

УДК 539.3

О ВОЗМОЖНОСТЯХ МЕТОДА ОСРЕДНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ
О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В ЭЛЕКТРОУПРУГОМ СЛОЕ
С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ ПО ТОЛЩИНЕ

ГЕТМАН И. П., РЯБОВ А. П., УСТИНОВ Ю. А.

В [1] развиты аналитические и численные методы исследования волновых процессов в слое, составленном из ряда пьезокерамических слоев. Однако для структур с достаточно большим числом слоев разработанные численные методы приводят к большим затратам машинного времени. Это обстоятельство связано с быстрой изменчивостью по толщине коэффициентов в дифференциальных уравнениях движения, что требует выбора слишком малого шага интегрирования.

В публикуемой работе для случая периодической неоднородности по толщине с помощью метода осреднения [2] строятся уравнения, коэффициенты которых не являются быстроизменяющимися, а их решения близки к решениям исходной задачи. Подробно исследуются изменения дисперсионного множества, возникающие в результате осреднения, оценивается погрешность предлагаемого метода.

1. Рассмотрим слой (фиг. 1, а) с безразмерной толщиной, равной единице, и имеющий периодическую неоднородную по толщине структуру, которая состоит из N периодов. Объем, занимаемый одним периодом, назовем ячейкой. Безразмерная толщина ячейки ε такова, что $N\varepsilon=1$. Материал ячейки обладает пьезоэлектрическими свойствами и принадлежит классу симметрии C_{6m} (ось симметрии направлена по толщине слоя). Для определенности полагаем, что лицевые поверхности слоя ($\xi=0$, $\xi=1$) свободны от напряжений и накоротко замкнуты.

Далее остановимся на исследовании стационарных колебаний такого слоя с круговой частотой ω . В работе [1] установлено, что выражение для амплитудных характеристик смещений U_i и электрического потенциала φ в случае произвольной неоднородности слоя по толщине и с указанными граничными условиями можно представить в виде

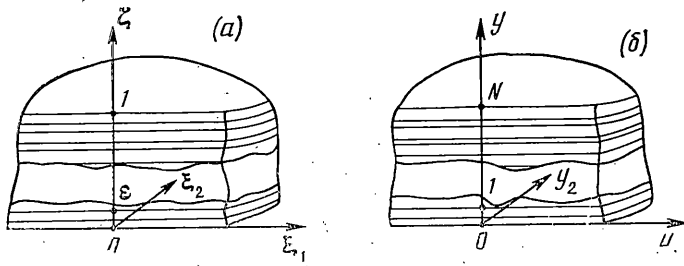
$$U_1 = \sum_k a_k(\xi) \partial_1 A_k + \sum_l b_l(\xi) \partial_2 B_l, \quad U_2 = \sum_k a_k(\xi) \partial_2 A_k - \sum_l b_l(\xi) \partial_1 B_l$$

$$U_3 = \sum_k c_k(\xi) A_k, \quad \varphi = \sum_k \psi_k(\xi) A_k \quad (1.1)$$

Здесь $A_k = (\xi_1, \xi_2)$, $B_l(\xi_1, \xi_2)$ — функции, удовлетворяющие уравнениям Гельмгольца $(\Delta + \gamma_k^2)A_k = 0$, $(\Delta + \delta_l^2)B_l = 0$, $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2$, $\partial_\alpha = \partial/\partial \xi_\alpha$, $(\alpha=1, 2)$, $\partial = \partial/\partial \xi$, $b_l(\xi)$ — собственная функция, δ_l^2 — собственное значение самосопряженной спектральной задачи

$$\partial c_{44} \partial b + (\rho \Omega^2 - \delta^2 c_{66}) b = 0, \quad \partial b|_{\xi=0, 1} = 0 \quad (1.2)$$

где $\Omega = \omega H (\rho_0/c_0)^{1/2}$ — безразмерная частота, H — размерная толщина слоя, ρ_0 , c_0 — характерные параметры материала ячейки, имеющие размерности плотности и модуля упругости соответственно, $X_k(\xi) = (a_k, c_k, \psi_k)$ — собст-



