

УДК 539.374.4

## ДАВЛЕНИЕ МЕТАЛЛА НА ВАЛКИ ПРИ ПРОДОЛЬНОЙ ПРОКАТКЕ ТРУБ

ФОМИН Л. Ф.

На основе обобщения теории течения тонкого слоя пластического вещества по поверхностям [1] на случай произвольных граничных нагрузок исследуется распределение контактных давлений при продольной прокатке тонкостенных труб на гладкой оправке.

Решение уравнений первой основной задачи теории течения, определяющих обобщенное давление в зоне обжатия стенки трубы, определяется методом последовательных приближений в виде разложения искомых функций в ряд по степеням малого параметра, в качестве которого используется эксцентриситет эллиптического калибра.

Вводится понятие критического числа, величина которого характеризует наличие или отсутствие зон прилипания в очаге деформации. Исследуется влияние параметров прокатки на положение точки приложения максимального контактного давления.

Приводятся распределения нормальных контактных давлений и формулы для полного давления металла на валок при одном частном случае распределения граничных нагрузок.

1. Тонкостенная труба начальной толщины  $h_0$  и внешнего радиуса  $R_0$  прокатывается на длинной цилиндрической недеформируемой оправке радиуса  $r$  в эллиптических калибрах двух жестких валков, вращающихся в разные стороны с угловой скоростью  $\omega$ . Поверхность оправки покрыта слоем смазки и предполагается гладкой. Принимается модель изотропной, несжимаемой, идеально жесткопластической среды.

Для зоны обжатия стенки трубы ставится первая основная задача теории течения по поверхностям [1–4]. За основную поверхность принимается цилиндрическая поверхность, ограничивающая оправку. Через  $x, \varphi$  обозначаются ортогональные, криволинейные координаты, совпадающие с линиями главных кривизн. Координатная линия  $x$  направлена по меридиану цилиндра против направления прокатки, отсчет ведется от плоскости, проходящей через оси валков. Линия  $\varphi$  — параллель цилиндра, отсчет ведется от вершины калибра к зоне выпусков. В силу симметрии рассматривается одна четвертая часть очага деформации. Половина угла охвата обозначается  $\varphi_0$ . Отрезок нормали к основной поверхности до пересечения с поверхностью валка определяет текущую толщину слоя  $h(x, \varphi)$ .

Со стороны гладкой оправки на слой действует лишь сила нормального давления  $p(x, \varphi)$ . Со стороны валка кроме нормального давления действует также касательное напряжение трения  $\tau(p)$ . Учитываются две области: область трения, где сила контактного трения меньше предела текучести на сдвиг и определяется законом Кулона  $\tau(p) = \mu p$ , и область сухого трения, где сила трения равна пределу текучести на сдвиг  $\tau(p) = \tau_s = \sigma_s/2$  ( $\mu$  — коэффициент трения скольжения,  $\sigma_s$  — предел текучести пластического материала на растяжение).

Рассматриваемая часть очага деформации занимает область  $D$ :  $0 \leq x \leq L$ ,  $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ , где  $L = [2R_*(R_0 - R)]^{1/2}$  — длина зоны обжатия,  $R_*$  — минимальный радиус валка в вершине калибра,  $R$  — высота эллиптического калибра. На границах зоны обжатия контактные давления удовлетворяют граничному условию  $p = q^{(j)} + \sigma_s$  ( $j=1, 2, 3$ ). Здесь  $q^{(1)}$ ,  $q^{(2)}$  — напряжения на передней и задней границах области  $D$ , вызванные совместным действием соседних клеток и процессами пластического формоизменения в зоне вы-

пусков,  $q^{(3)}$  — боковая нагрузка со стороны металла, находящегося в зоне выпусков (фиг. 1).

