МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1987

УДК 539.3

ВОЛНЫ СТОУНЛИ НА ГРАНИЦЕ КОНТАКТА ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО НЕСЖИМАЕМОГО ТВЕРДОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА И ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

БАГНО А. М., ГУЗЬ А. Н.

Широкое использование поверхностных волн в приложениях на практике, а также в теоретических исследованиях привело к значительному росту числа работ. В большинстве имеющихся публикаций приведены результаты, полученные в основном в рамках классической теории упругости. Обзор этих работ и анализ результатов, изложенных в них, приведены в [1, 2]. Вместе с тем ряд факторов, оказывающих существенное влияние на волновой процесс, не может быть охвачен классической теорией упругости. В связи с этим для исследования закономерностей распространения волн Релея и Стоунли возникла необходимость применения математических моделей, более полно отражающих поведение реальных тел. К числу таких моделей принадлежит модель [3–12], построенная на основании применения линеаризированных уравнений и позволяющая учесть как начальные деформации твердого упругого тела, так и вязкость и сжимаемость жидкой среды. Кроме того, указанная модель применима также к высокоэластичным резиноподобным несжимаемым материалам, допускающим большие начальные деформации и обладающим пониженной сдвиговой жесткостью, на поведение которых вязкая сжимаемая жидкость может оказывать значительное влияние. Проведение исследований в рамках такой модели необходимо в связи с наличием в элементах различных реальных конструкций начальных напряжений. Они возникают, например, в результате технологических операций при изготовлении или их создают целенаправленно, исходя из конструктивных соображений. Поэтому представляет определенный теоретический и практический интерес исследование влияния начальных напряжений на распространение поверхностных волн в системе несжимаемое упругое тело — вязкая сжимаемая жидкость. Заметим, что применение ранее указанной модели к сжимаемым жестким материалам (оргстекло, сталь) [13, 14] позволило подробно исследовать и получить качественную и количественную информацию о влиянии малых начальных деформаций на волновой процесс в них.

1. Постановка задачи. Рассмотрим процесс распространения поверхностных волн вдоль границы контакта упругого полупространства, подверженного конечным начальным деформациям, и вязкой сжимаемой жидкости. Исследование выполним в декартовых координатах z_i, введенных в начальном однородном деформированном состоянии. Совместные движения упругого тела и жидкости в рамках трехмерных линеаризированных уравнений будут описываться следующей системой соотношений [3–12]:

$$(\overset{*}{\varkappa}_{ij\alpha\beta}\partial^2/\partial z_i\,\partial z_\beta-\delta_{j\alpha}\rho\partial^2/\partial t^2)u_\alpha+q_{ij}^*\,\partial p/\partial z_i=0,\qquad z_k\in V_1 \qquad (1.1)$$

$$q_{ij}^*\partial u_j/\partial z_i=0,\quad z_k\in V_1 \qquad (1.2)$$

$$Q_j=N_i^0(\varkappa_{ij\alpha\beta}\partial u_\alpha/\partial z_\beta+q_{ij}p),\quad z_k\in V_1 \qquad (1.3)$$

$$\partial v/\partial t-\nu^*\Delta\mathbf{v}+\nabla p^*/\rho_0^*-\nu^*/3\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v})=0,\quad z_k\in V_2 \qquad (1.4)$$

$$1/\rho_0^*\partial\rho^*/\partial t+\nabla\cdot\mathbf{v}=0,\quad z_k\in V_2 \qquad (1.5)$$

$$P_{ij}=-p^*\delta_{ij}-{}^2/{}_3\delta_{ij}\mu^*\nabla\cdot\mathbf{v}+\mu^*(\partial v_i/\partial z_j+\partial v_j/\partial z_i),\quad z_k\in V_2 \qquad (1.6)$$

$$\partial p^*/\partial\rho^*=a_0^2,\quad a=\mathrm{const},\quad z_k\in V_2 \qquad (1.7)$$

