

УДК 539.374

ОБ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЯХ ВЯЗКОУПРУГОСТИ И ВЯЗКОПЛАСТИЧНОСТИ

ШАРАФУТДИНОВ Г. З.

Проблема определяющих соотношений, т. е. соотношений связи между напряжениями и деформациями, для вязкопластических материалов существенно осложняется необходимостью совместного учета влияния времени и параметров процессов нагружения и деформирования на напряженно-деформированное состояние. Наиболее общий подход к установлению практически используемых определяющих соотношений в механике деформируемого твердого тела в настоящее время заключается в том, что напряжения и деформации связываются при помощи некоторого оператора. Известны общие формы представления линейных операторов в метрических пространствах [1], и поэтому можно с уверенностью констатировать, что в линейной механике определяющие соотношения могут быть легко установлены.

В нелинейном случае эта задача значительно труднее, в немалой степени из-за отсутствия конструктивных форм нелинейных операторов. Один из основных способов вывода нелинейных определяющих соотношений заключается в постулировании аналитичности нелинейного оператора, его разложении в ряд, аналогичный ряду Тейлора [2], и выделении основных членов разложения. Такой подход является, безусловно, плодотворным; в частности, он позволяет сформулировать определяющие соотношения некоторых нелинейных теорий вязкоупругости [3]. Вместе с тем этот подход несколько ограничен, так как не позволяет описать возможное нарушение аналитичности процесса деформирования.

Основываясь на конечной форме представления разложения нелинейного оператора связи между напряжениями и деформациями [4, 5] и используя понятия кусочной линейности и кусочной аналитичности, получены определяющие соотношения вязкопластичности, используемые для описания поведения поликарбоната [6] и алюминиевого сплава Д16 [7].

1. Наиболее общим представлением связи между напряжениями σ_{ij} и деформациями ε_{ij} являются выражения вида [8]:

$$\sigma_{ij} = \sum_0^t \int_0^t \dots \int_0^t \Gamma_{ij i_1 j_1 \dots i_n j_n}(t, \tau_1, \dots, \tau_n) \cdot \varepsilon_{i_1 j_1}(\tau_1) \dots \varepsilon_{i_n j_n}(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (1.1)$$

где t — время, $\Gamma_{ij i_1 j_1 \dots i_n j_n}$ — ядра, представляющие собой тензоры $2(n+1)$ порядка. В общем случае разложение (1.1) может иметь бесконечное число членов. Выражение (1.1) использовать не целесообразно как из-за необходимости многократного интегрирования, так и из-за большого числа входящих в него экспериментально определяемых ядер. Практический интерес представляют конечные формы определяющих соотношений, содержащих небольшое количество материальных функций, такие, как соотношения главной квазилинейной теории и ее частного случая — главной кубической теории [3]. С их помощью в [6] описывается поведение оптически чувствительного вязкоупругого материала — поликарбоната — при одноосном растяжении в условиях ползучести; установлено, что эти теории применимы лишь при определенных уровнях напряжений, не превосходящих некоторого значения σ^0 . Является ли ограниченность данных теорий следствием использования ограниченного числа членов разложения вида (1.1) или она происходит из-за каких-то более общих причин? Непосредственное решение этого вопроса связано с увеличением числа членов разложения в определяющих соотношениях, что приведет в конеч-

ном итоге к неограниченному увеличению числа используемых материальных функций и невозможности практического использования разложений вида (1.1).

Однако этот вопрос может быть решен и несколько иначе, что связано с существованием более компактного представления разложения (1.1), которое в одномерном случае имеет вид [4] (α — некоторый малый параметр):

$$\sigma(t) = \int_0^t \Gamma(t, \tau) \varepsilon(\tau) \left[1 - \alpha \int_0^{\tau} q(\tau, \tau_1) \varepsilon(\tau_1) d\tau_1 \right]^{-1} d\tau \quad (1.2)$$

Обратное к нему соотношение запишем в виде (при этом считаем, что малый параметр включен в ядро K_1):

$$\varepsilon(t) = \int_0^t K(t, \tau) \sigma(\tau) \left[1 - \int_0^{\tau} K_1(\tau, \tau_1) \sigma(\tau_1) d\tau_1 \right]^{-1} d\tau \quad (1.3)$$

Проиллюстрируем методику определения материальных функций, входящих в соотношение (1.3), при помощи конкретных данных, полученных в экспериментах на ползучесть образцов из поликарбоната и использованных при оценке применимости главной квазилинейной и главной кубической теории [6]. При невысоких уровнях напряжений, когда зависимость между напряжениями и деформациями линейна, величина внутреннего функционала полагается равной нулю. Отсюда следует, что ядро $K(t, \tau)$ определяется как ядро ползучести в линейной теории вязкоупругости. В частности, для стабильных материалов ядро K является разностным и его определение в данном случае не вызывает затруднений.