Для определения контактных давлений имеем уравнение

$$(\partial Z/\partial x)^2 + (\partial Z/r\partial \varphi)^2 = h^{-2}(x, \varphi) \quad (1.1)$$

где  $h(x, \varphi)$  — текущая толщина слоя,  $Z(x, \varphi)$  — вспомогательная функция «обобщенного давления», связанная с  $p(x, \varphi)$  формулой

$$Z(p) = \int_{q^{(j)} + \sigma_s}^p \frac{dp}{\tau(p)}$$

Поверхность контактного давления  $p(x, \varphi)$  имеет ребра, следы которых разделяют область  $D$  на три области гладкости, примыкающие, соответственно, к передней, задней и боковой границам. Контактные давления выразятся через обобщенное давление в каждой из областей гладкости ( $j=1, 2, 3$ ) в следующем виде:

в зоне кулонова трения ( $\tau = \mu p$ ):

$$p_+^{(j)} = (q^{(j)} + \sigma_s) \exp \mu Z^{(j)}, \quad p \leq \tau_s/\mu \quad (1.2)$$

в зоне прандтлева трения ( $\tau = \sigma_s/2$ ):

$$p_-^{(j)} = \tau_s \{1 + \ln [2\mu(1 + q^{(j)}/\sigma_s)] + \mu Z^{(j)}\}/\mu, \quad p > \tau_s/\mu \quad (1.3)$$

Для текущей толщины слоя принимаем выражение

$$h(x, \varphi) = R(1 - x/L)(1 - \beta^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} + R_0 x/L - r \quad (1.4)$$

где  $\beta$  — эксцентриситет эллиптического калибра. Величина  $\beta^2$  для процесса прокатки тонкостенных труб достаточно мала ( $\beta^2 < 0,1$ ) и принимается за малый параметр. При  $\beta=0$  имеем случай прокатки трубы в круглом калибре радиуса  $R$ .

2. Решение уравнения (1.1) будем искать в виде ряда

$$Z(x, \varphi) = Z_1 + \beta^2 Z_2 + \beta^4 Z_3 + \dots \quad (2.1)$$

Последовательные приближения  $Z_i$  удовлетворяют граничным условиям вида

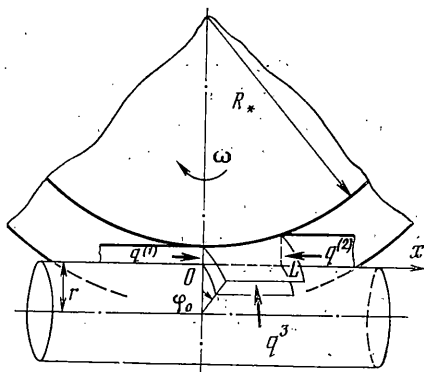
$$Z_1 = 0, \quad x=0, \quad x=L, \quad \varphi = \varphi_0 \quad (2.2)$$

$$Z_i = 0, \quad x=0, \quad x=L, \quad \varphi = 0 \quad (i=2, 3, \dots)$$

Подставляя (1.4) и (2.1) в (1.1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\beta$ , можно получить уравнения для нахождения последовательных приближений  $Z_i$ . Решая эти уравнения с граничными условиями (2.2), находим, что в каждой из областей гладкости обобщенные давления  $Z_i^{(j)}(x, \varphi)$  являются ограниченными функциями, причем  $Z_1^{(j)} > 0$ ,  $Z_2^{(j)} \leq 0$ ,  $Z_3^{(j)} \geq 0$ , ... и так далее. Подставляя  $Z_i^{(j)}(x, \varphi)$  в (2.1), видим, что ряды для  $Z^{(j)}(x, \varphi)$  равномерно сходятся по совокупности переменных  $x, \varphi$  (при  $0 \leq x \leq L$ ,  $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ ), поскольку мажорируются сходящимися знакопеременными рядами вида  $M_1^{(j)} - \beta^2 M_2^{(j)} + \beta^4 M_3^{(j)} - \dots$ , где  $M_i^{(j)} = \max |Z_i^{(j)}(x, \varphi)|$ . При этом  $M_1^{(j)} \gg \beta^2 M_2^{(j)} \gg \beta^4 M_3^{(j)} \gg \dots$ .

Численный расчет показывает, что для обычно встречающихся на практике диапазонов изменения параметров прокатки отбрасывание третьего приближения дает погрешность, не превышающую принятой при выводе основного уравнения (1.1) допустимой погрешности  $h_0/L_0$  (где  $L_0$  — характерный размер области течения).