где $\varkappa_{ij\alpha\beta}=\lambda_i\lambda_\beta\varkappa_{ij\alpha\beta}$, $q_{ij}^*=\lambda_i q_{ij}$, $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1$, u_α — компоненты вектора перемещений упругого тела, ρ — плотность материала твердого тела, λ_i — удлинения, N_i^0 — составляющие орта нормали к поверхности тела; выражения для составляющих тензора $\varkappa_{ij\alpha\beta}$ и q_{ij}, зависящие от вида упругого потенциала, приведены в [5], v_i — составляющие вектора возмущения скорости жидкости $\vec{v}$, ρ^*, p^* — возмущения плотности и давления в жидкости, ν^* и μ^* — кинематический и динамический коэффициенты вязкости жидкости, ρ_0, a_0 — плотность и скорость звука для жидкости в состоянии покоя, V_1, V_2 — объемы, занимаемые соответственно твердым телом и жидкостью, Q_j — составляющие вектора напряжений на поверхности твердого тела, P_{ij} — компоненты тензора напряжений в жидкости.

Далее предположим, что нелинейно-упругое твердое тело, упругий потенциал которого является произвольной дважды непрерывно дифференцируемой функцией компонент тензора деформаций Грина, заполняет полупространство $\{-\infty<z_1\leqslant 0,\ -\infty<z_2<\infty,\ -\infty<z_3<\infty\}$ и граничит с вязкой сжимаемой ньютоновской жидкостью, занимающей полупространство $\{0\leqslant z_1<\infty,\ -\infty<z_2<\infty,\ -\infty<z_3<\infty\}$. Будем считать, что внешние силы, действующие на указанные среды, распределены равномерно вдоль оси z_3. В этом случае задача может рассматриваться как плоская и сводится к решению приведенной выше системы уравнений (1.1)—(1.7) при следующих динамических и кинематических граничных условиях:

$$Q_1|_{z_1=0}=P_{11}|_{z_1=0},\quad Q_2|_{z_1=0}=P_{12}|_{z_1=0} \tag{1.8}$$

$$v_1|_{z_1=0}=\partial u_1/\partial t|_{z_1=0},\quad v_2|_{z_1=0}=\partial u_2/\partial t|_{z_1=0} \tag{1.9}$$

Для упрощения решения связанной задачи аэрогидроупругости воспользуемся представлениями общих решений линеаризированных уравнений вязкой сжимаемой жидкости и несжимаемого твердого тела, находящегося в однородном начальном деформированном состоянии, полученными в инвариантной форме в работах [3—12]. Для рассматриваемого здесь случая плоской задачи эти решения будут иметь следующий вид:

$$u_1=-\partial^2 x_1/\partial z_1\,\partial z_2,\quad u_2=\lambda_1/\lambda_2 q_1/q_2\,\partial^2 x_1/\partial z_1^2 \tag{1.10}$$

$$v_1=\partial^2 x_2/\partial z_1\,\partial t+\partial^2 x_3/\partial z_2\,\partial t,\quad v_2=\partial^2 x_2/\partial z_2\,\partial t-\partial^2 x_3/\partial z_1\,\partial t \tag{1.11}$$

где введенные потенциалы x_j удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered}\{\lambda_1^2(\lambda_2^2\mu_{12}+s_{11}^0)\partial^4/\partial z_1^4+\lambda_2^4/\lambda_1^2 q_2^2/q_1^2(\lambda_1^2\mu_{12}+s_{22}^0)\partial^4/\partial z_2^4-\\ -\rho\partial^4/\partial z_1^2\partial t^2+\lambda_2^2 q_2/q_1[q_1/q_2(\lambda_2^2 a_{22}+s_{22}^0]+q_2/q_1(\lambda_1^2 a_{11}+s_{11}^0)-\\ -2\lambda_1\lambda_2(a_{12}+\mu_{12})]\partial^4/\partial z_1^2\partial z_2^2-\lambda_2^2/\lambda_1^2 q_2^2/q_1^2\rho\partial^4/\partial z_2^2\partial t^2\}x_1=0\end{gathered} \tag{1.12}$$

$$[(1+{}^4/_3\nu^*/a_0^2\partial/\partial t)(\partial^2/\partial z_1^2+\partial^2/\partial z_2^2)-1/a_0^2\partial^2/\partial t^2]\,x_2=0$$

$$[\partial/\partial t-\nu^*(\partial^2/\partial z_1^2+\partial^2/\partial z_2^2)]\,x_3=0$$