При наличии мгновенной линейной упругости ядро $K(t, \tau)$ может быть представлено в виде суммы сингулярной и регулярной составляющих [3]: $K(t, \tau) = \delta(t - \tau)/2G + K^0(t, \tau)$, где G — модуль сдвига, $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, $K^0(t, \tau)$ — регулярная функция. Ядро $K_1(\tau, \tau_1)$ не должно при этом содержать сингулярной составляющей — в противном случае соотношение (1.3) не дает возможности описать мгновенную линейную упругость.

Таким образом, для стабильного, мгновенно линейно-упругого материала соотношение (1.3) может быть приведено в виду

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t - \tau) d[f(\tau) \sigma(\tau)], \quad f(\tau) = \left[1 - \int_0^{\tau} K_1(\tau, \tau_1) \sigma(\tau_1) d\tau_1 \right]^{-1} \quad (1.4)$$

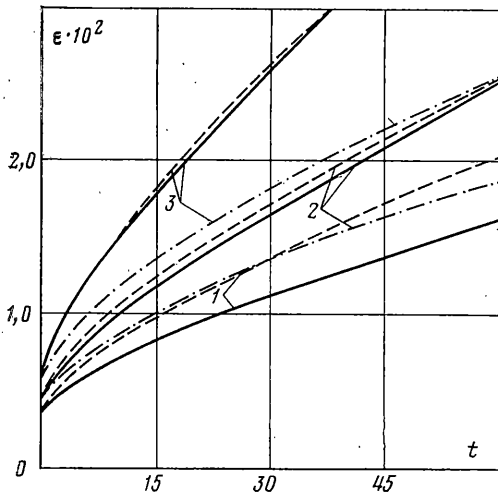
Если задать закон изменения напряжения при помощи функции Хевисайда $h(t)$: $\sigma(t) = \sigma_0 h(t)$, где $\sigma_0 = \text{const}$, то из (1.4) получим

$$J = \int_0^t K_1(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau = 1 - \Pi(t) \left[\frac{\sigma_0}{\varepsilon(t)} \right]_n \quad (1.5)$$

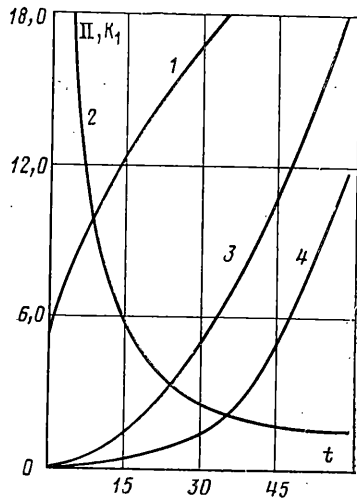
где индекс n означает, что эксперимент проведен при таком значении σ_0 , при котором поведение материала можно охарактеризовать как физически нелинейное.

Оценка линейности функционала (1.5), определение функции ползучести и ядра K_1 выполняется при помощи данных, полученных при одноосном растяжении образцов из поликарбоната при $T = 140^\circ \text{C}$. Экспериментальные зависимости деформаций ε от времени t (м) при $\sigma_0 = 6,74; 8,12; 10,97$ МПа приведены на фиг. 1 (сплошные кривые 1-3) и при $\sigma_0 = 11,37; 12,22; 13,11; 13,51$ МПа — на фиг. 4 (сплошные кривые 1-4). Отметим, что некоторые из этих зависимостей приведены в табличном виде в [6].

Линейность механического поведения поликарбоната при указанной температуре сохраняется до 6,5–7,0 МПа. Линейная функция ползучести $\Pi(t) \cdot 10^4$ (МПа) $^{-1}$ в зависимости от времени t приведена на фиг. 2 (кривая 1). Значения функционала J ,



Фиг. 1



Фиг. 2

входящего в соотношение (1.5), определенные, для примера, при $t=30$ м, представлены ниже

$\sigma_0=7,54$	8,12	9,60	10,97	11,37	12,22	13,11	13,51
$J=0,0158$	0,0182	0,0243	0,0295	0,0374	0,0431	0,0532	0,0718

Из этих данных следует, что линейность внутреннего функционала в соотношении (1.3) зависит от напряжения σ_0 линейно вплоть до $\sigma_0=10,97$ МПа. При превышении этого значения линейность внутреннего функционала в (1.3) нарушается, что связано с нарушением справедливости представления вида (1.1) [2]. Именно при этом значении напряжения σ_0 происходит нарушение справедливости главной квазилинейной и главной кубической теории вязкоупругости [6].

