МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1987

УДК 539.3

КОНИЧЕСКИЙ ТОНКОСЛОЙНЫЙ РЕЗИНОМЕТАЛЛИЧЕСКИЙ ЭЛЕМЕНТ

КРУГЛЯКОВА В. И., МИЛЯКОВА Л. В.

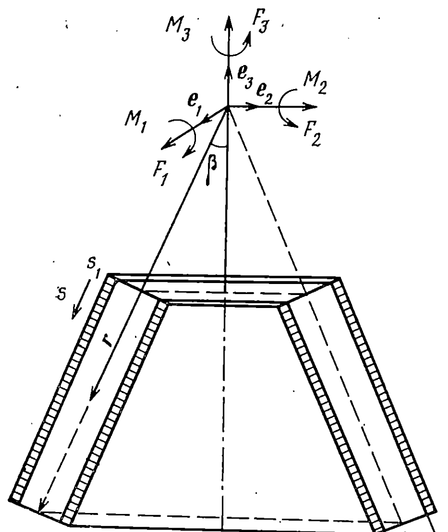
Тонкослойные резинометаллические элементы, представляющие собой скрепленные чередующиеся слои резины и металла, находят широкое применение в машиностроении. Малая сжимаемость и хорошая сдвиговая деформативность резины, обеспечивающие анизотропию жесткостных свойств таких элементов, наряду с другими преимуществами (например, возможность работы без смазки, при запыленности), обусловливают их использование в качестве подшипников, компенсаторов, элементов передач и др.

В [1] развита общая теория тонкослойных резинометаллических элементов, сводящая отыскание основного медленноменяющегося напряженно-деформированного состояния элемента к решению двумерной задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца, что для сжатия плоских элементов совпало с результатом [2]. Предложенная в [1] теория позволяет рассматривать различные формы резинометаллических элементов (плоские, цилиндрические, сферические) и ниже применяется к определению жесткости тонкослойного конического элемента, находящегося под действием всех составляющих главного вектора и главного момента сил.

1. Для малосжимаемой резины задача Дирихле для уравнения Гельмгольца имеет вид [1]:

$$a^{\mu\omega}\nabla_\mu\nabla_\omega\theta-6\rho^2h^{-2}\theta=-6\rho^2h^{-3}[U_n+c_{\alpha\gamma}(r\cdot r^{\gamma})\Omega^{(\alpha)}]$$
$$\theta|_g=0,\quad \rho^2=2G/(K-{}^2/_3G)\approx 2G/K\ll 1 \tag{1.1}$$

где $a^{\mu\omega}$, $c_{\alpha\gamma}$ – компоненты метрического и дискриминантного тензоров на срединной поверхности тонкого резинового слоя постоянной толщиной h, ∇_i – ковариантная производная, r – проекция радиус-вектора произвольной материальной точки на срединную поверхность, U_n – нормальная составляющая вектора жесткого перемещения, $\Omega^{(i)}$ – компоненты вектора поворота, g – граничный контур.



В качестве разрешающей функции принято относительное изменение объема θ, которое в предположении малой толщины слоя является функцией лишь криволинейных координат $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$ на срединной поверхности слоя: $\theta=\theta(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})$. Определив функцию θ из (1.1), можно подсчитать перемещения, компоненты тензоров деформаций, напряжений и найти главный вектор и главный момент напряжений, действующих на лицевых поверхностях резинометаллического элемента по формулам (S – площадь срединной поверхности элемента):

$$\mathbf{F}=\int_S (\sigma^{\alpha 3}\mathbf{r}_\alpha+\sigma^{33}\mathbf{n})\,dS \tag{1.2}$$

$$\mathbf{M}=\int_S (\mathbf{r}+{}^1/_2 h\mathbf{n})\times(\sigma^{\alpha 3}\mathbf{r}_\alpha+\sigma^{33}\mathbf{n})\,dS$$