Фиг. 1

венная вектор-функция, γ_h^2 — собственное значение несамосопряженной спектральной задачи

$$L(\gamma^2, \Omega^2)\mathbf{X} = (L_0 - \gamma^2 L_1 + \Omega^2 L_2)\mathbf{X} = 0 \quad (1.3)$$

$$N(\gamma^2)\mathbf{X}|_{\xi=0, 1} = (N_0 - \gamma^2 N_1)\mathbf{X}|_{\xi=0, 1} = 0$$

$$L_0 = \partial A \partial + B \partial + \partial C, \quad L_1 = C^T \partial + \partial B^T + D$$

$$L_2 = R, \quad N_0 = T \partial + P, \quad N_1 = Q$$

$$A = \begin{bmatrix} c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & c_{33} & e_{33} \\ 0 & e_{33} & -\varepsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & c_{13} & e_{31} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & c_{44} & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{44} & e_{15} \\ 0 & e_{15} & -\varepsilon_{11} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & c_{33} & e_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & c_{44} & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Индексом T обозначается операция транспонирования матрицы.

В рассматриваемом случае безразмерные модули упругости $c_{ij}(\xi)$, пьезомодули $e_{kl}(\xi)$, диэлектрические проницаемости $\varepsilon_{mn}(\xi)$, плотность $\rho(\xi)$ являются периодическими на отрезке $[0, 1]$ функциями с периодом, равным ε .

Во многих практически важных случаях используются элементы s достаточно большим N (порядка нескольких десятков). В этих случаях развитые в [1] численные методы решения задач (1.2) и (1.3) приводят к большим затратам машинного времени, а предложенные там же аналитические методы оказываются неконструктивными. Однако при больших N , что соответствует $\varepsilon \ll 1$, появляется возможность асимптотического исследования решения задачи на основе метода осреднения [2—4]. Исследование проведем для спектральной задачи (1.3) как наиболее содержательной с точки зрения практических приложений.

Введем помимо системы координат (ξ_1, ξ_2, ξ) новую систему (y_1, y_2, y) , связанную с исходной следующим образом: $y_1 = \xi_1, y_2 = \xi_2, y = \xi/\varepsilon$ (фиг. 1, б). Переменную y принято называть быстрой, так как при ξ , меняющейся на ячейке от 0 до ε , переменная y меняется от 0 до 1. При этом функции $c_{ij}(y), e_{kl}(y), \varepsilon_{mn}(y), \rho(y)$ по переменной y являются периодическими с периодом, равным единице.

Решение задачи (1.3) будем искать в виде рядов по степеням малого параметра ε с коэффициентами, зависящими как от медленной переменной ξ , так и от быстрой y :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0(\xi) + \varepsilon \mathbf{X}_1(\xi, y) + \varepsilon^2 \mathbf{X}_2(\xi, y) + \dots \quad (1.5)$$

$$\gamma^2 = \gamma_0^2 + \varepsilon \gamma_1^2 + \dots, \quad \Omega^2 = \Omega_0^2 + \varepsilon \Omega_1^2 + \dots \quad (1.6)$$

Здесь $\mathbf{X}_0(\xi)$ — медленно меняющаяся вектор-функция, $\mathbf{X}_k(\xi, y)$ — быстро меняющиеся по ξ и периодические по y с периодом, равным еди-

нице, вектор-функции. Разложение (1.6) соответствует в изучаемом волновом процессе случаю, когда длина волны значительно превышает толщину ячейки.