Исходя из изложенного можно заключить, что ограниченность применения главной квазилинейной теории не связана с недостаточным числом используемых членов разложения, а происходит вследствие более общих причин, одной из которых может являться нарушение аналитичности исходного нелинейного оператора связи между напряжениями и деформациями [9]. Это обстоятельство приводит к нарушению справедливости как разложения (1.1), так и представлений (1.2) и (1.3).

Исследуемый материал — поликарбонат — используется в методе фотопластичности, при изучении процессов необратимого пластического деформирования поляризационно-оптическим методом. Это является основанием предположения о связи нарушения справедливости представлений (1.2), (1.3) с возникновением необратимых пластических деформаций и, как следствие этого, нарушение аналитичности оператора связи между напряжениями и деформациями — с возникновением пластических деформаций.

При помощи экспериментальных данных определим ядро $K_1(t, \tau)$, для чего примем его зависимость от аргументов в следующем виде:

$$K_1(t, \tau) = K_1[(t-t^0) - \tau] \quad (1.6)$$

Это предположение основывается на следующем: материал является стабильным и его свойства, в том числе и в области физической нелинейности, не зависят от начала отсчета времени. Можно также заключить, что при монотонном увеличении нагрузки (начиная от ненапряженного состояния) поведение материала станет физически нелинейным при некотором, отличном от нуля моменте времени t^0 . При $t < t^0$ необходимо в этом случае исключить действие внутреннего функционала в (1.3), что и обеспечивается отрицательным значением аргумента в (1.6).

Исходя из представления (1.6) и используя соотношение (1.5), при $\sigma_0 \leq 10,97$ МПа можно вычислить значение ядра K_1 для фиксированных моментов времени. График ядра $K_1 \cdot 10^4$ (МПа·мин)⁻¹ в зависимости от времени t (мин) приводится на фиг. 2 (кривая 2). Расчетные зависимости

деформаций ε (%) от времени t , определенные соотношениями (1.4), при $\sigma_0=6,74; 8,12; 10,97$ МПа представлены штриховыми линиями с соответствующими номерами на фиг. 1. Штрихпунктирными линиями с номерами 2 и 3 отмечены зависимости $\varepsilon \sim t$ при $\sigma_0=8,12$ и $10,97$ МПа, вычисленные при помощи линейных определяющих соотношений. Аналогичная расчетная зависимость для $\sigma_0=6,74$ МПа практически совпадает с экспериментальной и потому здесь не приводится.

В общем случае представление ряда (1.1) в конечной форме, полученное в [5], имеет вид

$$\sigma_{ij} = \int_0^t A_{ijklmn}(t, \tau) \varepsilon_{kl}(\tau) p_{mn}(t, \tau) d\tau; \quad (1.7)$$

$$p_{mn} = \left[\delta_{mn} - \alpha \int_0^{\tau} q_{mnpq}(t, \tau_1) \varepsilon_{pq}(\tau_1) d\tau_1 \right]^{-1}$$

Здесь A_{ijklmn} , q_{mnpq} — компоненты тензоров ядер релаксации шестого и четвертого рангов соответственно, α — некоторый малый параметр, символом $[]^{-1}$ обозначается тензор, обратный тензору, заключенному в квадратные скобки. Обращение в нуль параметра α приводит соотношения (1.7) к соотношениям линейной теории вязкоупругости анизотропных тел [3].

Следует отметить, что соотношения вида (1.3) не являются универсальными. Так, например, при исследовании механических свойств алюминиевого сплава Д16 при $T=300^\circ\text{C}$ [7] существует область линейного поведения материала, ограниченная определенным значением напряжения. Вместе с тем при использовании соотношения (1.4) в области физической нелинейности не удается установить линейную зависимость внутреннего функционала от напряжений. Это не позволяет использовать выражение (1.3) для описания физически нелинейного поведения этого материала. Для этой цели предложены другие соотношения [10], которые рассматриваются в п. 2.

