МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1987

УДК 539.3

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ B-РЕЗОНАНСОВ

ВОРОВИЧ Е. И., ПРЯХИНА О. Д.

Так называемые B-резонансы[1] возникают, когда амплитуда колебаний слоя с присоединенной массой становится бесконечной. Они характеризуются тем, что их всегда конечное число, возникают при достаточно больших присоединенных массах, превышающих некоторую критическую массу m_k, и расположены в интервале $(0, \Omega_k)$, где Ω_k – частота отпирания волновода.

В публикуемой работе для антиплоской динамической задачи предлагается аналитический метод расчета B-резонансов и на его основе производится их исследование. Метод допускает обобщение на широкий класс задач.

1. Рассмотрим динамическую контактную задачу об антиплоских колебаниях в направлении оси z массивного полосового штампа ширины $2a$ на поверхности упругого слоя, занимающего область $\{0\leqslant y\leqslant h,\ -\infty<z,\ x<\infty\}$ и жестко сцепленного с недеформируемым основанием.

Основное уравнение колебаний штампа с массой m имеет вид $-m\Omega^2W=R-WT(\Omega)$. Здесь W – амплитуда горизонтального смещения штампа, R – амплитуда равнодействующей системы гармонически меняющихся усилий, действующих на штамп, $T(\Omega)$ – амплитуда равнодействующей контактных давлений, возникающих в области контакта штампа со средой при заданных единичных смещениях штампа. Эта функция определяется при решении стандартной динамической контактной задачи о действии немассивного штампа на указанную среду и строится в п. 2, Ω – безразмерная частота колебаний.

Перемещения штампа определяются выражением

$$W=R/[T(\Omega)-m\Omega^2] \tag{1.1}$$

В [1] доказано существование критической частоты Ω_k, такой, что при $\Omega>\Omega_k$ в слое имеет место перенос энергии на бесконечность. Это находит свое выражение в том, что $T(\Omega)$ становится комплексной и величина в квадратных скобках в (1.1) в нуль обратиться не может для $\Omega>\Omega_k$. Следовательно, при $\Omega>\Omega_k$ существование изолированных резонансов невозможно. При $\Omega<\Omega_k$ такие резонансы имеют место, если $T(\Omega)=m\Omega^2$.

Для данной задачи дальше будет установлено, что $T(\Omega)$ монотонно убывает с ростом Ω и в силу этого в системе возможен только один резонанс, при котором амплитуда перемещений будет неограниченно возрастать.

2. Интегральное уравнение антиплоской динамической задачи имеет вид (в безразмерных амплитудных параметрах):

$$\int_{-1}^{1} k\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)\tau(\xi)\,d\xi=\pi W(x)\qquad(|x|\leqslant1),\qquad k(x)=\int_0^\infty L(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha$$
$$L(\alpha)=(\alpha^2-\Omega^2)^{-1/2}\,\mathrm{th}\,(\alpha^2-\Omega^2)^{1/2},\quad \Omega^2=\rho\omega^2h^2\mu \tag{2.1}$$

---

[1] *Бабешко В. А., Ворович И. И.* Динамические свойства полуограниченных упругих и электроупругих трехмерных тел при смешанных граничных условиях и включениях.– В кн.: V Всес. съезд по теоретич. и прикл. механике. Тез. докл. Алма-Ата: Наука, 1981, с. 39; *Ворович Е. И., Пряхина О. Д., Тукодова О. М.* Возбуждение волн массивным штампом на упругом слое. Ростов/Д, 1984.– 13 с. Деп. в ВИНИТИ 3.12.84; № 7641-84.