Приравнявая нулю коэффициенты при различных степенях ε , после подстановки (1.5), (1.6) в (1.3) с учетом того, что $\partial = \partial/\partial\zeta + \varepsilon^{-1}\partial/\partial y$, получаем относительно X_k рекуррентную последовательность краевых задач, которую можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{k+1} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \sigma_k + B \left(\frac{\partial}{\partial y} X_{k+1} + \frac{\partial}{\partial \zeta} X_k \right) - \\ & - C^T \sum_{i=0}^k \gamma_i^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} X_{k-i+1} + \frac{\partial}{\partial \zeta} X_{k-i} \right) - D \sum_{i=0}^k \gamma_i^2 X_{k-i} + R \sum_{i=0}^k \Omega_i^2 X_{k-i} = 0 \\ & T \left(\frac{\partial}{\partial y} X_{k+1} + \frac{\partial}{\partial \zeta} X_k \right) + P X_k - Q \sum_{i=0}^k \gamma_i^2 X_{k-i} = 0 \quad (\zeta=0; 1) \\ & (k=-1, 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь все величины с отрицательным индексом следует полагать равными нулю, $\sigma_n(\zeta, y)$ — коэффициенты асимптотического разложения по малому параметру ε нормального к поверхности слоя вектора напряжений и нормальной компоненты вектора электрической индукции D_3 :

$$\sigma = (\sigma_{13}, \sigma_{33}, D_3) = \sigma_0 + \varepsilon \sigma_1 + \dots \quad (1.8)$$

$$\sigma_n = A \left(\frac{\partial}{\partial y} X_{n+1} + \frac{\partial}{\partial \zeta} X_n \right) + C X_n - B^T \sum_{i=0}^n \gamma_i^2 X_{n-i}$$

Отметим, что на границе раздела ячейки должны выполняться условия непрерывности перемещений и электрического потенциала

$$X_k(\zeta, 1) - X_k(\zeta, 0) = 0 \quad (1.9)$$

а также напряжений и нормальной составляющей вектора электрической индукции, действующих на поверхности контакта (в случае отсутствия внутренних электродов):

$$\sigma_k(\zeta, 1) - \sigma_k(\zeta, 0) = 0 \quad (1.10)$$

Задача, возникающая на первом этапе интегрирования ($k=-1$) системы (1.7), имеет вид $\partial\sigma_0/\partial y = 0$, откуда следует, что

$$\sigma_0 = A \left(\frac{\partial}{\partial y} X_1 + \frac{\partial}{\partial \zeta} X_0 \right) + C X_0 - \gamma_0^2 B^T X_0 = \Phi(\zeta) \quad (1.11)$$

где $\Phi(\zeta)$ — произвольная вектор-функция переменной ζ . Для ее определения воспользуемся условием (1.9). С этой целью проинтегрируем (1.11) по y в пределах от нуля до единицы, в результате получим

$$\Phi(\zeta) = \langle A^{-1} \rangle^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \langle A^{-1} C \rangle - \gamma_0^2 \langle A^{-1} B^T \rangle \right] X_0, \quad \langle f(y) \rangle = \int_0^1 f(y) dy \quad (1.12)$$

Следующий этап ($k=0$) решения рекуррентной системы (1.7) приводит к краевой задаче

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \sigma_1 + \frac{\partial}{\partial \zeta} \sigma_0 + (B - \gamma_0^2 C^T) \left(\frac{\partial}{\partial y} X_1 + \frac{\partial}{\partial \zeta} X_0 \right) - \gamma_0^2 D X_0 + \Omega_0^2 R X_0 = 0 \\ & T \left(\frac{\partial}{\partial y} X_1 + \frac{\partial}{\partial \zeta} X_0 \right) + P X_0 - \gamma_0^2 Q X_0 = 0 \quad (\zeta=0; 1) \end{aligned} \quad (1.13)$$

После ее интегрирования по y от 0 до 1 с учетом формул (1.10)–(1.12) получим задачу относительного первого члена $X_0(\xi)$ разложения (1.5) решения исходной задачи (1.3). Эта задача называется осредненной и может быть представлена в виде

$$(L_0^\circ - \gamma_0^2 L_1^\circ + \Omega_0^2 L_2^\circ) X_0 = 0, \quad (N_0^\circ - \gamma_0^2 N_1^\circ) X_0|_{\xi=0,1} = 0 \quad (1.14)$$