2. Введем обобщенный линейный элемент, поведение которого описывается интегральным соотношением Больцмана — Вольтерры

$$\varepsilon = \int_0^t K(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau \quad (2.1)$$

Простейшая модель вязкопластического тела на основе обобщенного линейного элемента составляется из двух последовательно соединенных частей: первая является обобщенным элементом, вторая состоит из параллельно соединенного с элементом Сен-Венана [11] обобщенного элемента. Механическое поведение такой модели является вязкоупругим при значениях напряжений, не превышающих значения предела текучести σ_s , определяемого элементом Сен-Венана. При напряжениях $\sigma \geq \sigma_s$ деформации определяются суммированием деформаций обеих частей описываемой модели. Определяющее соотношение для стабильного вязкопластического материала, характеризуемого такой моделью, можно записать в следующем виде:

$$\varepsilon = \int_0^t K_1(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau + \int_{t_1}^t K_2(t-\tau) [\sigma(\tau) - \sigma_s] d\tau \quad (2.2)$$

Считая, что процесс нагружения начинается при $t=0$, положим нижний предел интегрирования во втором интеграле равным $t_1 \geq 0$ (момент t_1 определяется из решения уравнения $\sigma(t) = \sigma_s$). Предположим, что ядра K_1 и K_2 состоят из сингулярных и регулярных слагаемых: $K_i(t-\tau) = \delta(t-\tau)/2G_i + K_i^0(t-\tau)$ ($i=1, 2$). Наличие сингулярной составляющей вида δ -функции в ядре K_1 определяет мгновенную линейную упругость, в ядре K_2 — мгновенное линейное упрочнение.

Полагая $K_i^0 = d\Pi_i^0/dt$ ($i=1, 2$) и считая, что $\Pi_i^0(t) \equiv 0$ при $t < 0$, приведем соотношение (2.2) к виду

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi_1^0(t-\tau) d\sigma(\tau) + \int_{t_1}^t \Pi_2^0(t-\tau) d[\sigma(\tau) - \sigma_s] \quad (2.3)$$

В соответствии со структурой модели при $\sigma < \sigma_s$ в соотношении (2.3) используется только первый интеграл; при $\sigma \geq \sigma_s$ — оба слагаемые. При практическом применении соотношения (2.3) необходимо по экспериментальным данным, например при помощи кривых ползучести, определить две функции $\Pi_1^0(t)$ и $\Pi_2^0(t)$ и один параметр σ_s . Для этого вначале устанавливается область линейного поведения материала и на основании соответствующих экспериментальных данных определяется первая функция ползучести. При известной функции $\Pi_1^0(t)$ из соотношения (2.3) имеем

$$\int_{t_1}^t \Pi_2^0(t-\tau) d[\sigma(\tau) - \sigma_s] = \varepsilon(t) - \int_0^t \Pi_1^0(t-\tau) d\sigma(\tau) \quad (2.4)$$

Для вычисления $\Pi_2^0(t)$ и σ_s для любого фиксированного момента времени необходимо использовать экспериментальные данные на ползучесть при двух уровнях напряжений $\sigma_{01} > \sigma_s$ и $\sigma_{02} > \sigma_s$ ($\sigma_{01} \neq \sigma_{02}$), задаваемых при помощи функции Хевисайда $h(t)$: $\sigma(t) = \sigma_{01}h(t)$; $\sigma(t) = \sigma_{02}h(t)$. При этом из (2.4) имеем

$$\Pi_2^0(t)(\sigma_{0i} - \sigma_s) = \varepsilon_i(t) - \Pi_1^0(t)\sigma_{0i} \quad (i=1, 2) \quad (2.5)$$

откуда при фиксированном t получим

$$\frac{\sigma_{01} - \sigma_s}{\sigma_{02} - \sigma_s} = \frac{\varepsilon_1(t) - \Pi_1^0(t)\sigma_{01}}{\varepsilon_2(t) - \Pi_1^0(t)\sigma_{02}} \equiv A, \quad \sigma_s = \frac{\sigma_{01} - A\sigma_{02}}{1 - A}$$

Определение функции ползучести $\Pi_2^0(t)$ производится при помощи любого из уравнений (2.5).

Таким образом, рассмотренная модель нелинейного неупругого тела, составленная на основе двух обобщенных линейных элементов, полностью определяется двумя линейными функциями ползучести $\Pi_1^0(t)$ и $\Pi_2^0(t)$ и параметром σ_s , представляющим границу линейного и нелинейного поведения материала. Параметр σ_s , заменяющий в данном случае предел текучести материала, в общем случае может быть функцией или функционалом процесса. Отметим, что его значение для фиксированного момента времени определяется путем расчета.