Ограничиваясь двумя приближениями и подставляя найденные значения обобщенного давления в формулы (1.2), (1.3) и вводя предвари-



Фиг. 1

тельно вспомогательные функции граничных напряжений  $\xi=1+q^{(1)}/\sigma_s$ ,  $\eta=1+q^{(2)}/\sigma_s$ ,  $\zeta=1+q^{(3)}/\sigma_s$ , получим в каждой из областей гладкости следующие выражения для контактных давлений  $p_+^{(j)}$  в зоне кулонова трения и  $p_-^{(j)}$  в зоне прандтлева (сухого) трения:

$$p_+^{(1)} = \xi \sigma_s (X/a)^{\mu/\lambda} \exp \{ \beta^2 A \sin^2 \varphi [\ln (X/a) - Kx/(aX)] + \dots \}, \quad p \leq \tau_s/\mu \quad (2.3)$$

$$p_-^{(1)} = \tau_s \{ 1 + \ln (2\mu\xi) + (\mu/\lambda) \ln (X/a) -$$

$$- \beta^2 \mu A \sin^2 \varphi [Kx/(aX) - \ln (X/a)] + \dots \} / \mu, \quad p > \tau_s/\mu$$

$$p_+^{(2)} = \eta \sigma_s (K/X)^{\mu/\lambda} \exp \{ \beta^2 A \sin^2 \varphi [\ln (K/X) - (L-x)/X] + \dots \}, \quad p \leq \tau_s/\mu$$

$$p_-^{(2)} = \tau_s \{ 1 + \ln (2\mu\eta) + (\mu/\lambda) \ln (K/X) -$$

$$- \beta^2 \mu A \sin^2 \varphi [(L-x)/X - \ln (K/X)] + \dots \} / \mu, \quad p > \tau_s/\mu$$

$$p_+^{(3)} = \zeta \sigma_s [(Y+C)/X]^{\mu/\lambda} \exp [(\beta/r)^2 A G(x, \varphi) + \dots], \quad p \leq \tau_s/\mu$$

$$p_-^{(3)} = \tau_s \{ 1 + \ln (2\mu\zeta) + (\mu/\lambda) \ln [(Y+C)/X] -$$

$$- (\beta/r)^2 \mu A G(x, \varphi) + \dots \} / \mu, \quad p > \tau_s/\mu$$

$$\lambda = (R_0 - R)/L, \quad a = (R - r)/\lambda, \quad X = x + a$$

$$Y = r(\varphi_0 - \varphi), \quad A = R/(2\lambda^2 L), \quad K = L + a$$

$$C^2 = X^2 + Y^2, \quad H^2 = X^2 + b^2, \quad b = r\varphi_0$$

$$G(x, \varphi) = (H^2 + b^2) \{ \ln [(H+b)/X] - Kb/(HX) \} -$$

$$- (C^2 + b^2) \{ \ln [(Y+C)/X] - KY/(CX) \} + bH \{ (K/b) \arcsin (b/H) -$$

$$- 2 \ln (H/X) + 2K/X - 1 \} - bC \{ (K/b) \arcsin (Y/C) - 2 \ln (C/X) + 2K/X - Y/b \}$$

Полученные решения показывают, что контактные давления зависят от многих параметров, в том числе от неизвестных функций граничных нагрузок  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  и динамического коэффициента трения  $\mu$ .

Границы областей гладкости определяются как следы ребер поверхности контактного давления  $p(x, \varphi)$  из уравнений

$$p^{(1)} = p^{(2)}, \quad p^{(1)} = p^{(3)}, \quad p^{(2)} = p^{(3)} \quad (2.4)$$

Анализ уравнений (2.4) показывает, что процесс прокатки труб позволяет ввести критическое число, величина которого дает критерий оценки характера протекания процесса прокатки труб, распределения контактных давлений и наличия или отсутствия зон прилипания в очаге деформации.