Здесь $W(x)$ — заданные горизонтальные смещения точек поверхности среды в области $|x|\leqslant 1$, отнесенные к полуширине штампа a, $\tau(x)$ — неизвестные контактные напряжения, возникающие под штампом, отнесенные к μ — модулю сдвига среды, ρ — плотность среды, $\lambda=h/a$, a — толщина слоя. Общий для всех характеристик задачи временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен, ω — частота колебаний штампа. Построим решение (2.1) при $W(x)\equiv 1$. Разложим подынтегральную функцию ядра интегрального уравнения (2.1) в ряд Тейлора в окрестности нулевой частоты Ω:

$$L(\alpha)\equiv L(\alpha,\Omega^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\Omega^{2k}L_{2k}(\alpha),\qquad L_{2k}(\alpha)=\frac{L^{(k)}(\alpha,0)}{k!}$$

$$L_0(\alpha)=\operatorname{th}\alpha/\alpha,\quad L_2(\alpha)=z_1(\alpha)/\alpha^3,\quad L_4(\alpha)=z_2(\alpha)/\alpha^5$$

$$z_2(\alpha)=[3\operatorname{ch}\alpha(\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\alpha-\alpha)-2\alpha^2\operatorname{sh}\alpha]/(8\operatorname{ch}^3\alpha)$$

$$z_1(\alpha)=(\operatorname{sh}2\alpha-2\alpha)/(1+\operatorname{ch}2\alpha)$$

С учетом последних соотношений будем иметь

$$k(x)=\sum_{k=0}^{\infty}k_{2k}(x)\Omega^{2k},\qquad k_{2k}(x)=\int_{\sigma}L_{2k}(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha$$

$$k_0(x)=\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{th}\alpha}{\alpha}\cos\alpha x\,d\alpha$$

Очевидно, что $k_0(x)$ — ядро интегрального уравнения соответствующей статической задачи. Решение будем искать в виде

$$\tau(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\tau_{2k}(x)\Omega^{2k}\tag{2.2}$$

В результате задача (2.1)—(2.2) сводится к решению ряда следующих интегральных уравнений относительно неизвестных $\tau_{2k}(x)$:

$$\int_{-1}^{1}k_0\left(\frac{x-\varepsilon}{\lambda}\right)\tau_0(\varepsilon)\,d\varepsilon=\pi\qquad(|x|\leqslant 1)\tag{2.3}$$

$$\int_{-1}^{1}k_0\left(\frac{x-\varepsilon}{\lambda}\right)\tau_{2k}(\varepsilon)\,d\varepsilon=A_{2k}(x)\qquad(|x|\leqslant 1,\ k=1,2,\ldots)\tag{2.4}$$

$$A_{2k}(k)=-\sum_{n=1}^{k}\int_{-1}^{1}k_{2(k-n)+2}\left(\frac{x-\varepsilon}{\lambda}\right)\tau_{2(n-1)}(\varepsilon)\,d\varepsilon\qquad(k=1,2,\ldots)$$

Возможность разложения (2.2) установлена в [1]. Там же доказано, что это разложение равномерно сходится на любом отрезке $[0,\ \Omega_0]$, $\Omega_0\leqslant\Omega_k$.

Решение уравнения (2.3) имеет вид [2]:

$$\tau_0(x)=\frac{b\operatorname{ch}B/2}{K(\sqrt{1-\operatorname{th}^2 b/2})\sqrt{2(\operatorname{ch}b-\operatorname{ch}bx)}},\qquad b=\frac{\pi}{\lambda}\tag{2.5}$$

$$K\left(\left[1-\operatorname{th}^2\left(\frac{b}{2}\right)\right]^{1/2}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\operatorname{ch}\frac{b}{2}\int_{-b}^{b}\ln\left|\operatorname{th}\frac{x+b}{4}\right|(\operatorname{ch}b-\operatorname{ch}x)^{-1/2}dx\tag{2.6}$$

Для вычисления правых частей уравнения (2.4) — функций $A_{2k}(x)$ ($k=1,\ 2,\dots$) — в ядрах $k_{2k}(v)$ следует выделить логарифмическую особенность и разложить эти функции в ряд по степеням $v=(x-\varepsilon)/\lambda$ при достаточно больших значениях параметра $\lambda=h/a$. В частности

$$k_2(v)=\frac{v^2}{2}\ln|v|-\frac{3v^2}{4}+\sum_{m=0}^{\infty}a_{2m}v^{2m} \tag{2.7}$$

$$k_4(v)=-\frac{v^4}{64}\ln|v|+\frac{25}{96\cdot 8}v^4+\sum_{m=0}^{\infty}c_{2m}v^{2m}$$