Обобщением соотношения (2.3) могут служить соотношения вида

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi_1^0(t-\tau) d\sigma(\tau) + \int_{t_1}^t \Pi_2^0(t-\tau) d(\sigma - \sigma_{s1}) + \int_{t_2}^t \Pi_3^0(t-\tau) d(\sigma - \sigma_{s2}) + \dots \quad (2.6)$$

в которых предполагается наличие не одного, а нескольких параметров σ_{si} , разделяющих диаграмму $\sigma \sim \varepsilon$ на несколько характерных участков. С физической точки зрения такое разделение предполагает существование различных механизмов деформирования, возможно даже на разных структурных уровнях.

Определение функции ползучести Π_i^0 и соответствующего параметра $\sigma_{s(i-1)}$ на каждом участке производится после вычисления этих величин на предыдущем участке при помощи экспериментальных данных, полученных при двух различных значениях напряжения, заключенных между $\sigma_{s(i-1)}$ и σ_{si} . Необходимость введения третьего и последующих слагаемых в (2.6) определяется нарушением справедливости используемого до такого нарушения двухчленного (трехчленного и т. д.) соотношения.

Определяющие соотношения для не одномерного случая могут быть представлены в виде

$$e_{ij} = \int_0^t \Pi_1(t-\tau) ds_{ij}(\tau) + \int_{t_1}^t \Pi_2(t-\tau) d(s_{ij} - s_{ij}^{(1)}) + \int_{t_2}^t \Pi_3(t-\tau) d(s_{ij} - s_{ij}^{(2)}) + \dots \quad (2.7)$$

где $\Pi_k(t)$ ($k=1, 2, \dots$) — функции сдвиговой ползучести, $s_{ij}^{(k)}$ — напряженные состояния в теле, характеризуемые условиями $s_{ij}^{(k)} s_{ij}^{(k)} = s_{uk}$, в которых величины s_{uk} являются граничными значениями, тождественными параметрам σ_{sk} . Значения t_k в этом случае определяются соответственно из уравнений

$$s_{ij}(t) s_{ij}(t) = s_{uk} \quad (k=1, 2, \dots) \quad (2.8)$$

Соотношения (2.6), (2.7) позволяют учесть переход через границы участков лишь при активном нагружении, что определяется нижними пределами интегрирования во втором и последующих слагаемых. Вопрос об использовании рассматриваемых определяющих соотношений при разгрузке достаточно сложен, однако имеются определенные предпосылки считать их справедливыми и в этом случае [10].

Механические характеристики алюминиевого сплава Д16 при $T=300^\circ\text{C}$ [7] приведены на фиг. 3, где цифрами 1–3 отмечены функции ползучести $\Pi_1^0(t) \cdot 10^5$, $\Pi_2^0 \cdot 10^4$ и $\Pi_3^0 \cdot 10^3$ (МПа) $^{-1}$; а цифрами 4, 5 — параметры σ_{s1} и σ_{s2} (МПа) в зависимости от времени t (м).

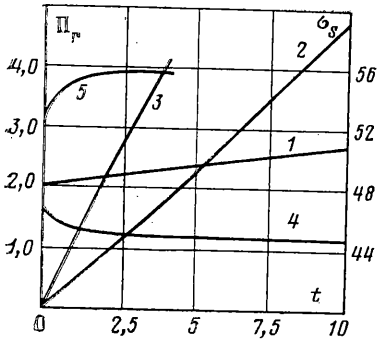
В соответствии с представленными результатами до уровня напряжений $\sigma_0 = 44,8$ МПа необходимо использовать линейное определяющее соотношение, при $44,8 < \sigma_0 < 55,7$ — два слагаемых в соотношении (2.6) и при $\sigma_0 > 55,7$ МПа — три слагаемых. Более подробных данных о границах применимости трехчленной формулы получить не удастся из-за отсутствия исходной экспериментальной информации. Отметим также некоторые особенности поведения параметров σ_{s1} и σ_{s2} при значениях t , близких к нулю; здесь в качестве этих параметров приняты их усредненные значения при $t > 1$ м.

Основное значение вводимых здесь определяющих соотношений в том, что они дают возможность учесть нарушение аналитичности операторов связи между напряжениями и деформациями, происходящее при равенстве напряжений граничным параметрам σ_s в одномерном случае или второго инварианта девиатора напряжений — значениям параметра s_u в не одномерном случае.