2. Рассмотрим однослойный конический элемент (фигура), используя в качестве криволинейных ортогональных координат расстояние вдоль образующей S и расстояние от срединной поверхности слоя ξ. Радиус-вектор произвольной точки срединной поверхности зададим составляющими по осям неподвижной системы координат с ортами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и началом в вершине конуса (β — угол конусности): $\mathbf{r}=s\sin\beta\cos\varphi\mathbf{e}_1+s\sin\beta\sin\varphi\mathbf{e}_2-$ $-s\cos\beta\mathbf{e}_3$. Составляющие векторов смещения и поворота записываются следующим образом:

$$U_n=\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}=\cos\beta(U_1\cos\varphi+U_2\sin\varphi)+U_3\sin\beta$$

$$\Omega^{(1)}=\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{r}^{(1)}=\sin\beta(\Omega_1\cos\varphi+\Omega_2\sin\varphi)-\Omega_3\cos\beta$$

$$\Omega^{(2)}=\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{r}^{(2)}=(-\Omega_1\sin\varphi+\Omega_2\cos\varphi)/(s\sin\beta)$$

Здесь U_i, Ω_i ($i=1, 2, 3$) — компоненты жесткого смещения и поворота в прямоугольной декартовой системе координат.

Задача Дирихле (1.1) для конического слоя принимает вид

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial s^2}+\frac{1}{s}\frac{\partial\theta}{\partial s}+\frac{1}{s^2\sin^2\beta}\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2}-6\rho^2h^{-2}\theta=-6\rho^2h^{-3}[\cos\beta(U_1\cos\varphi+U_2\sin\varphi)+$$

$$+U_3\sin\beta+s(\Omega_1\sin\varphi-\Omega_2\cos\varphi)],\qquad \theta|_{s=s_1}=0,\qquad \theta|_{s=s_2}=0 \tag{2.1}$$

Из правой части уравнения (2.1) и однородных граничных условий следует, что решение будет иметь следующую зависимость от φ:

$$\theta(s,\varphi)=\theta_0(s)+\theta_1(s)\cos\varphi+\theta_2(s)\sin\varphi$$

3. Симметричной деформации слоя отвечает осевое сжатие (растяжение) силой F_3 и кручение моментом M_3 (фиг. 1). Введем безразмерную координату $\zeta=\sqrt{6}\rho s/h$ и запишем уравнение симметричного случая

$$\frac{d^2\theta_0}{d\zeta^2}+\frac{1}{\zeta}\frac{d\theta_0}{d\zeta}-\theta_0=-\frac{U_3}{h}\sin\beta$$

$$\theta_0(\zeta_1)=0,\ \ \theta_0(\zeta_2)=0$$

Решение этой задачи имеет вид $\theta_0=U_3\sin\beta[1+AI_0(\zeta)+BK_0(\zeta)]/h$, где произвольные постоянные, определенные из граничных условий задачи, даются выражениями ($I_0(\zeta)$, $K_0(\zeta)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка от вещественного аргумента):

$$A=[K_0(\zeta_1)-K_0(\zeta_2)]/\Delta_0,\ \ B=[I_0(\zeta_2)-I_0(\zeta_1)]/\Delta_0$$

$$\Delta_0=I_0(\zeta_1)K_0(\zeta_2)-I_0(\zeta_2)K_0(\zeta_1)$$

$$\zeta_1=\sqrt{6}\rho s_1/h,\ \ \zeta_2=\sqrt{6}\rho s_2/h$$

Подсчитав по найденному решению компоненты тензора напряжений [1], подставив их в (1.2) и проинтегрировав по площади срединной поверхности тонкого резинового слоя, получим соотношения, связывающие действующие силу и момент с компонентами жесткого перемещения U_3 и поворота Ω_3: $F_3=KSB_{33}U_3/h$, $M_3=GJ_zB_{66}\Omega_3/h$, где $S=\pi(s_2^2-s_1^2)\sin\beta$ — площадь боковой поверхности конуса, $J_z^{1/2}=\pi(s_2^4-s_1^4)\sin^3\beta$ — момент инерции площади боковой поверхности относительно оси вращения, а коэффициенты жесткости имеют вид (интегрирование по ζ проводится в пределах от ζ_1 до ζ_2):