Операторы L_i° , N_i° могут быть определены по формулам (1.4) лишь с той разницей, что коэффициенты матриц заменяются на независимые от толщины координаты постоянные коэффициенты c_{ij}° , e_{kl}° , ε_{mm}° , ρ° соответственно. Они носят название приведенных или эффективных модулей и определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} c_{11}^\circ &= \langle c_{11} \rangle + p_1 c_{13}^\circ + p_2 e_{31}^\circ - \langle (c_{13}^2 \varepsilon_{33} - e_{31}^2 c_{33} + 2c_{13} e_{31} e_{33}) / r_1 \rangle \\ c_{12}^\circ &= c_{11}^\circ - 2 \langle c_{66} \rangle, \quad c_{13}^\circ = p_1 c_{33}^\circ + p_2 e_{33}^\circ \\ c_{33}^\circ &= r_2^{-1} \langle c_{33} / r_1 \rangle, \quad c_{44}^\circ = \langle c_{44}^{-1} \rangle^{-1} \quad e_{31}^\circ = p_1 e_{33}^\circ - p_2 \varepsilon_{33}^\circ \\ e_{33}^\circ &= r_2^{-1} \langle e_{33} / r_1 \rangle, \quad e_{15}^\circ = \langle e_{15} / c_{44} \rangle c_{44}^\circ \\ \varepsilon_{11}^\circ &= \langle \varepsilon_{11} \rangle + \langle e_{15}^2 / c_{44} \rangle - \langle e_{15} / c_{44} \rangle^2 c_{44}^\circ \\ \varepsilon_{33}^\circ &= r_2^{-1} \langle \varepsilon_{33} / r_1 \rangle, \quad \rho^\circ = \langle \rho \rangle \\ r_1 &= c_{33} \varepsilon_{33} + e_{33}^2, \quad r_2 = \langle c_{33} / r_1 \rangle \langle \varepsilon_{33} / r_1 \rangle + \langle e_{33} / r_1 \rangle^2 \\ p_1 &= \langle (c_{13} \varepsilon_{33} + e_{31} e_{33}) / r_1 \rangle, \quad p_2 = \langle (c_{13} e_{33} - c_{33} e_{31}) / r_1 \rangle \end{aligned} \quad (1.15)$$

Зная решение $X_0(\xi)$ задачи (1.14), из соотношений (1.11) и (1.13) можно определить $X_1(\xi, y)$ и $\sigma_1(\xi, y)$ – вторые члены разложений (1.5) и (1.8):

$$\begin{aligned} X_1(\xi, y) &= \int_0^y A^{-1} dy \sigma_0 - y \frac{\partial X_0}{\partial \xi} - \int_0^y A^{-1} (C - \gamma_0^2 B^T) dy X_0 + X_{10}(\xi) \\ \sigma_1(\xi, y) &= -y \frac{\partial \sigma_0}{\partial \xi} - \int_0^y (B - \gamma_0^2 C^T) A^{-1} dy \sigma_0 - \\ &- \left[\gamma_0^2 \int_0^y (BA^{-1} B^T + C^T A^{-1} C - D) dy + \Omega_0^2 \int_0^y R dy \right] X_0 + \sigma_{10}(\xi) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Для определения произвольных вектор-функций $X_{10}(\xi)$, $\sigma_{10}(\xi)$ в формулах (1.16) можно воспользоваться условием

$$\langle X_1(\xi, y) \rangle = \langle \sigma_1(\xi, y) \rangle = 0 \quad (1.17)$$

Таким образом, определение первых двух членов разложений (1.5), (1.8) позволяет найти распределение перемещений, напряжений, электрического потенциала и индукции по толщине пакета с точностью $O(\varepsilon)$.