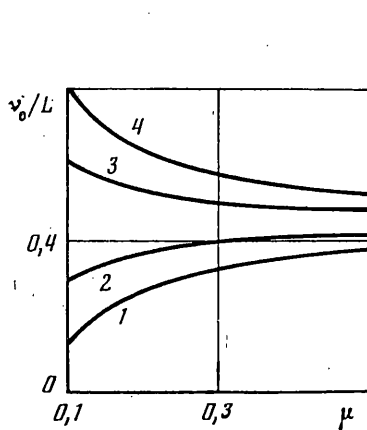
Критическое число  $F_*$  определяем выражением

$$F_* = [(\eta/\xi)^m - (1-\varepsilon)(\xi/\zeta)^{-m}]/(N\varepsilon) \quad (2.5)$$

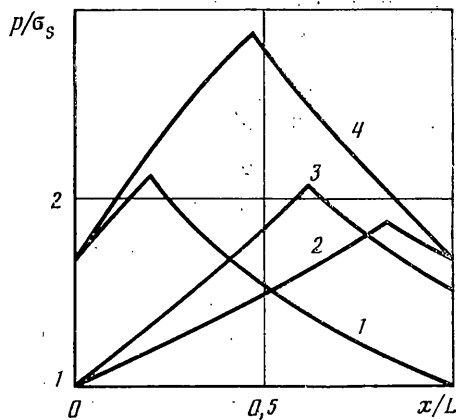
$$N = 2r\varphi_0/L, \quad m = \lambda/\mu, \quad \varepsilon = (R_0 - R)/(R_0 - r)$$

Проведенное исследование показывает, что при значениях параметров, обеспечивающих выполнение условия  $F_* \leq 1$ , все три области гладкости соприкасаются на линии  $\varphi=0$  в одной точке  $x=v_0$ , являющейся точкой сцепления, в которой продольная компонента скорости течения металла совпадает с окружной скоростью точек поверхности валка в вершине калибра. При  $F_* > 1$  области 1, 2 не соприкасаются между собой, следы ребер пересекают линию  $\varphi=0$  в двух точках  $x=v_1$  и  $x=v_2$ , так что в окрестности вершины калибра появляется участок прилипания. Анализ (2.5) показывает, что наибольшее влияние на величину критического числа  $F_*$  оказывают значения параметров  $R_*$ ,  $\varphi_0$ , некоторые сочетания функций граничных нагрузок  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , а также снижение динамического коэффициента трения  $\mu$ .

В рамках случая  $F_* \leq 1$  контактное давление  $p(x, \varphi)$  достигает максимального значения в точке  $x=v_0$ , положение которой зависит от многих



Фиг. 2



Фиг. 3

параметров. Величина  $v_0/L$  может быть представлена в виде функции

$$v_0/L = \{[(\eta/\xi)^m / (1-\varepsilon)]^{1/2} - 1\} (1/\varepsilon - 1) \quad (2.6)$$

где  $\varepsilon$  — степень обжатия стенки трубы в вершине калибра ( $0 < \varepsilon < 1$ ).

Из (2.6) видно, что при  $\xi = \eta$  величина  $v_0/L$  является функцией только  $\varepsilon$ . Однако в общем случае, при  $\xi \neq \eta$ , изменение параметров  $\sigma_s$ ,  $q^{(1)}$ ,  $q^{(2)}$ ,  $\mu$ ,  $\varepsilon$ ,  $R_*$ ,  $R_0$  вызывает изменение положения точки приложения максимального контактного давления.

В качестве примера на фиг. 2 показаны графики зависимости  $v_0/L = f(\mu)$  при  $\varepsilon = 1/3$ , численно рассчитанные для следующих значений параметров прокатки:  $r = 0,05$  м,  $R = 0,056$  м,  $R_* = 0,289$  м,  $R_0 = 0,059$  м,  $\sigma_s = \text{const}$ . Для кривой 1:  $q^{(1)} = 0$ ,  $q^{(2)} = \sigma_s/2$ ; для кривой 2:  $q^{(1)} = \sigma_s/2$ ,  $q^{(2)} = 0$ ; для кривой 3:  $q^{(1)} = 0$ ,  $q^{(2)} = 0,2 \sigma_s$ ; для кривой 4:  $q^{(1)} = 0,4 \sigma_s$ ,  $q^{(2)} = 0,2 \sigma_s$ .