2. Вывод дисперсионного уравнения. Основное соотношение выведем в самом общем случае для упругого потенциала произвольной формы. Параметры распространения поверхностных волн найдем разыскивая решение системы уравнений (1.1)—(1.12) в виде

$$x_j=X_j(z_1)\exp[i(kz_2-\omega t)]\quad (j=1,2,3) \tag{2.1}$$

Выбранный здесь класс гармонических волн, являясь наиболее простым и удобным в теоретических исследованиях, как известно, не ограничивает общности полученных результатов. Подставляя соотношения (2.1) в систему равенств (1.12), получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$[(d^2/dz_1{}^2-\alpha_1{}^2)(d^2/dz_1{}^2-\alpha_2{}^2)]X_1=0 \tag{2.2}$$

$$(d^2/dz_1{}^2+\alpha_3{}^2)X_2=0, \quad (d^2/dz_1{}^2+\alpha_4{}^2)X_3=0$$

$$\alpha_{1,2}{}^2={}^1/_2[-b\pm(b^2-4d)^{1/2}], \quad b=[\rho\omega^2/\lambda_1-\lambda_2{}^2k^2(\lambda_2{}^2a_{22}+s_{22}{}^0)/\lambda_1-$$

$$-q_2{}^2\lambda_2{}^2k^2(\lambda_1{}^2a_{11}+s_{11}{}^0)/(q_1{}^2\lambda_1)+2\lambda_2{}^3q_2k^2(a_{12}+\mu_{12})/q_1]/D,$$

$$d=\lambda_2{}^2q_2{}^2k^2[\lambda_2{}^2k^2(\lambda_1{}^2\mu_{12}+s_{22}{}^0)-\rho\omega^2]/(\lambda_1{}^3q_1{}^2D); \quad D=\lambda_1(\lambda_2{}^2\mu_{12}+s_{11}{}^0)$$

$$\alpha_3{}^2=(3k^2-3\omega^2a_0{}^{-2}-4i\omega\nu^*k^2a_0{}^{-2})/(3-4i\omega\nu^*a_0{}^{-2})$$

$$\alpha_4{}^2=k^2-i\omega\rho_0/\mu^*, \quad i=\sqrt{-1}$$

где a_{ij}, μ_{ij} — коэффициенты уравнений состояния, зависящие от вида упругого потенциала, k — волновое число, ω — круговая частота.

Далее, исходя из физических соображений, среди найденных решений уравнений (2.2) в дальнейшем рассматриваем лишь те, амплитуда которых убывает с ростом глубины. Подставляя их в граничные условия (1.8)–(1.9), получаем систему однородных линейных алгебраических уравнений. Из условия существования нетривиального решения этой системы получаем искомое дисперсионное уравнение

$$B_1G_2-B_2G_1=0 \tag{2.3}$$

$$B_j=\lambda_1{}^3q_1q_2{}^{-1}\lambda_2a_{12}i\alpha_j{}^2k-\lambda_1{}^2(\lambda_1{}^2a_{11}+s_{11}{}^0)i\alpha_j{}^2k+$$

$$+[\lambda_1{}^4a_{11}+\lambda_1{}^2s_{11}{}^0-\lambda_1{}^3\lambda_2q_1q_2{}^{-1}(a_{12}+\mu_{12})]i\alpha_j{}^2k-\lambda_2{}^2(\lambda_1{}^2\mu_{12}+s_{22}{}^0)ik^3+$$

$$+\rho\omega^2ik+\alpha_jik\alpha_3(\rho_0\omega^2+2\mu^*k^2i\omega)+ik(\lambda_1q_1\alpha_j{}^2\alpha_3+\alpha_jk^2\lambda_2q_2)\times$$