$$B_{33}=\sin^2\beta+{}^1/_2\rho^2\cos^2\beta+2\sin^2\beta\Bigl\{A\Bigl[\zeta_2I_1(\zeta_2)-\zeta_1I_1(\zeta_1)+$$

$$+\rho\sqrt{{}^3/_2}\operatorname{ctg}\beta\int\zeta I_1(\zeta)\,d\zeta\Bigr]+B\Bigl[\zeta_2K_1(\zeta_2)-\zeta_1K_1(\zeta_1)+$$

$$+\rho\sqrt{^3/_2}\operatorname{ctg}\beta\int\zeta K_1(\zeta)\,d\zeta\Big]\Big\}\Big/(\zeta_2^2-\zeta_1^2)$$

$$B_{66}=1+4(^2/_3)^{1/2}\rho\operatorname{ctg}\beta(\zeta_2^3-\zeta_1^3)/(\zeta_2^4-\zeta_1^4)+3\rho^2\operatorname{ctg}^2\beta/(\zeta_1^2+\zeta_2^2) \qquad (3.1)$$

Заметим, что коэффициент B_{66} не зависит от функции θ_0.

Входящие в (3.1) интегралы от функций Бесселя могут быть выражены через функции Струве $L_0(x)$ и $L_1(x)$ [2] ($n=0{,}1$ и под Z_0 следует понимать любую из функций I_0, K_0):

$$\int_0^x Z_0(x)\,dx=xZ_0(x)+\frac{\pi x}{2}\left[Z_0(x)L_1(x)-Z_1(x)L_0(x)\right]$$

4. Обратносимметричная деформация элемента вызывается сдвигом силой F_1, изгибом моментом M_2 или силой F_2 и моментом M_1 (фиг. 1). Оба случая сводятся к решению уравнений Бесселя, отличающихся правыми частями ($\theta=\{\theta_1,\theta_2\}T$ — вектор-столбец искомого решения):

$$\frac{d^2\theta}{d\zeta^2}+\frac{1}{\zeta}\frac{d\theta}{d\zeta}-\left(1+\frac{\nu^2}{\zeta^2}\right)\theta=-\frac{1}{h}\left[\cos\beta\begin{Bmatrix}U_1\\U_2\end{Bmatrix}+\frac{\zeta h}{\sqrt{6}\,\rho}\begin{Bmatrix}-\Omega_2\\\Omega_1\end{Bmatrix}\right]$$

$$\theta(\zeta_1)=0,\quad \theta(\zeta_2)=0,\quad \nu=1/\sin\beta>1 \qquad (4.1)$$

Решение уравнения (4.1) выражается через модифицированные функции Бесселя первого и второго рода I_ν, K_ν, нецелого показателя ν.

Определив частное решение методом вариации произвольных постоянных, запишем общее решение в окончательном виде

$$\theta=\begin{Bmatrix}\theta_1\\\theta_2\end{Bmatrix}=\frac{\cos\beta}{h}\left[I_\nu(\zeta)\,(a_1-g_1(\zeta))+K_\nu(\zeta)\,(a_2+f_1(\zeta))\right]\begin{Bmatrix}U_1\\U_2\end{Bmatrix}+$$

$$+\frac{1}{\rho\sqrt{6}}\left[I_\nu(\zeta)\,(d_1-g_2(\zeta))+K_\nu(\zeta)\,(d_2+f_2(\zeta))\right]\begin{Bmatrix}-\Omega_2\\\Omega_1\end{Bmatrix} \qquad (4.2)$$