Коэффициенты a_{2m}, c_{2m} определяются по формулам

$$a_0=\int_0^\infty\frac{z_1(\alpha)}{\alpha^3}\,d\alpha,\qquad a_2=\int_0^\infty\frac{-z_1(\alpha)+1-e^{-\alpha}}{2\alpha}\,d\alpha \tag{2.8}$$

$$a_{2m}=\int_0^\infty\frac{(-1)^m\alpha^{2m-3}[z_1(\alpha)-1]}{(2m)!}\,d\alpha\qquad (m=2,3,4,\dots)$$

$$c_0=\int_0^\infty\frac{z_2(\alpha)}{\alpha^5}\,d\alpha,\qquad c_2=\int_0^\infty\frac{-z_2(\alpha)}{2\alpha^3}\,d\alpha \tag{2.9}$$

$$c_4=\int_0^\infty\frac{1}{24\alpha}\left[z_2(\alpha)+\frac{3}{8}(e^{-\alpha}-1)\right]d\alpha$$

$$c_{2m}=\int_0^\infty\frac{\alpha^{2m-5}(-1)^m}{(2m)!}\left[z_2(\alpha)-\frac{3}{8}\right]d\alpha\qquad (m=3,4,5,\dots)$$

Можно убедиться, что эти коэффициенты представляют собой быстросходящиеся интегралы.

Разложим решение (2.5) интегрального уравнения (2.3) в ряд по степеням x/λ ($\lambda\gg 1$):

$$\tau_0(x)=\frac{B}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{k=0}^{\infty}d_{2k}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{2k} \tag{2.10}$$

$$B=\operatorname{ch}{}^1/_2b\{K([1-\operatorname{th}^2{}^1/_2b]^{1/2})\}^{-1},\qquad b=\pi/\lambda$$

Выпишем решение $\tau_0(x)$, ограничиваясь членами малости порядка λ^{-4}:

$$\tau_0(x)=\frac{B}{\sqrt{1-x^2}}\left[d_0+d_2\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2+d_4\left(\frac{x}{\lambda}\right)^4\right],\qquad d_0=1-\frac{\pi^2}{24\lambda^2}+$$

$$+\frac{7\pi^4}{48\cdot 120\lambda^4},\qquad d_2=-\frac{\pi^2}{24}+\frac{11\pi^4}{48\cdot 60\lambda^2},\qquad d_4=\frac{7\pi^4}{48\cdot 120}$$

Тогда функции $A_{2k}(x)$ ($k=1,\ 2,\dots$) с учетом асимптотических разложений (2.7) и последовательных построений решений $\tau_{2k}(x)$ ($k=1,2,\dots$) (например, при вычислении $A_2(x)$ используется решение $\tau_0(x)$ (2.10) и так далее) будут определяться выражениями

$$A_{2l}(x)=\pi B\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k}^{2l}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{2k}\qquad (l=1,2,\dots)$$

Коэффициенты α_{2k}^{2l} представляют собой сходящиеся ряды по степеням λ^{-2}, включающие постоянные a_{2k}, c_{2k}. Последние определены соотношениями (2.8), (2.9). Таким образом, решение уравнений (2.3), (2.4) будет иметь вид

$$\tau_{2l}(x) = B\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k}^{2l}\frac{\varphi_{2k}(x)}{\lambda^{2k}} \qquad (l=1, 2, \dots)$$

При этом $\varphi_0(x) \equiv \tau_0(x)$, $\varphi_{2k}(x)$ есть решения интегрального уравнения (2.3) для правых частей соответственно πx^{2k} $(k=1, 2, \dots \infty)$, которые несложно построить используя результаты [2]. Выпишем решения $\varphi_2(x)$, $\varphi_4(x)$, оставляя для наглядности лишь члены порядка λ^{-4}:

$$\varphi_2(x) = \frac{D_2}{\sqrt{1-x^2}}\left[1 - \frac{b^2}{24}(1+x^2)\right] - 2\left(1 + \frac{b^2}{48}x^2\right)\sqrt{1-x^2} - \frac{b^2}{24}(1-x)^{3/2}$$

$$\varphi_4(x) = D_4(1-x^2)^{-1/2} - 6x^2(1-x^2)^{1/2} - 2(1-x^2)^{3/2}$$

$$D_2 = 1 + {}^1\!/_2 B + {}^1\!/_{48} b^2(4 - {}^1\!/_4 B), \qquad D_4 = {}^3\!/_2 + {}^3\!/_8 B$$