$$\times(\rho_0\omega^2+2\mu^*k^2i\omega)/[\alpha_3(\alpha_4\alpha_3-k^2)\lambda_2q_2]+$$

$$+2\mu^*\alpha_4k\omega(\lambda_1q_1\alpha_j{}^2\alpha_3+\alpha_jk^2\lambda_2q_2)/[\lambda_2q_2(\alpha_4\alpha_3-k^2)]$$

$$G_j=\lambda_1{}^2\lambda_2{}^2\mu_{12}\alpha_jk^2+\lambda_1{}^3\lambda_2{}^{-1}q_1q_2{}^{-1}(\lambda_2{}^2\mu_{12}+s_{11}{}^0)\alpha_j{}^3+$$

$$+2\mu^*\alpha_jik^2\omega+2\mu^*k^2i\omega(\lambda_1q_1\alpha_j{}^2\alpha_3+\alpha_jk^2\lambda_2q_2)/[\lambda_2q_2(\alpha_4\alpha_3-k^2)]+$$

$$+\alpha_j\mu^*i\omega(\alpha_4{}^2+k^2)(\lambda_1q_1\alpha_j\alpha_3+k^2\lambda_2q_2)/[(k^2-\alpha_3\alpha_4)\lambda_2q_2] \quad (j=1, 2, 3)$$

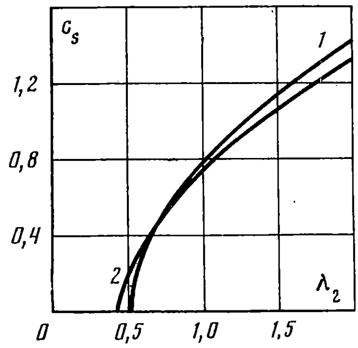
Полученное дисперсионное уравнение (2.3) является наиболее общим. В качестве частных случаев из него следуют уравнения, полученные ранее в результате применения различных приближенных моделей как в рамках классической [15, 1, 2, 16, 17], так и линеаризированной теорий [15, 18–20].

3. Численные результаты. В дальнейшем дисперсионное уравнение (2.3) решалось численно на ЭВМ методом итераций. В качестве несжимаемого упругого тела рассматривалась высокоэластичная резина, упругие свойства которой описывались упругим потенциалом типа Трелоара, со следующими параметрами [21]: E=2,5 МПа, ρ=1,2·10³ кг/м³. Вязкая сжимаемая жидкая среда характеризуется следующими данными [21]: ρ_0=1260 кг/м³, a_0=1927 м/с.

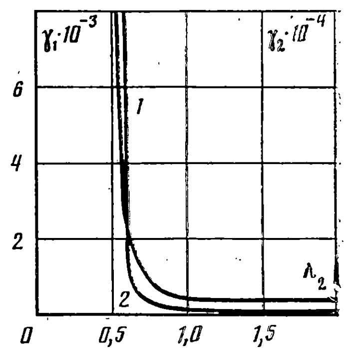
При решении предполагалось, что начальное напряженное состояние удовлетворяло соотношениям $s_{22}{}^0\neq0$, $s_{11}{}^0=0$. Как известно [3, 5, 9], при такой загрузке несжимаемых тел нет аналогий между задачами в линеаризированной и линейной постановках.

Результаты расчетов представлены на фиг. 1, 2, где изображены зависимости скорости c_s ($c_s=c/V_s$, $V_s{}^2=\mu/\rho$) и коэффициента затухания γ(м⁻¹) волн Стоунли от начальных удлинений λ_2. Кривые *1* получены для μ^*=1,3·10⁻³ кг/(м·с), а кривые *2* — для μ^*=1,3·10⁻¹ кг/(м·с). Изучалось поведение поверхностных волн Стоунли, распространяющихся с частотой ω=1·10⁶ с⁻¹. Анализ полученных зависимостей показывает, что с увеличением вязкости жидкости явление поверхностной неустойчивости, характеризующееся равенством нулю скорости волны Стоунли, возникает при более сильном начальном сжатии. Из результатов, представленных на фиг. 1, также следует, что при определенной начальной деформации ($\lambda_2\approx0,75$) вязкость рассматриваемых здесь жидкостей в рамках принятых моделей не влияет на величину скорости.