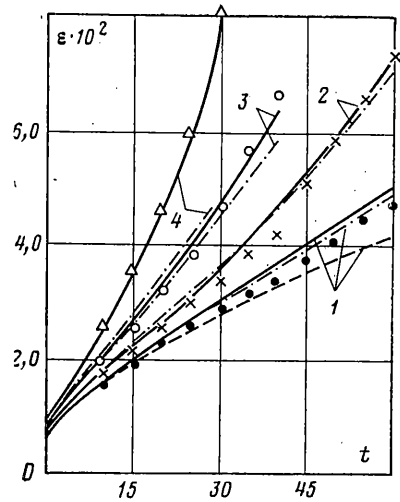
3. Если воспользоваться полученными в п. 1 материальными функциями $\Pi(t)$ и $K_1(t)$ (кривые 1 и 2 соответственно на фиг. 2) для вычисления деформаций при одноосном растяжении образцов из поликарбоната при $\sigma_0 > 10,97$ МПа, то обнаружится, что расчетные значения деформаций оказываются заниженными по сравнению с соответствующими экспериментальными значениями. Это отражено на фиг. 4, где расчетная зависимость деформации ε от времени t (м) для $\sigma_0 = 11,37$ МПа изображена штриховой линией 1, а экспериментальная — сплошной кривой 1. Не приводя расчетных зависимостей для $\sigma_0 = 12,22$; 13,11; 13,51 МПа (экспериментальные зависимости представлены в виде сплошных кривых 2–4 соответственно), отметим, что они занижены по сравнению с экспериментальными на 35–55% в конце рассматриваемых временных интервалов.

Ограниченность соотношения (1.4) приводит к необходимости расширения области применения определяющих соотношений. Одним из путей решения этой проблемы является подход, изложенный в п. 2. В данном конкретном случае он сводится к добавлению некоторого дополнительного слагаемого, который вначале запишем в виде линейного функционала, так что общее определяющее соотношение в одномерном случае примет вид

$$\varepsilon(t) = \int_0^t K(t, \tau) \sigma(\tau) \left[1 - \int_0^\tau K_1(\tau, \tau_1) \sigma(\tau_1) d\tau_1 \right]^{-1} d\tau + \int_{t_1}^t K_2(t, \tau) (\sigma - \sigma_a) d\tau \quad (3.1)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Для стабильного материала это соотношение может быть записано так:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d[f(\tau)\sigma(\tau)] + \int_{t_1}^t \Pi_{10}(t-\tau) d(\sigma - \sigma_a) \quad (3.2)$$

Первое слагаемое в правой части тождественно правой части соотношения (1.4). Момент времени t_1 определяется из решения уравнения $\sigma(t) = \sigma_a$. Если закон изменения напряжения задать при помощи функции Хевисайда $h(t)$: $\sigma(t) = \sigma_0 h(t)$, $\sigma_0 > \sigma_a$, то из (3.2) получаем

$$\varepsilon(t) = \Pi(t) \frac{\sigma_0}{[1 - \sigma_0 \Omega(t)]} + \Pi_{10}(t) (\sigma_0 - \sigma_a), \quad \Omega(t) = \int_0^t K_1(t, \tau) d\tau$$

Для определения Π_{10} и σ_a необходимы данные двух опытов на ползучесть при $\sigma_{01} > \sigma_a$ и $\sigma_{02} > \sigma_a$. Величина σ_a может быть в данном случае предварительно оценена по нарушению справедливости соотношения (1.4) как это сделано ранее. При $\sigma_{01} \neq \sigma_{02}$ из (3.3) для любого фиксированного момента времени имеем

$$\begin{aligned} \Pi_{10}(t) (\sigma_{01} - \sigma_a) &= \varepsilon_1 - \Pi(t) \sigma_{01} / [1 - \sigma_{01} \Omega(t)] \\ \Pi_{10}(t) (\sigma_{02} - \sigma_a) &= \varepsilon - \Pi(t) \sigma_{02} / [1 - \sigma_{02} \Omega(t)] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Исключая $\Pi_{10}(t)$ из (3.3) делением одного уравнения на другое, получим уравнение для определения σ_a . Затем при помощи любого из уравнений системы (3.3) определим функцию $\Pi_{10}(t)$. Исходя из представленных данных находим $\sigma_a = 11$ МПа. График функции ползучести $\Pi_{10}(t) \cdot 10^3$ (МПа)⁻¹ приведен на фиг. 2 (кривая 3). Вычисленные при помощи соотношения (3.2) зависимости деформаций от времени приведены на фиг. 4 в виде штрихпунктирных линий 1-4 соответственно для упомянутых номиналов напряжений. Видно, что второе слагаемое в определяющем соотношении (3.2) оказывает существенное влияние на расчетные значения деформаций. Отметим также удовлетворительное совпадение экспериментальных и расчетных зависимостей $\varepsilon \sim t$ вплоть до $\sigma_0 = 13,11$ МПа. Вместе с тем соотношение (3.2) не позволяет описать процесс деформирования при $\sigma_0 = 13,51$ МПа. Очевидно, что верхняя граница области применения определяющего соотношения (3.2) заключена между 13,11 и 13,51 МПа. Более точно эта граница не указана из-за отсутствия экспериментальных данных при таких значениях σ_0 , при которых нарушается справедливость применения соотношения (3.2). В соответствии с изло-

женным выше для этого необходимы данные, по крайней мере, двух таких экспериментов.

