(x), \quad \delta_4(t)=\mathbf{0}, \quad \alpha_3(t)x=(2/3)^{1/2}\alpha^p(t)\mathbf{p}_1{}^p(x)$$

$$\alpha_4(t)x=\sum_{k=2}^{\infty}\alpha_k{}^4(t)\boldsymbol{\psi}_k(x), \quad \alpha_k{}^4(t)=(2/3)^{1/2}\alpha^l(t)b^{l}_{1(k)} \tag{2.5}$$

$$\mathbf{g}_3(x,t)=g_0{}^i(t)\mathbf{p}_0{}^i(x)+g_1{}^p(t)\mathbf{p}_1{}^p(x), \quad \mathbf{g}_4(x,t)=\sum_{k=2}^{\infty}g_k{}^4(t)\boldsymbol{\psi}_k(x)$$

Из (1.5), (1.6) с учетом (2.1)—(2.5) получим два соотношения, аналогичных (1.12), (1.13), откуда

$$\omega_k(t)=(\mathbf{I}^*+\mathbf{D}_k{}^*)\{[\alpha_k{}^4(t)-g_k{}^4(t)-(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_2{}^*)(\omega_0{}^j(t)B^{j}_{k(1)}+$$
$$+\omega_1{}^p(t)B^{p}_{k(2)})]/[c(t)+\beta_k]\} \qquad (k=2,\ldots,\infty)$$

$$\mathbf{D}_k{}^*\omega(t)\int_{\tau_0}^{t}\omega(\tau)R_k{}^1(t,\tau)d\tau, \quad t\in[\tau_0,\tau^*]$$

$$B^{j}_{k(1)}=r_{10}{}^{lj}b^{l}_{1(k)}+\sum_{m=2}^{\infty}r_{m0}{}^{ij}b^{i}_{m(k)}, \quad B^{p}_{k(2)}=r_{11}{}^{lp}b^{l}_{1(k)}+\sum_{m=2}^{\infty}r_{m1}{}^{ip}b^{i}_{m(k)}$$

$$\omega_0{}^i(t)=2^{-1/2}p^i(t), \quad \omega_1{}^p(t)=(3/2)^{1/2}m^p(t), \quad m^l(t)=(2/3)^{1/2}\sum_{k=2}^{\infty}\omega_k(t)b^{l}_{1(k)}$$

$$\delta^i(t)=2^{-1/2}\Big\{c(t)(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_1{}^*)\omega_0{}^i(t)+$$
$$+(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_2{}^*)\Big[\omega_0{}^j(t)r_{00}{}^{ij}+\omega_1{}^q(t)r_{01}{}^{iq}+\sum_{k=2}^{\infty}\omega_k(t)B^{i}_{k(1)}\Big]+g_0{}^i(t)\Big\}$$

$$\alpha^p(t)=(3/2)^{1/2}\Big\{c(t)(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_1{}^*)\omega_1{}^p(t)+$$
$$+(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_2{}^*)\Big[\omega_0{}^j(t)r_{10}{}^{pj}+\omega_1{}^q(t)r_{11}{}^{pq}+\sum_{k=2}^{\infty}\omega_k(t)B^{p}_{k(2)}\Big]+g_1{}^p(t)\Big\}$$

где $R_k{}^1(t,\tau)$ — резольвента ядра $K_k{}^\circ(t,\tau,\beta_k)$.

3. Пусть на части штампов заданы осадки $\delta^l(t)$, на части — силы $p^p(t)$ и на всех штампах — углы поворотов $\alpha^i(t)$. Найти $q^i(x,t)$, $\delta^p(t)$, $p^l(t)$ и $m^i(t)$. Для этого случая

$$L_2([-1,1],V)=L_2([-1,1],V)_5\oplus L_2([-1,1],V)_6$$
$$\mathbf{c}(x)\in L_2([-1,1],V):\ \mathbf{c}(x)=\mathbf{c}_5(x)+\mathbf{c}_6(x)$$
$$\mathbf{c}_5(x)\in L_2([-1,1],V)_5:\ \mathbf{c}_5(x)=c_0{}^p\mathbf{p}_0{}^p(x) \tag{3.1}$$
$$\mathbf{c}_6(x)\in L_2([-1,1],V)_6:\ \mathbf{c}_6(x)=c_0{}^l\mathbf{p}_0{}^l(x)+\sum_{k=1}^{\infty}c_k{}^i\mathbf{p}_k{}^i(x)$$