Окончательно контактные напряжения при низкочастотных антиплоских колебаниях штампа на упругом слое при заданных единичных смещениях точек плоской подошвы штампа определяются выражением

$$\tau(x) = \frac{B}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{k=0}^{\infty}d_{2k}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{2k} - \Omega^2 B\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k}^{2}\frac{\varphi_{2k}(x)}{\lambda^{2k}} +$$

$$+ \Omega^4 B\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k}^{4}\frac{\varphi_{2k}(x)}{\lambda^{2k}} + o(\Omega^6)$$

Равнодействующая контактных давлений имеет вид

$$T(\Omega) = \int_{-1}^{1}\tau(x, \Omega)\,dx = T_0(\lambda) - \Omega^2 T_2(\lambda) + \Omega^4 T_4(\lambda) + o(\Omega^6)$$

где коэффициенты $T_{2k}(\lambda)$ $(k=0, 1, 2, \dots)$ являются функциями параметра λ:

$$T_0 = \pi B\left(1 - \frac{b^2}{16} + \frac{11b^4}{24\cdot 8\cdot 16}\right), \qquad b = \frac{\pi}{\lambda}$$

$$T_2 = \pi B^2(t_{20} + t_{22}/\lambda^2 + t_{24}/\lambda^4)$$

$$t_{20} = a_0, \quad t_{22} = -{}^1\!/_8\pi^2 a_0 + \alpha_{20} - {}^1\!/_4, \quad \alpha_{20} = a_2 - {}^1\!/_2\ln 2\lambda$$

$$t_{24} = {}^9\!/_4 a^4 + \frac{17}{16\cdot 16\cdot 6}a_0 - \frac{13\pi^2}{16\cdot 6}\alpha_{20} + \frac{\pi^2}{32}$$

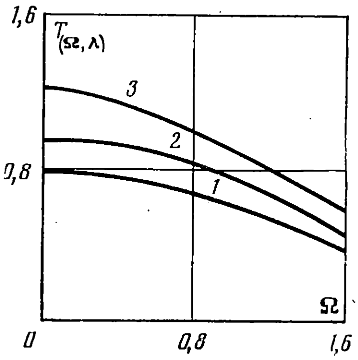
$$T_4 = \pi B^2(t_{40} + t_{42}/\lambda^2 + t_{44}/\lambda^4), \quad t_{40} = Ba_0^2 - c_0$$

$$t_{42} = Ba_0(2\alpha_{20} - {}^3\!/_{16}\pi^2 a_0 - {}^1\!/_2) + {}^1\!/_8\pi^2 c_0 - c_2$$

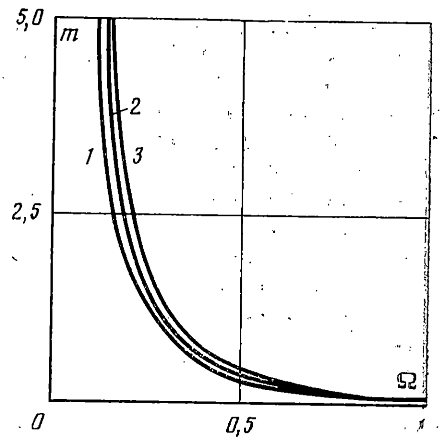
$$t_{44} = \frac{\alpha_{20}^2}{4}(4B+1) + \alpha_{20}\left(-\frac{25}{64}B\pi^2 a_0 - \frac{B}{2} - \frac{\pi^2 a_0}{12}\right) +$$

$$+ B\left(a_0^2\pi^4\frac{23}{16\cdot 16\cdot 4} + a_0^2\pi^2\frac{13}{24\cdot 8} + \frac{9}{2}a_0 a_4 + \frac{1}{16}\right) -$$