Естественным обобщением соотношения (3.4) для одномерного случая является соотношение вида

$$\varepsilon(t) = \int_0^t K(t, \tau) f(\tau) \sigma(\tau) d\tau + \int_{t_1}^t K_2(t, \tau) f_1(\tau) (\sigma - \sigma_{a1}) d\tau + \dots$$

$$f_1(\tau) = \left[1 - \int_0^{\tau} K_3(\tau, \tau_1) (\sigma(\tau_1) - \sigma_{a1}) d\tau_1 \right]^{-1} \quad (3.4)$$

которое представляет собой сумму, состоящую из двух или большего числа слагаемых вида (1.3). При монотонном увеличении напряжения происходит последовательное присоединение второго и последующих слагаемых к первому при $t=t_1, t_2, t_3, \dots$, причем $t_1 \leq t_2 \leq t_3$. При ступенчатом нагружении необходимое число слагаемых включается в определяющее соотношение одновременно, например при $t=0$. Если закон изменения напряжений задать при помощи функции Хевисайда $h(t)$: $\sigma(t) = \sigma_0 h(t)$, $\sigma_0 > \sigma_a$, то аналогичным образом получим из (3.4):

$$\varepsilon(t) = \Pi(t) \sigma_0 / [1 - \Omega(t) \sigma_0] + \Pi_1(t) (\sigma_0 - \sigma_{a1}) / [1 - \Omega_1(t) (\sigma_0 - \sigma_{a1})] + \dots$$

$$\Omega_1(t) = \int_0^t K_3(t, \tau) d\tau \quad (3.5)$$

Третье и последующие слагаемые, если возникнет необходимость их использования, имеют такую же форму, однако в них должны быть использованы другие функции и параметры: $\Pi_2(t)$, $\Omega_2(t)$ и σ_{a2} ; $\Pi_3(t)$, $\Omega_3(t)$ и σ_{a3} и т. д., где функции $\Omega_i(t)$ в последующих слагаемых имеют вид сходный с $\Omega_1(t)$.

На примере соотношения (3.5), содержащего два слагаемых, покажем, каким образом могут быть определены входящие во второй член определяющего соотношения материальные функции. Очевидно, что для этого необходимо иметь данные, по крайней мере, трех опытов на ползучесть при различных между собой значениях σ_{01} , σ_{02} , σ_{03} задаваемого при помощи функции Хевисайда напряжения. Кроме того, необходимо потребовать, чтобы $\sigma_{a1} < \sigma_{01}$, σ_{02} , $\sigma_{03} < \sigma_{a2}$. Предварительная оценка σ_{a2} может быть произведена таким же образом, как и оценка величины σ_{a1} , по нарушению справедливости используемого (в данном случае двухчленного) определяющего соотношения. Пусть имеются данные трех экспериментов на ползучесть при выбранных значениях напряжений σ_{01} , σ_{02} , σ_{03} . Из соотношения (3.5) имеем

$$\Pi_1(t) (\sigma_{0i} - \sigma_{a1}) / [1 - \Omega_1(t) (\sigma_{0i} - \sigma_{a1})] = \varepsilon_i - \Pi(t) \sigma_{0i} / [1 - \Omega(t) \sigma_{0i}] \equiv A_i \quad (i=1, 2, 3) \quad (3.6)$$

Поделим первое уравнение (3.6) на второе, второе — на третье, затем из двух полученных уравнений исключим $\Omega_1(t)$. В результате будем иметь уравнение относительно σ_{a1} :

$$\frac{A_2(\sigma_{01} - \sigma_{a1}) - A_1(\sigma_{02} - \sigma_{a1})}{A_3(\sigma_{02} - \sigma_{a1}) - A_2(\sigma_{03} - \sigma_{a1})} = \frac{(A_2 - A_3)(\sigma_{01} - \sigma_{a1})}{(A_3 - A_1)(\sigma_{03} - \sigma_{a1})} \quad (3.7)$$

Решая это уравнение, определим значение σ_{a1} для выбранного момента времени. Затем вычисляется значение $\Omega_1(t)$ для того же момента времени, так же как и значение функции $\Pi_1(t)$ из (3.6) при любом t . Аналогичным образом после этого могут быть определены материальные функции, входящие в третье слагаемое, и т. д. При этом значения напряжений σ_{01} , σ_{02} , σ_{03} должны быть выбраны в соответствующем интервале.