Имеет место теорема 1, где индексы 1, 2 меняются на 5, 6 и

$$\mathbf{B}_5{}^*\mathbf{c}(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} r_{0n}{}^{pj}\mathbf{p}_0{}^p(x)\,\mathbf{p}_n{}^j(\xi),\,\mathbf{c}(\xi)\right)$$

$$\mathbf{B}_6{}^*\mathbf{c}(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(r_{0n}{}^{lj}\mathbf{p}_0{}^l(x)+\sum_{m=1}^{\infty} r_{mn}{}^{ij}\mathbf{p}_m{}^i(x)\right)\mathbf{p}_n{}^j(\xi),\,\mathbf{c}(\xi)\right) \tag{3.2}$$

$$(\mathbf{B}_6{}^*\mathbf{c}_6(x),\ \mathbf{d}_6(x))=(\mathbf{A}^*\mathbf{c}_6(x),\ \mathbf{d}_6(x)),\ \mathbf{c}_6(x),\mathbf{d}_6(x)\in L_2([-1,1],V)_6$$

Решение спектральной задачи

$$\mathbf{B}_6{}^*\eta_k(x)=\gamma_k\eta_k(x)\quad (k=1,\ldots,\infty) \tag{3.3}$$

дает $\{\eta_k(x)\}$ — базис $L_2([-1,1],V)_6$, где

$$\eta_k(x)=\overset{l}{c}_{0(k)}\,\mathbf{p}_0{}^l(x)+\sum_{s=1}^{\infty}\overset{i}{c}_{s(k)}\,\mathbf{p}_s{}^i(x) \tag{3.4}$$

Из (3.3), (3.4) получим систему алгебраических уравнений для нахождения γ_k, $\overset{l}{c}_{0(k)}$ и $\overset{i}{c}_{s(k)}$:

$$\overset{r}{c}_{0(k)}\,r_{00}{}^{lr}+\sum_{n=1}^{\infty}\overset{j}{c}_{n(k)}\,r_{0n}{}^{lj}=\gamma_k\overset{l}{c}_{0(k)}$$

$$\overset{r}{c}_{0(k)}\,r_{m0}{}^{ir}+\sum_{n=1}^{\infty}\overset{j}{c}_{n(k)}\,r_{mn}{}^{ij}=\gamma_k\overset{i}{c}_{m(k)}\quad (m=1,\ldots,\infty)$$

Представим решение в виде суммы вектор-функций, непрерывных по времени в рассматриваемых ортогональных подпространствах, причем

$$\mathbf{q}_5(x,t)=v_0{}^p(t)\,\mathbf{p}_0{}^p(x),\quad \mathbf{q}_6(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}v_k(t)\,\eta_k(x) \tag{3.5}$$

$$\delta_5(t)=2^{1/2}\delta^p(t)\,\mathbf{p}_0{}^p(x),\quad \delta_6(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k{}^6(t)\,\eta_k(x),\quad \delta_k{}^6(t)=2^{1/2}\delta^l(t)\,\overset{l}{c}_{0(k)}$$

$$\alpha_5(t)x=0,\quad \alpha_6(t)x=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k{}^6(t)\,\eta_k(x),\quad \alpha_k{}^6(t)=(2/3)^{1/2}\,\alpha^i(t)\,\overset{i}{c}_{1(k)}$$

$$\mathbf{g}_5(x,t)=g_0{}^p(t)\,\mathbf{p}_0{}^p(x),\quad \mathbf{g}_6(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}g_k{}^6(t)\,\eta_k(x)$$

Из (1.5), (1.6), и (3.1)—(3.5) аналогично предыдущему получим

$$v_k(t)=(\mathbf{I}^*+\mathbf{R}_k{}^*)\{[\alpha_k{}^6(t)+\delta_k{}^6(t)-g_k{}^6(t)-$$
$$-(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_2{}^*)\,v_0{}^p(t)C_k{}^p]/[c(t)+\gamma_k]\}\quad (k=1,\ldots,\infty)$$

$$\mathbf{R}_k{}^*v(t)=\int_{\tau_0}^{t}v(\tau)R_k{}^2(t,\tau)\,d\tau,\quad t\in[\tau_0,\tau^*]$$

$$C_k{}^p=r_{00}{}^{lp}\,\overset{l}{c}_{0(k)}+\sum_{m=1}^{\infty}r_{m0}{}^{ip}\,\overset{i}{c}_{m(k)},\quad v_0{}^p(t)=2^{-1/2}p^p(t)$$

$$p^l(t)=2^{1/2}\sum_{k=1}^{\infty}v_k(t)c_{0(k)}^{l},\quad m^i(t)=(^2/_3)^{1/2}\sum_{k=1}^{\infty}v_k(t)c_{1(k)}^{i}$$

$$\delta^p(t)=2^{-1/2}\left\{c(t)\,(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_1^*)\,v_0^p(t)+\right.$$

$$\left.+(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_2^*)\left[r_{00}^{pq}v_0^q(t)+\sum_{h=1}^{\infty}v_k(t)C_k^p\right]+g_0^p(t)\right\}$$

где $R_k^2(t,\tau)$ — резольвента ядра $K_k^\circ(t,\tau,\gamma_k)$.