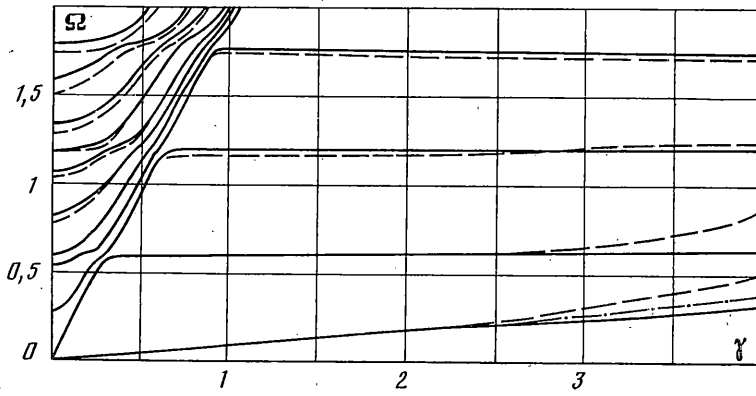
2. Приведем результаты численного анализа исследуемой задачи. Основная цель анализа – установить на основе сравнения решений в точной постановке с решениями осредненной задачи возможности рассмотренного выше асимптотического метода.

Сравнение проводилось по дисперсионным кривым $\gamma_k(\Omega)$ и соответствующим собственным решениям, описывающим распределение по толщине пакета смещений, напряжений, электрического потенциала и индукции.

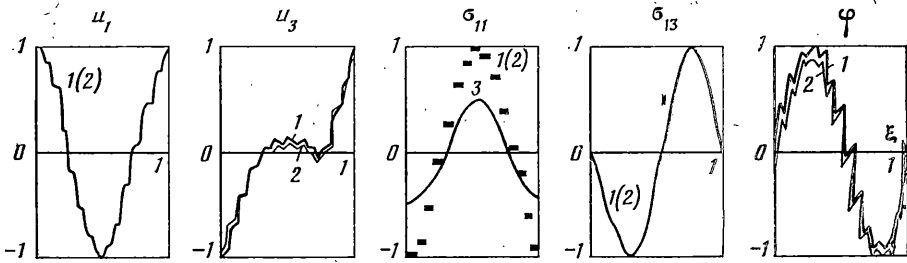
Расчеты проводились для случая, когда ячейка состоит из двух слоев с толщинами h_1 и h_2 соответственно ($h_1 + h_2 = \varepsilon$), причем свойства материалов слоев сильно отличаются друг от друга. Один из них – пьезоактивная керамика PZT-4 со следующими характеристиками материала: $c_{11} = 13,9 \cdot 10^4$ МПа, $c_{12} = 7,78 \cdot 10^4$ МПа, $c_{13} = 7,43 \cdot 10^4$ МПа, $c_{33} = 11,5 \cdot 10^4$ МПа, $c_{44} = 2,56 \cdot 10^4$ МПа, $e_{31} = -5,2$ с.А/м², $e_{33} = 15,1$ с.А/м², $e_{15} = 12,7$ с.А/м², $\varepsilon_{33}/\varepsilon_0 = 635$, $\varepsilon_{11}/\varepsilon_0 = 730$, $\rho = 7,5 \cdot 10^3$ кг/м³, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Другой материал – пассивный диэлектрик (клей) со следующими характеристиками: $c_{11} = c_{33} = 2,42 \cdot 10^2$ МПа, $c_{12} = c_{13} = 1,42 \cdot 10^2$ МПа, $c_{44} = 0,5 \cdot 10^2$ МПа, $\varepsilon_{33}/\varepsilon_0 = \varepsilon_{11}/\varepsilon_0 = 7,1$, $\rho = 1,74 \cdot 10^3$ кг/м³.