Произвольные постоянные a_i, d_i определяются из граничных условий задачи по формулам

$$a_1=[K_\nu(\zeta_1)K_\nu(\zeta_2)\,(f_1^{(2)}-f_2^{(2)})+I_\nu(\zeta_1)K_\nu(\zeta_2)g_1^{(1)}\,I_\nu(\zeta_2)K_\nu(\zeta_1)g_1^{(2)}]/\Delta$$

$$a_2=[I_\nu(\zeta_1)I_\nu(\zeta_2)\,(g_1^{(2)}-g_1^{(1)})-I_\nu(\zeta_1)K_\nu(\zeta_2)f_1^{(2)}+I_\nu(\zeta_2)K_\nu(\zeta_1)f_1^{(1)}]/\Delta$$

$$d_1=[K_\nu(\zeta_1)K_\nu(\zeta_2)\,(f_2^{(2)}-f_2^{(1)})+I_\nu(\zeta_1)K_\nu(\zeta_2)g_2^{(1)}-I_\nu(\zeta_2)K_\nu(\zeta_1)g_2^{(2)}]/\Delta$$

$$d_2=[I_\nu(\zeta_1)I_\nu(\zeta_2)\,(g_2^{(2)}-g_2^{(1)})-I_\nu(\zeta_1)K_\nu(\zeta_2)f_2^{(2)}+I_\nu(\zeta_2)K_\nu(\zeta_1)f_2^{(1)}]/\Delta$$

$$\Delta=I_\nu(\zeta_1)K_\nu(\zeta_2)-I_\nu(\zeta_2)K_\nu(\zeta_1)$$

$$f_1(\zeta)=\int\zeta I_\nu(\zeta)\,d\zeta,\qquad f_2(\zeta)=\int\zeta^2I_\nu(\zeta)\,d\zeta$$

$$g_1(\zeta)=\int\zeta K_\nu(\zeta)\,d\zeta,\qquad g_2(\zeta)=\int\zeta^2K_\nu(\zeta)\,d\zeta$$

$$f_i^{(j)}=f_i(\zeta_j),\qquad g_i^{(j)}=g_i(\zeta_j)\qquad (i,j=1,2)$$

Интегралы здесь могут быть взяты по формулам [2]:

$$\int x^\lambda I_\nu(x)\,dx=\exp(-^1/_2 i\pi\lambda)\left[(\lambda+\nu-1)\,xI_\nu(x)\,s_{\lambda-1,\nu-1}[x\exp(-^1/_2 i\pi)]+\right.$$
$$\left.+ixI_{\nu-1}(x)\,s_{\lambda,\nu}[x\exp(^1/_2 i\pi)]\right]$$

$$\int x^\lambda K_\nu(x)\,dx=\exp(-^1/_2 i\pi\lambda)\,(\lambda+\nu-1)\,xK_\nu(x)\,s_{\lambda-1,\nu-1}[x\exp(^1/_2 i\pi)]+$$
$$+\exp[-^1/_2 i(\lambda+1)\pi]\,xK_{\nu-1}(x)\,s_{\lambda,\nu}[x\exp(^1/_2 i\pi)]$$

Подсчитав по решению (4,2) составляющие внешней краевой нагрузки (1.2), получим в квадратурах выражения для коэффициентов жесткости, точные в рамках построенной в [1] линейной теории (интегрирование по ζ проводится в пределах от ζ_1 до ζ_2):