В случае  $F_* > 1$  максимальное контактное давление может оказаться приложенным на линии  $\varphi = 0$  либо в точке  $x = v_1$ , либо в точке  $x = v_2$  — в зависимости от значений величин граничных нагрузок  $q^{(1)}$ ,  $q^{(2)}$ . Величины  $v_1/L$ ,  $v_2/L$  определяются выражениями

$$v_1/L = \{[1 + N\varepsilon\xi^m / (1-\varepsilon)]^{1/2} \xi^{-m} - 1\} (1/\varepsilon - 1)$$

$$v_2/L = \{[1 + N\varepsilon\eta^{-m} / (1-\varepsilon)]^{1/2} \eta^m - 1\} (1/\varepsilon - 1)$$

На фиг. 3 приведены эпюры нормальных контактных давлений в сечении  $\varphi = 0$  для приведенных выше значений параметров  $r$ ,  $R_*$ ,  $R$  и при различных значениях параметров  $\mu$ ,  $\varepsilon(R_0)$ ,  $q^{(1)}$ ,  $q^{(2)}$ . Для эпюры 1 имеем:  $\varepsilon = 1/2$ ,  $\mu = 0,15$ ,  $q^{(1)} = 2/3 \sigma_s$ ,  $q^{(2)} = 0$ ; для эпюры 2:  $\varepsilon = 1/4$ ,  $\mu = 0,15$ ,  $q^{(1)} = 0$ ,  $q^{(2)} = 2/3 \sigma_s$ ; для эпюры 3:  $\varepsilon = 1/2$ ,  $\mu = 0,15$ ,  $q^{(1)} = 0$ ,  $q^{(2)} = \sigma_s/2$ ; для эпюры 4:  $\varepsilon = 1/3$ ,  $\mu = 0,3$ ,  $q^{(1)} = q^{(2)} = 2/3 \sigma_s$ .

Границы между зонами кулонова и прандтлева трения в каждой из областей гладкости с помощью выражений (2.3) находятся из условия  $p = \tau_s/\mu$ .

### 3. Полное давление металла на один из валков при прокатке трубы

запишется в виде  $P = 2 \iint_D p(x, \varphi) r d\varphi dx$  (интегрирование проводится по области  $D$ ).

Границы областей гладкости и границы между зонами кулонова и прандтлева трения делят область течения  $D$  на шесть подобластей, в которых контактные давления  $p(x, \varphi)$  определяются выражениями (2.3). В качестве примера приведем формулы для полного давления, вычисленные для частного случая  $q^{(1)} = q^{(2)} = q^{(3)} = q$ . Учитывая только первое приближение и вводя обозначение  $\delta = 1 + q/\sigma_s$ , после необходимых вычислений для полного давления  $P$  металла на валок получим следующие формулы:

$$P = \sigma_s (L/\varepsilon)^2 \{ (1-\varepsilon)^2 A_1^{(i)} + A_2^{(i)} + 1/2 N\varepsilon [ (1-\varepsilon) A_3^{(i)} + A_4^{(i)} ] + \\ + (1/3 - N) (1-\varepsilon)^{1/2} \varepsilon / \lambda \} \quad (F_* \leq 1)$$

$$P = \sigma_s (L/\varepsilon)^2 \{ (1-\varepsilon)^2 A_1^{(i)} + A_2^{(i)} + 1/2 N\varepsilon [ (1-\varepsilon) A_3^{(i)} + A_4^{(i)} ] + \\ + 1/6 (1 - 5/2 N\varepsilon) (1 - N\varepsilon)^{1/2} / \lambda - 1/6 (1-\varepsilon)^{1/2} [ 1 + \varepsilon (5/2 N - 1) ] [ 1 + (N-1) \varepsilon ]^{1/2} / \lambda + \\ + [(N\varepsilon)^2 / (8\lambda)] \ln \{ (1-\varepsilon)^{-1} [ 1 - 1/2 N\varepsilon + (1 - N\varepsilon)^{1/2} ] / [ 1 + 1/2 N\varepsilon / (1-\varepsilon) + \\ + (1 + N\varepsilon / (1-\varepsilon))^{1/2} ] \} \} \quad (F_* > 1) \quad (i = 1-4) \quad (3.1)$$