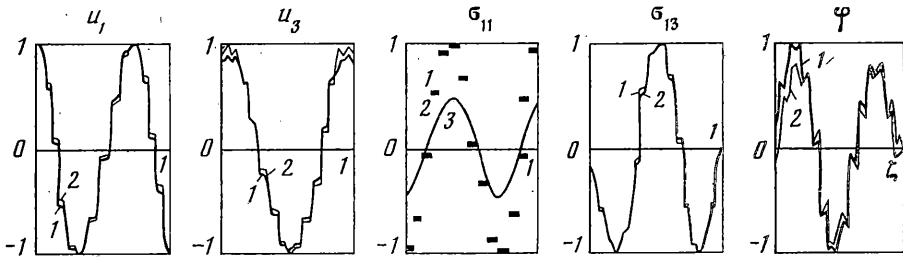
Результаты расчета, которые иллюстрируются графиками, приведены для случая $h_2 = 0,375\varepsilon$, где h_2 – толщина клевого слоя.



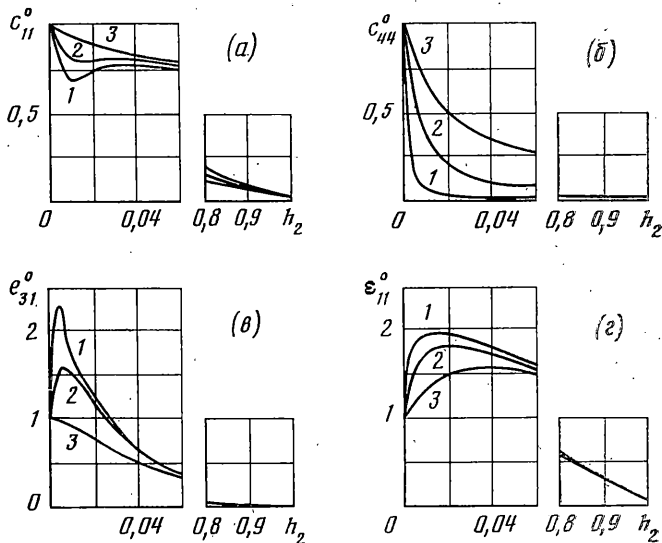
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

N	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6	Ω_7	Ω_8
5	0,261	0,502	0,581	0,700	0,833	1,117	1,558	1,853
10	0,263	0,523	0,587	0,771	1,005	1,163	1,216	1,401
15	0,264	0,526	0,588	0,784	1,035	1,172	1,276	1,507
30	0,264	0,529	0,588	0,791	1,053	1,176	1,312	1,569
50	0,264	0,529	0,589	0,793	1,057	1,177	1,319	1,581
	0,264	0,529	0,589	0,494	1,059	1,178	1,326	1,591

На фиг. 2 приведены дисперсионные кривые спектральной задачи (1.3), причем штриховые кривые соответствуют параметру $N=15$, штрихпунктирные — $N=30$. Сплошные линии изображают дисперсионные кривые осредненной спектральной задачи (1.14). Расчеты проведены на основе численного решения задач с помощью метода ортогональной проекции.

Из фиг. 2 видно, что, как и следовало ожидать, с ростом N расширяется область (γ, Ω) , в которой дисперсионные кривые, полученные на основе точной и приближенной теории, совпадают.

Некоторое представление о характере изменения точек дисперсионного множества с увеличением параметра N при $\gamma=0$ можно получить из таблицы, в которой приведены значения частот первых восьми толщинных резонансов. Последняя строка таблицы соответствует осредненным значениям частот толщинных резонансов.

На фиг. 3, 4 для $N=15$ приведены распределения по толщине пакета амплитудных характеристик переменных U_1, U_3, U_3 , напряжений σ_{11}, σ_{13} и электрического потенциала ϕ , соответствующие пятой ($\Omega=1,0, \gamma=0,417$) и шестой ($\Omega=1,0, \gamma=0,301$) дисперсионным кривым. На этих фигурах кривым 1 соответствуют полученные численно решения исходной краевой задачи (1.3), кривым 2 — расчеты по осредненной теории с учетом первых двух членов асимптотических разложений (1.5) и (1.8). На графиках разрывной функции σ_{11} на фиг. 3, 4 кривые 1 и 2 практически совпадают.