Используем теперь двухчленное соотношение вида (3.4) для расчета зависимостей $\varepsilon \sim t$ в образцах из поликарбоната при $\sigma_0 > 10,97$ МПа. Определение материальных функций осуществляется при помощи соотношения (3.5), поскольку для этого используются результаты экспериментов на ползучесть. График функции ползучести $\Pi_1(t) \cdot 10^3$ (МПа)⁻¹ в зависимости от времени t (мин) приведен на фиг. 2 (кривая 4). Значение σ_{a1} равно 11 МПа, функция $\Omega_1(t)$ слабо зависит от времени, и поэтому она заменена константой $C = 0,37$ МПа⁻¹. Используя полученные значения параметров, определяющее соотношение для этого конкретного случая запишется в виде ($\sigma_0 \geq 11$ МПа):

$$\varepsilon(t) = \Pi(t) \sigma_0 / [1 - \Omega_1(t) \sigma_0] + \Pi_1(t) (\sigma_0 - \sigma_{a1}) / [1 - C(\sigma_0 - \sigma_{a1})] \quad (3.8)$$

Вычисленные при помощи этого соотношения значения деформаций отмечены точками для $\sigma_0 = 11,37$ МПа; крестиками — для $\sigma_0 = 12,22$ МПа, кружками — для $\sigma_0 = 13,11$ МПа и треугольниками — для $\sigma_0 = 13,51$ МПа.

Отметим, что соотношение (3.8) является частным случаем более общего соотношения

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d \left\{ \sigma(\tau) \left[1 - \int_0^\tau K_1(\tau, \tau_1) \sigma(\tau_1) d\tau_1 \right]^{-1} \right\} + \\ + \int_{t_1}^t \Pi_1(t-\tau) d \left\{ (\sigma(\tau) - \sigma_{a1}) \left[1 - \int_0^\tau K_3(\tau, \tau_1) (\sigma(\tau_1) - \sigma_{a1}) d\tau_1 \right]^{-1} \right\}$$

которое следует использовать при произвольном законе изменения напряжения.

Для обобщения соотношения (3.4) на общий неодномерный случай воспользуемся представлением (1.7):

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_0^t B_{ijklmn}(t, \tau) \sigma_{kl}(\tau) q_{mn}(t, \tau) d\tau + \int_{t_1}^t C_{ijklmn}(t, \tau) \sigma_{kl}(\tau) r_{mn}(t, \tau) d\tau + \dots$$

где B_{ijklmn} , C_{ijklmn} , ... являются компонентами тензоров шестого ранга; q_{mn} , r_{mn} , ... имеют форму, подобную p_{mn} в (1.7). Моменты времени t_1 , ... связаны с выполнением некоторых условий, например равенства второго инварианта девиатора напряжений какому-либо определенному значению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
2. Леви П. Конкретные проблемы функционального анализа. М.: Наука, 1967. 510 с.
3. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
4. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1981. 343 с.
5. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
6. Шарафутдинов Г. З. Об использовании нелинейных вязкоупругих материалов в поляризационно-оптическом методе. — Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 4, с. 151–158.
7. Шевченко Ю. Н., Терехов Р. Г. Физические уравнения термовязкопластичности. Киев: Наук. думка, 1982. 238 с.
8. Победря Б. Е. Об уравнениях состояния в нелинейной теории вязкоупругости. — Механика полимеров, 1967, № 3, с. 427–435.
9. Шарафутдинов Г. З. Об экспериментальном изучении механических свойств вязкоупругих материалов и определяющих соотношениях вязкоупругости. — В кн.: Вторая Всесоюз. конф. «Ползучесть в конструкциях»: Тез. докл. Новосибирск: Изд-е Ин-та гидромеханики СО АН СССР, 1984, с. 165–166.
10. Шарафутдинов Г. З. Об одной форме определяющих соотношений вязкопластичности. — Проблемы прочности, 1985, № 9, с. 97–102.
11. Рейнер М. Реология. М.: Наука, 1965. 223 с.

Москва

Поступила в редакцию
4.VII.1985