4. Рассмотрим случай, когда на всех штампах заданы осадки $\delta^i(t)$, на их части — углы поворотов $\alpha^l(t)$ и на части — моменты $m^p(t)$. Найдем $q^i(x,t)$, $p^i(t)$, $m^l(t)$, $\alpha^p(t)$. Тогда имеем

$$\begin{gathered}L_2([-1,1],V)=L_2([-1,1],V)_7\oplus L_2([-1,1],V)_8\\ \mathbf{d}(x)\in L_2([-1,1],V):\ \mathbf{d}(x)=\mathbf{d}_7(x)+\mathbf{d}_8(x)\\ \mathbf{d}_7(x)\in L_2([-1,1],V)_7:\ \mathbf{d}_7(x)=\mathbf{d}_1{}^p\mathbf{p}_1{}^p(x)\\ \mathbf{d}_8(x)\in L_2([-1,1],V)_8:\ \mathbf{d}_8(x)=d_1{}^l\mathbf{p}_1{}^l(x)+\sum_{s=0}^{\infty}d_{s(k)}^{i}\mathbf{p}_s{}^i(x)\ (s\neq1)\end{gathered}\tag{4.1}$$

Как и прежде, справедлива теорема 1 с заменой индексов 1, 2 на 7, 8, причем

$$\mathbf{B}_7^*\mathbf{d}(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}r_{1n}{}^{pj}\mathbf{p}_1{}^p(x)\mathbf{p}_n{}^j(\xi),\mathbf{d}(\xi)\right)\tag{4.2}$$

$$\mathbf{B}_8^*\mathbf{d}(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(r_{1n}{}^{lj}\mathbf{p}_1{}^l(x)+\sum_{m=0}^{\infty}r_{mn}{}^{ij}\mathbf{p}_m{}^i(x)\right)\mathbf{p}_n{}^j(\xi),\mathbf{d}(\xi)\right)\quad(m\neq1).$$

$$(\mathbf{B}_8^*\mathbf{d}_8(x),\ \mathbf{f}_8(x))=(\mathbf{A}^*\mathbf{d}_8(x),\ \mathbf{f}_8(x)),\quad \mathbf{d}_8(x),\ \mathbf{f}_8(x)\in L_2([-1,1],V)_8$$

Спектральная задача имеет вид

$$\mathbf{B}_8^*\chi_k(x)=\sigma_k\chi_k(x)\quad(k=0,2,\ldots,\infty)\tag{4.3}$$

где $\{\chi_k(x)\}$ — базис $L_2([-1,1],V)_8$.

Собственные вектор-функции ищем в форме (см. (4.1)):

$$\chi_k(x)=d_{1(k)}^{l}\mathbf{p}_1{}^l(x)+\sum_{s=0}^{\infty}d_{s(k)}^{i}\mathbf{p}_s{}^i(x)\quad(s\neq1)\tag{4.4}$$

Из (4.2) — (4.4) имеем систему уравнений

$$r_{11}{}^{lr}d_{1(k)}^{r}+\sum_{s=0}^{\infty}r_{1s}{}^{lj}d_{s(k)}^{j}=\sigma_k d_{1(k)}^{l}\quad(s\neq1)$$

$$r_{m1}{}^{ir}d_{1(k)}^{r}+\sum_{s=0}^{\infty}r_{ms}{}^{ij}d_{s(k)}^{j}=\sigma_k d_{m(k)}^{i}\quad(s\neq1,m\neq1)$$

Для этого случая $\mathbf{q}(x,t)=\mathbf{q}_7(x,t)+\mathbf{q}_8(x,t)$ и так далее, причем

$$\mathbf{q}_7(x,t)=w_1{}^p(t)\mathbf{p}_1{}^p(x),\quad \mathbf{q}_8(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}w_k(t)\chi_k(x)\tag{4.5}$$

$$\delta_7(t)=0,\quad \delta_8(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta_k{}^8(t)\chi_k(x),\quad \delta_k{}^8(t)=2^{1/2}\delta^l(t)\,d^l_{0(k)}$$

$$\alpha_7(t)x=(^2/_3)^{1/2}\alpha^p(t)\mathbf{p}_1{}^p(x),\quad \alpha_8(t)x=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k{}^8(t)\chi_k(x)$$

$$\alpha_k{}^8(t)=(^2/_3)^{1/2}\alpha^l(t)\,d^l_{1(k)},\quad \mathbf{g}_7(x,t)=g_1{}^p(t)\mathbf{p}_1{}^p(x)$$

$$\mathbf{g}_8(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}g_k{}^8(t)\chi_k(x)\quad (k\neq 1)$$