На основе анализа вычислений можно утверждать, что в области $\Omega \leq 1, \gamma \leq 1$ при $N=15$ результаты, полученные по теории осреднения, с высокой точностью совпадают с точными.

Отметим здесь, что на фиг. 3, 4 для продольных напряжений σ_{11} кривые 3 описывают распределение напряжений в однородном слое с эффективными модулями. При этом, они, во-первых, не описывают разрывной характер напряжений σ_{11} по толщине, во-вторых, дают заниженное значение напряжений, отличающееся от точного тем больше, чем сильнее отличаются свойства материалов, составляющих ячейку. Кривые 2 для этих напряжений строились исходя из выражения для σ_{11} , имеющего в терминах векторов X и σ следующий вид:

$$\sigma_{11}(\zeta) = m_1(\zeta) \cdot \sigma + \gamma^2 m_2(\zeta) \cdot X$$

$$m_1(\zeta) = \left(0, \frac{c_{13}e_{33} + e_{31}e_{33}}{c_{33}e_{33} + e_{33}^2}, \frac{c_{13}e_{33} - c_{33}e_{31}}{c_{33}e_{33} + e_{33}^2} \right)$$

$$m_2(\zeta) = \left(c_{11} - \frac{c_{13}^2 e_{33} - c_{33}e_{31}^2 + 2c_{13}e_{31}e_{33}}{c_{33}e_{33} + e_{33}^2}, 0, 0 \right)$$

и в котором для векторов X и σ брались два первых члена разложений (1.5) и (1.8), $\gamma = \gamma_0$.

В заключение приведем для исследуемой задачи поведение осредненных коэффициентов (1.15) в зависимости от толщины и упругих свойств мягкого (клеявого) слоя.

На фиг. 5, а указана зависимость осредненного коэффициента c_{11}° от толщины мягкого слоя в периодической ячейке, меняющейся от 0 (однородный слой из пьезокерамики) до 1 (однородный слой из мягкого материала). Здесь и далее кривые 1 соответствуют случаю $c_{44}^{(2)}/c_{44}^{(1)} = \lambda_1 = 1,9 \cdot 10^{-4}$, $c_{11}^{(2)}/c_{11}^{(1)} = \lambda_2 = 5,5 \cdot 10^{-4}$; кривые 2 — $\lambda_1 = 1,9 \cdot 10^{-3}$, $\lambda_2 = 5,5 \cdot 10^{-3}$; кривые 3 — $\lambda_1 = 1,9 \cdot 10^{-2}$, $\lambda_2 = 5,5 \cdot 10^{-2}$.

Из графика видно, что модуль c_{11}° уменьшается от $c_{11}^{(1)}$ пьезокерамики до $c_{11}^{(2)}$ мягкого слоя, имея при этом при малых h_2 локальный минимум, который тем меньше, чем мягче клейевой слой.

График осредненного модуля упругости c_{44}° приведен на фиг. 5, б. Поведение осредненного пьезомодуля e_{31}° показано на фиг. 5, в, характерной его особенностью является наличие ярко выраженного максимума, тем большего, чем меньше λ_1 и λ_2 . Поведение осредненной диэлектрической проницаемости ϵ_{11}° приведено на фиг. 5, г. Для этого графика характерно увеличение ϵ_{11}° до значения, большего $\epsilon_{11}^{(1)}$, а затем равномерное стремление к $\epsilon_{11}^{(2)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гетман И. П., Устинов Ю. А. Распространение волн в поперечно-неодородных пьезоактивных волноводах.— Акуст. журн., 1985, т. 31, вып. 3, с. 314–317.
2. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 532 с.
3. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Ха Тьен Нгоан. Усреднение и G -сходимость дифференциальных операторов.— Успехи мат. наук, 1979, т. 34, № 5, с. 65–133.
4. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland, 1978. 700 p.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
14.III.1986