В заключение заметим, что, как видно из приведенных графиков, при сжатии скорость поверхностных волн падает, а величина коэффициента затухания их растет.



Фиг. 1



Фиг. 2

Этот качественный вывод согласуется с физическими представлениями и свидетельствует о возможностях предложенной модели. Кроме того, полученные в ее рамках результаты позволяют оценить погрешности, возникающие при применении приближенных моделей идеальной или вязкой несжимаемой жидкости и классической теории упругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Изд-во АН СССР, 1957. 502 с.
2. *Викторов И. А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 287 с.
3. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наук. думка, 1973. 270 с.
4. *Гузь А. Н.* О представлении общих решений линеаризированной теории упругости несжимаемых тел.– Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 12, с. 1090–1093.
5. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии. Киев: Наук. думка, 1979. 144 с.
6. *Гузь А. Н.* О задачах гидроупругости для вязкой жидкости и упругих тел с начальными напряжениями.– Докл. АН СССР (ДАН СССР), 1980, т. 251, № 2, с. 305–308.
7. *Гузь А. Н.* О представлении решений линеаризированных уравнений Навье – Стокса.– Докл. АН СССР (ДАН СССР), 1980, т. 253, № 4, с. 825–827.
8. *Гузь А. Н.* О представлении решений линеаризированных уравнений Стокса – Навье для движущейся жидкости.– Докл. АН СССР (ДАН СССР), 1980, т. 255, № 5, с. 1066–1068.
9. *Гузь А. Н.* О задачах аэрогидроупругости для тел с начальными напряжениями.– Прикл. механика, 1980, т. 16, № 3, с. 3–21.
10. *Гузь А. Н.* Распространение волн в цилиндрической оболочке с вязкой сжимаемой жидкостью.– Прикл. механика, 1980, т. 16, № 10, с. 10–20.
11. *Гузь А. Н.* Задачи гидроупругости для вязкой сжимаемой жидкости в сферических координатах.– Прикл. механика, 1980, т. 16, № 11, с. 3–10.
12. *Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Бабаев А. Э.* Гидроупругость систем оболочек. Киев: Вища школа, 1984. 207 с.
13. *Багно А. М., Гузь А. Н.* О распространении малых возмущений в системе: предварительно напряженное сжимаемое твердое тело – вязкая сжимаемая жидкость.– Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 1, с. 167–170.
14. *Гузь А. Н., Багно А. М.* Волны Стоунли на границе раздела упругого полупространства с начальными напряжениями и вязкой сжимаемой жидкости.– Прикл. механика, 1984, т. 20, № 12, с. 3–7.
15. *Багно А. М.* Влияние вязкой сжимаемой жидкости на распространение волн Стоунли на границе раздела твердой и жидкой сред.– Прикл. механика, 1984, т. 20, № 6, с. 70–74.
16. *Rayleigh J.* On waves propagated along the plane surface of an elastic solid.– Proc. Lond. Math. Soc., 1887, v. 17, No. 253, p. 4–11.
17. *Stonely R.* The elastic waves at the surface of separation of two solids.– Proc. Roy. Soc. Lond. A, 1924, v. 106, No. 738, p. 416–428.
18. *Бабич С. Ю., Гузь А. Н., Жук А. П.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями.– Прикл. механика, 1979, т. 15, № 4, с. 3–23.
19. *Багно А. М.* Влияние конечных начальных деформаций на скорости волн Стоунли в высокоэластичном несжимаемом полупространстве, взаимодействующем с идеальной жидкостью.– Прикл. механика, 1985, т. 21, № 6, с. 116–119.
20. *Багно А. М., Кошман В. П.* Влияние конечных начальных деформаций на скорости волн Релея в несжимаемом полупространстве.– Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 9, с. 18–21.
21. *Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г.* Справочник по экспериментальной физике. М.: Наука, 1975. 256 с.

Киев

Поступила в редакцию
18.VI.1985