$$- \frac{9}{4}c_4 + \frac{13}{96}\pi^2 c_2 - \frac{17}{16^2\cdot 6}\pi^4 c_0 - \frac{9}{64\cdot 4}\ln 2\lambda - \frac{33}{16\cdot 64}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Воспользовавшись асимптотическими разложениями при $\lambda \gg 1$ подынтегральной функции (2.6) и взяв соответствующие интегралы, получим

$$B = m_0(1 + m_2 b^4 + m_4 b^4 + \ldots), \quad m_0 = [\ln(8/b)]^{-1}$$

$$m_2 = {}^1/_{16}(1 - {}^1/_3 m_0), \quad m_4 = {}^1/_{256}({}^{23}/_{12} - {}^{433}/_{360} m_0 + {}^1/_9 m_0^2)$$

График зависимости амплитудной функции равнодействующей контактных давлений приводится на фиг. 1. Видно, что с ростом частоты Ω величина $T(\Omega)$ монотонно убывает. Кривые *1—3* соответствуют $\lambda = 5$, 10, 20.

3. Уравнение для резонансов имеет вид $T(\Omega) - m\Omega^2 = 0$. В первом приближении

$$\Omega_0 = [T_0/(T_2 + m)]^{1/2} \tag{3.1}$$

Для рассматриваемой задачи $\Omega_k = \pi/2$, и поэтому первое приближенное значение m_k, начиная с которой будет иметь место B-резонанс, дается формулой $m_k^0 = 4T_0/\pi^2 - T_2$. Если ограничиться членами порядка малости Ω^4, то имеем

$$T_0 - \Omega^2(m + T_2) + \Omega^4 T_4 = 0 \tag{3.2}$$

Корни этого уравнения $\mu_{1,2} = (T_2 + m \pm D^{1/2})/(2T_4)$, $\Omega_{1,2} = \mu_{1,2}^{1/2}$; $D = (m + T_2)^2 - 4T_0T_4$. Уравнение (3.2) вещественных корней не имеет при $D > 0$. При $D = 0$ находим $m = -T_2 \pm 2(T_0T_4)^{1/2}$. Численный анализ показывает, что T_0, T_2, $T_4(\lambda) > 0$, поэтому изолированный резонанс будет иметь место при $m_k > -T_2 + 2(T_0T_4)^{1/2}$.

При $D > 0$ уравнение (3.2) имеет два вещественных корня, один из которых принадлежит отрезку $[0, \pi/2]$. Если предположить, что оба корня расположены в области $[0, \pi/2]$, то m_k становится комплексной, чего быть не может.

λ	m	Ω_0	Ω_1	p
	1	0,940805	0,962285	2
	11	0,328851	0,328955	0,03
5	21	0,239978	0,239999	0,0085
	31	0,198102	0,198110	0,0041
	41	0,172520	0,172524	0,0023
	1	0,8880497	0,888407	0,8
	11	0,293605	0,293636	0,01
10	21	0,213633	0,213639	0,003
	31	0,176168	0,176170	0,0013
	41	0,153335	0,153336	0,0008
	1	0,847665	0,852098	0,3
	11	0,277459	0,277476	0,003
20	21	0,201670	0,201673	0,001
	31	0,166238	0,166239	0,0004
	41	0,144664	0,144664	0,0002

На фиг. 2 дана зависимость резонансной частоты от массы штампа и параметра λ ($\lambda=5$, 10, 20 соответствуют кривые *1*—*3*).

Видно, что с ростом массы значение резонансной частоты уменьшается. В таблице приведены значения Ω_0 и Ω_1 и относительной погрешности $p=(\Omega_1-\Omega_0)/\Omega_0\cdot 100\%$ при $\lambda=5$, 10, 20 и различных массах штампа. Анализ показывает, что при достаточно больших массах m, а также с ростом параметра λ можно ограничиться первым приближением (3.1) для расчета изолированного резонанса $\Omega_0\in[0, \pi/2]$. С ростом относительной толщины слоя λ значение критической безразмерной массы падает, а абсолютной (размерной) — растет.

Авторы благодарят И. И. Воровича за обсуждение работы и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
2. *Александров В. М., Чебаков М. И.* О методе однородных решений в смешанных задачах теории упругости для усеченного клина и кольцевого сектора.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 5, с. 790—798.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию 9.VII.1986