Тогда из (1.5), (1.6), (4.1)–(4.5) получим

$$w_k(t)=(\mathbf{I}^*+\mathbf{F}_k{}^*)\{[\delta_k{}^8(t)+\alpha_k{}^8(t)-g_k{}^8(t)-$$
$$-(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_2{}^*)w_1{}^p(t)D_k{}^p]/[c(t)+\sigma_k]\}\quad (k=0,2,\ldots,\infty)$$

$$\mathbf{F}_k{}^*w(t)=\int_{\tau_0}^{t}w(\tau)R_k{}^3(t,\tau)\,d\tau,\quad t\in[\tau_0,\tau^*]$$

$$D_k{}^p=r_{11}{}^{lp}\,d^l_{1(k)}+\sum_{m=0}^{\infty}r_{m1}{}^{ip}\,d^i_{m(k)},\quad w_1{}^p(t)=(^3/_2)^{1/2}m^p(t),$$

$$p^i(t)=2^{1/2}\sum_{k=0}^{\infty}w_k(t)\,d^i_{0(k)},\quad m^l(t)=(^2/_3)^{1/2}\sum_{k=0}^{\infty}w_k(t)\,d^l_{1(k)},$$

$$\alpha^p(t)=(^3/_2)^{1/2}\Big\{c(t)\,(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_1{}^*)\,w_1{}^p(t)+$$

$$+(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_2{}^*)\Big[r_{11}{}^{pq}w_1{}^q(t)+\sum_{k=0}^{\infty}w_k(t)D_k{}^p\Big]+g_1{}^p(t)\Big\}\quad (m\neq 1,k\neq 1)$$

где $R_k{}^3(t,\tau)$ — резольвента ядра $K_k{}^\circ(t,\tau,\sigma_k)$.

5. Пусть на всех штампах заданы моменты $m^i(t)$, на части штампов — осадки $\delta^l(t)$ и на части — силы $p^p(t)$. Найдем $q^i(x,t)$, $\alpha^i(t)$, $\delta^p(t)$ и $p^l(t)$.

Рассмотрим пространства вектор-функций

$$L_2([-1,1],V)=L_2([-1,1],V)_9\oplus L_2([-1,1],V)_{10}$$
$$\mathbf{h}(x)\in L_2([-1,1],V):\ \mathbf{h}(x)=\mathbf{h}_9(x)+\mathbf{h}_{10}(x)\tag{5.1}$$
$$\mathbf{h}_9(x)\in L_2([-1,\ 1],\ V)_9:\quad \mathbf{h}_9(x)=h_0{}^p\mathbf{p}_0{}^p(x)+h_1{}^i\mathbf{p}_1{}^i(x)$$

$$\mathbf{h}_{10}(x)\in L_2([-1,1],V)_{10}:\ \mathbf{h}_{10}(x)=h_0{}^l\mathbf{p}_0{}^l(x)+\sum_{s=2}^{\infty}h_s{}^i\mathbf{p}_s{}^i(x)$$

Здесь выполняется теорема 1 с заменой индексов 1, 2 на 9, 10, причем

$$\mathbf{B}_9{}^*\mathbf{h}(x)=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(r_{0n}{}^{pj}\mathbf{p}_0{}^p(x)+r_{1n}{}^{ij}\mathbf{p}_1{}^i(x))\mathbf{p}_n{}^j(\xi),\mathbf{h}(\xi)\Big)$$

$$\mathbf{B}_{10}{}^*\mathbf{h}(x)=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(r_{0n}{}^{lj}\mathbf{p}_0{}^l(x)+\sum_{m=2}^{\infty}r_{mn}{}^{ij}\mathbf{p}_m{}^i(x))\mathbf{p}_n{}^j(\xi),\mathbf{h}(\xi)\Big)\tag{5.2}$$

$$(\mathbf{B}_{10}{}^*\mathbf{h}_{10}(x),\ \mathbf{f}_{10}(x))=(\mathbf{A}^*\mathbf{h}_{10}(x),\ \mathbf{f}_{10}(x)),\quad \mathbf{h}_{10}(x),\ \mathbf{f}_{10}(x)\in L_2([-1,1],V)_{10}$$

Для спектральной задачи имеем (см. (5.1), (5.2)):

$$\mathbf{B}_{10}^*\zeta_k(x)=\varepsilon_k\zeta_k(x) \quad (k=2,\ldots,\infty)$$

$$\zeta_k(x)=y_{0(k)}^{l}\mathbf{p}_0^{\ l}(x)+\sum_{s=2}^{\infty} y_{s(k)}^{i}\mathbf{p}_s^{\ i}(x) \tag{5.3}$$

$$r_{00}^{\ lr}y_{0(k)}^{r}+\sum_{n=2}^{\infty} r_{0n}^{\ lj}y_{n(k)}^{j}=\varepsilon_k y_{0(k)}^{l}$$

$$r_{m0}^{\ ir}y_{0(k)}^{r}+\sum_{n=2}^{\infty} r_{mn}^{\ ij}y_{n(k)}^{j}=\varepsilon_k y_{m(k)}^{i} \qquad (m=2,\ldots,\infty)$$

где $\{\zeta_k(x)\}$ — базис $L_2([-1,1],V)_{10}$.