Верхние индексы у коэффициентов в выражениях (3.1) соответствуют четырем различным соотношениям между параметрами  $\delta$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ . Так, при  $\mu \neq \lambda$ ,  $\mu \neq 3\lambda$ ,  $2\delta\mu < 1$  имеем  $i=1$ ; для  $\mu=\lambda$ ,  $2\delta\mu < 1$ :  $i=2$ ; для  $\mu=3\lambda$ ,  $2\delta\mu < 1$ :  $i=3$ ; при  $2\delta\mu \geq 1$  и любых  $\lambda$ ,  $\mu$  имеем  $i=4$ . Соответствующие коэффициенты имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A_1^{(1)} &= [12\delta\lambda^2\mu + 3\mu(\mu + 3\lambda)(2\delta\mu)^{-m} - \\ &\quad - \mu(\mu + \lambda)(2\delta\mu)^{-3m}] / [12\lambda(\mu + \lambda)(\mu + 3\lambda)] \\ A_2^{(1)} &= [\mu(\mu - \lambda)(2\delta\mu)^{3m} - 3\mu(\mu - 3\lambda)(2\delta\mu)^m - \\ &\quad - 12\delta\lambda^2\mu] / [12\lambda(\mu - \lambda)(\mu - 3\lambda)] \\ A_3^{(1)} &= [\mu(2\delta\mu)^{-m} - 2\delta\lambda^2] / [\lambda(\mu + \lambda)], \\ A_4^{(1)} &= [\mu(2\delta\mu)^m - 2\delta\lambda^2] / [\lambda(\mu - \lambda)] \\ A_1^{(2)} &= 1/24\delta[6(2\delta\lambda)^{-2} - (2\delta\lambda)^{-4} + 3], \\ A_2^{(2)} &= 1/12\delta[6\ln(2\delta\lambda) - (2\delta\lambda)^2 - 3] \\ A_3^{(2)} &= \delta[(2\delta\lambda)^2 - 1], \quad A_4^{(2)} = 2\delta[2 - \ln(2\delta\lambda)], \\ A_1^{(3)} &= 1/8\delta[9(6\delta\lambda)^{-4/3} - 2(6\delta\lambda)^{-2} + 1] \\ A_2^{(3)} &= 1/4\delta[5 - 9(6\delta\lambda)^{-2/3} - 2\ln(6\delta\lambda)], \\ A_3^{(3)} &= 1/2\delta[9(6\delta\lambda)^{-4/3} - 1], \quad A_4^{(3)} = \delta[9(6\delta\lambda)^{-2/3} - 1] \\ A_1^{(4)} &= -A_2^{(4)} = 1/(6\lambda), \quad A_3^{(4)} = 1/\lambda - [1 + \ln(2\delta\mu)]/\mu, \\ A_4^{(4)} &= 1/\lambda + [1 + \ln(2\delta\mu)]/\mu \end{aligned}$$

Например, принимая приведенные выше значения параметров  $r$ ,  $R_*$ ,  $K$  и считая  $\sigma_s = 120$  МПа,  $\varepsilon = 1/4$ ,  $\mu = 0,3$ ,  $\varphi_0 = 1$  рад,  $q = 2/3\sigma_s$ , получим  $P = 0,9$  МН, а среднее удельное давление  $p_* = 310$  МПа.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Вопросы теории течения пластического вещества по поверхностям. — ПММ, 1954, т. 18, вып. 3, с. 265–288.
2. Ильюшин А. А. Полная пластичность в процессах течения между жесткими поверхностями, аналогия с песчаной насыпью и некоторые приложения. — ПММ, 1955, т. 19, вып. 6, с. 693–713.
3. Арутюнов Ю. С. Прокатка тонкого листа. — Вестн. МГУ. Сер. математики, механики, астрономии, физики, химии, 1957, № 4, с. 17–28.
4. Кийко И. А. Теория пластического течения. М.: Изд-во МГУ, 1978. 75 с.

Москва

Поступила в редакцию  
23.I.1985