Представим решение в виде суммы двух вектор-функций с индексами 9 и 10, тогда

$$\mathbf{q}_9(x,t)=Y_0^{\ p}(t)\,\mathbf{p}_0^{\ p}(x)+Y_1^{\ i}(t)\,\mathbf{p}_1^{\ i}(x), \qquad \mathbf{q}_{10}(x,t)=\sum_{k=2}^{\infty} Y_k(t)\,\zeta_k(x)$$

$$\boldsymbol{\delta}_9(t)=(^2/_3)^{1/2}\alpha^i(t)\,\mathbf{p}_1^{\ i}(x), \qquad \boldsymbol{\delta}_{10}(t)=\sum_{k=2}^{\infty}\delta_k^{\ 10}(t)\,\zeta_k(x), \qquad \delta_k^{\ 10}(t)=2^{1/2}\delta^l(t)\,y_{0(k)}^{l}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_9(t)x=(^2/_3)^{1/2}\alpha^i(t)\,\mathbf{p}_1^{\ i}(x), \quad \boldsymbol{\alpha}_{10}(t)=\mathbf{0} \tag{5.4}$$

$$\mathbf{g}_9(x,t)=g_0^{\ p}(t)\,\mathbf{p}_0^{\ p}(x)+g_1^{\ i}(t)\,\mathbf{p}_1^{\ i}(x), \qquad \mathbf{g}_{10}(x,t)=\sum_{k=2}^{\infty} g_k^{\ 10}(t)\,\zeta_k(x)$$

Из (1.5), (1.6) с учетом (5.1)—(5.4) получим

$$Y_k(t)=(\mathbf{I}^*+\mathbf{H}_k^*)\,\{[\delta_k^{\ 10}(t)-g_k^{\ 10}(t)-(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_2^*)\,(Y_0^{\ p}(t)\,H_{k(1)}^{p}+Y_1^{\ i}(t)\,H_{k(2)}^{i})\,]/$$
$$/[c(t)+\varepsilon_k]\} \qquad (k=2,\ldots,\infty)$$

$$\mathbf{H}_k^*Y(t)=\int_{\tau_0}^{t} Y(\tau)\,R_k^{\ 4}(t,\tau)\,d\tau, \qquad t\in[\tau_0,\tau^*]$$

$$H_{k(1)}^{p}=r_{00}^{\ lp}y_{0(k)}^{l}+\sum_{m=2}^{\infty} r_{m0}^{\ ip}y_{m(k)}^{i}, \qquad H_{k(2)}=r_{01}^{\ lj}y_{0(k)}^{l}+\sum_{m=2}^{\infty} r_{m1}^{\ ij}y_{m(k)}^{i}$$

$$Y_0^{\ p}(t)=2^{-1/2}p^p(t), \qquad Y_1^{\ i}(t)=(^3/_2)^{1/2}m^i(t), \qquad p^l(t)=2^{1/2}\sum_{k=2}^{\infty} Y_k(t)\,y_{0(k)}^{l}$$

$$\delta^p(t)=2^{-1/2}\Big\{c(t)\,(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_1^*)\,Y_0^{\ p}(t)+(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_2^*)\,\Big[r_{00}^{\ pq}Y_0^{\ q}(t)+r_{01}^{\ pj}Y_1^{\ j}(t)+$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty} Y_k(t)\,H_{k(1)}^{p}\Big]+g_0^{\ p}(t)\Big\}$$

$$\alpha^i(t)=(^3/_2)^{1/2}\Big\{c(t)\,(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_1^*)\,Y_1^{\ i}(t)+(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_2^*)\Big[r_{10}^{\ iq}Y_0^{\ q}(t)+r_{11}^{\ ij}Y_1^{\ j}(t)+$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty} Y_k(t)\,H_{k(2)}^{i}\Big]+g_1^{\ i}(t)\Big\}$$

где $R_k^{\ 4}(t,\tau)$ — резольвента ядра $K_k^{\circ}(t,\tau,\varepsilon_k)$.

6. Наконец, обратимся к случаю, когда на части штампов заданы осадки $\delta^l(t)$ и моменты $m^l(t)$, а на части — силы $p^p(t)$ и углы поворотов $\alpha^p(t)$. Требуется определить $\delta^p(t)$, $m^p(t)$, $p^l(t)$, $\alpha^l(t)$.

Аналогично предыдущему рассмотрим пространства вектор-функций

$$L_2([-1,1],V)=L_2([-1,1],V)_{11}\oplus L_2([-1,1],V)_{12}$$
$$\mathbf{f}(x)\in L_2([-1,1],V):\ \mathbf{f}(x)=\mathbf{f}_{11}(x)+\mathbf{f}_{12}(x)$$
$$\mathbf{f}_{11}(x)\in L_2([-1,1],V)_{11}:\ \mathbf{f}_{11}(x)=f_0{}^p\mathbf{p}_0{}^p(x)+f_1{}^l\mathbf{p}_1{}^l(x) \tag{6.1}$$
$$\mathbf{f}_{12}(x)\in L_2([-1,1],V)_{12}:\ \mathbf{f}_{12}(x)=f_0{}^l\mathbf{p}_0{}^l(x)+f_1{}^p\mathbf{p}_1{}^p(x)+\sum_{n=2}^{\infty}f_n{}^i\mathbf{p}_n{}^i(x)$$

В этом случае теорема 1 имеет место при замене индексов 1, 2 на 11, 12, где

$$\mathbf{B}_{11}{}^*\mathbf{f}(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(r_{0n}{}^{pj}\mathbf{p}_0{}^p(x)+r_{1n}{}^{lj}\mathbf{p}_1{}^l(x))\mathbf{p}_n{}^j(\xi),\mathbf{f}(\xi)\right) \tag{6.2}$$

$$\mathbf{B}_{12}{}^*\mathbf{f}(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(r_{0n}{}^{lj}\mathbf{p}_0{}^l(x)+r_{1n}{}^{pj}\mathbf{p}_1{}^p(x)+\sum_{m=2}^{\infty}r_{mn}{}^{ij}\mathbf{p}_m{}^i(x)\right)\mathbf{p}_n{}^j(\xi),\mathbf{f}(\xi)\right)$$

и, кроме того

$(\mathbf{B}_{12}{}^*\mathbf{f}_{12}(x),\mathbf{g}_{12}(x))=(\mathbf{A}^*\mathbf{f}_{12}(x),\mathbf{g}_{12}(x)),\quad \mathbf{f}_{12}(x);\ \mathbf{g}_{12}(x)\in L_2([-1,1],V)_{12}$

Спектральная задача, используемая при решении, имеет вид (см. (6.1), (6.2)):

$$\mathbf{B}_{12}{}^*\varkappa_k(x)=\Delta_k\varkappa_k(x)\quad (k=2,\dots,\infty) \tag{6.3}$$

$$\varkappa_k(x)=s^{\,l}_{0(k)}\mathbf{p}_0{}^l(x)+s^{\,p}_{1(k)}\mathbf{p}_1{}^p(x)+\sum_{n=2}^{\infty}s^{\,i}_{n(k)}\mathbf{p}_n{}^i(x)$$

$$r_{00}{}^{lr}s^{\,r}_{0(k)}+r_{01}{}^{lq}s^{\,q}_{1(k)}+\sum_{n=2}^{\infty}r_{0n}{}^{lj}s^{\,j}_{n(k)}=\Delta_k s^{\,l}_{0(k)}$$

$$r_{10}{}^{pr}s^{\,r}_{0(k)}+r_{11}{}^{pq}s^{\,q}_{1(k)}+\sum_{n=2}^{\infty}r_{1n}{}^{pj}s^{\,j}_{n(k)}=\Delta_k s^{\,p}_{1(k)}$$

$$r_{m0}{}^{ir}s^{\,r}_{0(k)}+r_{m1}{}^{iq}s^{\,q}_{1(k)}+\sum_{n=2}^{\infty}r_{mn}{}^{ij}s^{\,j}_{n(k)}=\Delta_k s^{\,i}_{m(k)}\qquad (m=2,\dots,\infty)$$

где $\{\varkappa_k(x)\}$ — базис $L_2([-1,1],V)_{12}$.

Как прежде, представим решение в виде суммы двух вектор-функций с индексами 11 и 12:

$$\mathbf{q}_{11}(x,t)=\theta_0{}^p(t)\mathbf{p}_0{}^p(x)+\theta_1{}^l(t)\mathbf{p}_1{}^l(x),\qquad \mathbf{q}_{12}(x,t)=\sum_{k=2}^{\infty}\theta_k(t)\varkappa_k(x)$$

$$\boldsymbol{\delta}_{11}(t)=2^{1/2}\delta^p(t)\mathbf{p}_0{}^p(x),\qquad \boldsymbol{\delta}_{12}(t)=\sum_{k=2}^{\infty}\delta_k{}^{12}(t)\varkappa_k(x),\qquad \delta_k{}^{12}(t)=2^{1/2}\delta^l(t)s^{\,l}_{0(k)}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{11}(t)x=(2/3)^{1/2}\alpha^l(t)\mathbf{p}_1{}^l(x),\qquad \boldsymbol{\alpha}_{12}(t)x=\sum_{k=2}^{\infty}\alpha_k{}^{12}(t)\varkappa_k(x), \tag{6.4}$$
$$\alpha_k{}^{12}(t)=(2/3)^{1/2}\alpha^p(t)s_{1(k)}$$

$$\mathbf{g}_{11}(x,t)=g_0{}^p(t)\mathbf{p}_0{}^p(x)+g_1{}^l(t)\mathbf{p}_1{}^l(x),\qquad \mathbf{g}_{12}(x,t)=\sum_{k=2}^{\infty}g_k{}^{12}(t)\varkappa_k(x)$$

Учитывая (1.5), (1.6), (6.1)–(6.4), получим

$$\theta_k(t)=(\mathbf{I}^*+\mathbf{G}_k^*)\{[\delta_k^{12}(t)+\alpha_k^{12}(t)-g_k^{12}(t)-(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_2^*)(\theta_0^q(t)G^q_{k(1)}+$$

$$+\theta_1^r(t)G^r_{k(2)})]/[c(t)+\Delta_k]\}\qquad (k=2,\dots,\infty)$$

$$\mathbf{G}_k^*\theta(t)=\int\limits_{\tau_0}^{t}\theta(\tau)R_k^5(t,\tau)\,d\tau,\qquad t\in[\tau_0,\tau^*]$$

$$G^q_{k(1)}=r_{00}{}^{lq}s^{l}_{0(k)}+r_{10}{}^{pq}s^{p}_{1(k)}+\sum_{m=2}^{\infty}r_{m0}{}^{iq}s^{i}_{m(k)}$$

$$G^r_{k(2)}=r_{01}{}^{lr}s^{l}_{0(k)}+r_{11}{}^{pr}s^{p}_{1(k)}+\sum_{m=2}^{\infty}r_{m1}{}^{ir}s^{i}_{m(k)}$$

$$\theta_0^p(t)=2^{-1/2}p^p(t),\qquad \theta_1^l(t)=(3/2)^{1/2}m^l(t)$$

$$p^l(t)=2^{1/2}\sum_{k=2}^{\infty}\theta_k(t)s^{l}_{0(k)},\qquad m^p(t)=(2/3)^{1/2}\sum_{k=2}^{\infty}\theta_k(t)s^{p}_{1(k)}$$

$$\delta^p(t)=2^{-1/2}\Big\{c(t)(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_1^*)\theta_0^p(t)+(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_2^*)\Big[r_{00}{}^{pq}\theta_0^q(t)+$$

$$+r_{01}{}^{pr}\theta_1^r(t)+\sum_{k=2}^{\infty}\theta_k(t)G^p_{k(1)}\Big]+g_0^p(t)\Big\}$$

$$\alpha^l(t)=(3/2)^{1/2}\Big\{c(t)(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_1^*)\theta_1^l(t)+(\mathbf{I}^*-\mathbf{L}_2^*)\Big[r_{10}{}^{lq}\theta_0^q(t)+r_{11}{}^{lr}\theta_1^r(t)+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\theta_k(t)G^l_{k(2)}\Big]+g_1^l(t)\Big\}$$

где $R_k^5(t,\tau)$ — резольвента ядра $K_k^\circ(t,\tau,\Delta_k)$.

Этим случаем исчерпываются постановки контактных задач при задании различных условий на двух группах штампов системы. Индивидуальный подбор представлений решений и спектральных задач позволяет избежать решения бесконечных систем интегральных уравнений Вольтерра и получить соотношения, просто реализуемые на ЭВМ. Следует отметить, что для построения всех решений используется одна и та же информация о коэффициентах разложения $r_{mn}{}^{ij}$ тензорного ядра задачи.

Рассмотрим пример. Пусть на упругом слое толщины H, сцепленном с недеформируемым основанием, лежит без трения вязкоупругий тонкий слой толщины h. В момент τ_1 в поверхность пакета слоев начинает вдавливаться постоянными силами p_i система n гладких жестких штампов на интервалах $a_i\leqslant x\leqslant b_i$. При этом на первых n_0 штампах заданы нулевые углы поворота, т. е. создаются условия, при которых отсутствует их перекос, на остальных штампах заданы нулевые моменты, т. е. силы приложены центрально и точка их приложения не меняется. Система уравнений задачи и дополнительные условия имеют вид

$$\frac{(1-\nu_1^2)h}{E_1}\Big[q_i(x,t)+C\int\limits_{\tau_1}^{t}q_i(x,\tau)\,d\tau\Big]+\frac{2(1-\nu_2^2)}{\pi E_2}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{a_j}^{b_j}q_j(\xi,t)k\Big(\frac{x-\xi}{H}\Big)d\xi=$$

$$=\delta_i(t)+\alpha_i(t)\Big(x-\frac{a_i+b_i}{2}\Big)$$

$$\alpha_l(t)=0\,(l=1,\dots,n_0)$$

$$\int\limits_{-1}^{1}q_i(x,t)=p_i,\qquad \int\limits_{-1}^{1}q_i(x,t)x\,dx=m_i(t),\qquad m_p(t)=0\qquad (p=n_0+1,\dots,n)$$

$$(a_i \leqslant x \leqslant b_i,\ i=1,\ldots,n,\ \tau_1 \leqslant t \leqslant \infty,\ K_1(t,\tau)=-C)$$

$$k\left(\frac{x-\xi}{H}\right)=\int_0^\infty \frac{L(u)}{u}\cos\frac{x-\xi}{H}u\,du$$

$$L(u)=(2\varkappa\,\mathrm{sh}\,2u-4u)/(2\varkappa\,\mathrm{ch}\,2u+4u^2+1+\varkappa^2),\quad \varkappa=3-4\nu$$

где E_k, ν_k – модули упругости и коэффициенты Пуассона верхнего ($k=1$) и нижнего ($k=2$) слоев, $K_1(t,\tau)$ – ядро ползучести, $q_i(x,t)$, $\delta_i(t)$, $\alpha_i(t)$, $p_i(t)$, $m_i(t)$ – контактные давления, осадка, угол поворота, сила и момент для i-го штампа.

С учетом замены переменных

$$x^*=(2x-a_i-b_i)/(b_i-a_i),\ \xi^*=(2\xi-a_i-b_i)/(b_i-a_i)$$

$$\zeta_i x^*=(2x-a_i-b_i)/(b_1-a_1)\quad (a_i \leqslant x,\ \xi \leqslant b_i)$$

$$\lambda=2H/(b_1-a_1),\ \eta_j=(a_j+b_j)/(b_1-a_1),\ t^*=t\tau_1^{-1},\ \tau^*=\tau\tau_1^{-1}$$

$$\zeta_j=(b_j-a_j)/(b_1-a_1),\quad \delta^i(t^*)=2\delta_i(t)/(b_1-a_1),\ C\tau_1=C^*$$

$$k^{ij}(x^*,\xi^*)=\pi^{-1}k[(\zeta_i x^*+\eta_i-\zeta_j\xi^*-\eta_j)/\lambda]=$$

$$=\pi^{-1}k[(x-\xi)/H],\ q^i(x^*,t^*)=2q_i(x,t)(1-\nu_2^2)/E_2$$

$$c^*(t^*)=c=(1-\nu_1^2)E_2h[(1-\nu_2^2)E_1(b_1-a_1)]^{-1}$$

$$m^i(t^*)=8m_i(t)(1-\nu_2^2)/[E_2(b_i-a_i)^2]$$

$$p^i=4p_i(1-\nu_2^2)/[E_2(b_i-a_i)]$$

опуская звездочки в обозначениях, из п. 2 получим

$$\omega_0{}^i(t)=2^{-1/2}p^i,\ \omega_1{}^p(t)=0,\ \alpha_k{}^4(t)=0,\ g_k{}^4(t)=0$$

$$\omega_k(t)=-p^jB^j_{k(1)}[\sqrt{2}(c+\beta_k)]^{-1}\exp[-cCt/(c+\beta_k)]$$

и определим все искомые величины. Для больших значений времени, удерживая главные члены разложений, будем иметь

$$q^i(x,t)=p^i/2,\ m^l(t)=0,\ \alpha^p(t)=(\sqrt{3}/2)p^jr_{10}{}^{pj}/\zeta_p$$

$$\delta^i(t)=\tfrac{1}{2}[cp^i+p^jr_{00}{}^{ij}+cCp^i(t-1)]$$

т. е. напряженные состояния под штампами стремятся к равномерным, эксцентриситеты приложения сил, исключающие перекосы ($e^l(t)=m^l(t)/p^l$),– к нулю, углы поворотов под штампами с центрально-приложенными силами – к постоянным величинам, а осадки – к линейным по времени функциям.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
2. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
3. *Манжиров А. В.* Плоские и осесимметричные задачи о действии нагрузок на тонкий неоднородный вязкоупругий слой.– ПМТФ, 1983, № 5, с. 153–158.
4. *Манжиров А. В.* Осесимметричные контактные задачи для неоднородно-стареющих вязкоупругих слоистых оснований.– ПММ, 1983, т. 47, вып. 4, с. 684–693.
5. *Александров В. М., Коваленко Е. В., Манжиров А. В.* Некоторые смешанные задачи теории ползучести неоднородно-стареющих сред.– Изв. АН АрмССР. Механика, 1984, т. 37, № 2, с. 12–25.
6. *Манжиров А. В.* Об одном методе решения двумерных интегральных уравнений осесимметричных контактных задач для тел со сложной реологией.– ПММ, 1985, т. 49, вып. 6, с. 1019–1025.
7. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
8. *Талдыкин А. Т.* Векторные функции и уравнения. (С приложениями к теории управления). Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 351 с.
9. *Векуа И. Н.* Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М.: Наука, 1978. 296 с.
10. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543 с.
11. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.

Москва

Поступила в редакцию 2.VI.1986