$$F_1=KS(B_{11}U_1/h-B_{12}\Omega_2),\quad F_2=KS(B_{11}U_2/h+B_{12}\Omega_1) \tag{4.3}$$
$$M_2=KSh(-B_{21}U_1/h+B_{22}\Omega_2),\quad M_1=KSh(B_{21}U_2/h+B_{22}\Omega_1)$$
$$B_{11}=B_{11}{}^0-(^3/_2)^{1/2}\rho^2\cos^2\beta(\zeta_2{}^2-\zeta_1{}^2)^{-1}\int[b_1(\zeta)+b_2(\zeta)]d\zeta$$
$$B_{12}=B_{21}=B_{12}{}^0-{}^1/_2\cos\beta(\zeta_2{}^2-\zeta_1{}^2)^{-1}\int[b_3(\zeta)+b_4(\zeta)]d\zeta$$
$$B_{22}=B_{22}{}^0-[2\sqrt{6}\,\rho(\zeta_2{}^2-\zeta_1{}^2)]^{-1}\int\zeta[b_3(\zeta)+b_4(\zeta)]d\zeta$$
$$b_1(\zeta)=(a_1-g_1(\zeta))[\operatorname{ctg}\beta-(^2/_3)^{1/2}\zeta/\rho]I_\nu(\zeta)$$
$$b_2(\zeta)=(a_2+f_1(\zeta))[\operatorname{ctg}\beta-(^2/_3)^{1/2}\zeta/\rho]K_\nu(\zeta)$$
$$b_3(\zeta)=(d_1-g_2(\zeta))[\operatorname{ctg}\beta-(^2/_3)^{1/2}\zeta/\rho]I_\nu(\zeta)$$
$$b_4(\zeta)=(d_2+f_2(\zeta))[\operatorname{ctg}\beta-(^2/_3)^{1/2}\zeta/\rho]K_\nu(\zeta)$$
$$B_{11}{}^0={}^1/_4\rho^2(1+\sin^2\beta),\quad B_{12}{}^0=\rho\cos\beta(\zeta_2{}^3-\zeta_1{}^3)[6\sqrt{6}\,(\zeta_2{}^2-\zeta_1{}^2)]^{-1}-{}^1/_4\rho^2\sin\beta$$
$$B_{22}{}^0={}^1/_{16}\rho^2(1+\sin^2\beta)-\rho\sin\beta\cos\beta(\zeta_2{}^3-\zeta_1{}^3)[6\sqrt{6}\,(\zeta_2{}^2-\zeta_1{}^2)]^{-1}+$$
$$+{}^1/_{48}\cos^2\beta(\zeta_1{}^2+\zeta_2{}^2)$$

В предельном случае, когда угол $\beta=\pi/2$ и $\nu=1$ из формул (3.1) и (4.3) получаются приведенные в [1] коэффициенты жесткости кольцевого плоского резинометаллического элемента.

5. Вычисление функций Бесселя нецелого порядка и интегралов от них при помощи рядов является достаточно трудоемким процессом. Привлекая выражение для энергии деформации из [3] и задаваясь степенными приближениями для искомой функции θ, удовлетворяющими однородным граничным условиям, можно вариационным путем построить простые приближенные выражения для коэффициентов жесткости.

Принимая одноконстантное приближение для функции $\theta_0=a(s-s_1)(s-s_2)$, получаем формулу для коэффициента жесткости в случае сжатия конического элемента

$$B_{33}={}^1/_2\rho^2\cos^2\beta-{}^1/_{12}\sin^2\beta(\zeta_2-\zeta_1)^2[1+{}^1/_{10}(\zeta_2-\zeta_1)^2]^{-1}[1-\sqrt{6}\rho\operatorname{ctg}\beta/(\zeta_1+\zeta_2)] \tag{5.1}$$

При двухконстантном приближении искомой функции $\theta_0=a_1(s-s_1)(s-s_2)+ +a_2(s-s_1)^2(s-s_2)^2$ жесткость определяется по формуле

$$B_{33}={}^1/_2\rho^2\cos\beta+\sin^2\beta(\zeta_2-\zeta_1)^2[1-\sqrt{6}\rho\operatorname{ctg}\beta/(\zeta_1+\zeta_2)][1-{}^1/_{90}(\zeta_2-\zeta_1)^2]/\Delta_2$$
$$\Delta_2=12+{}^4/_3(\zeta_2-\zeta_1)^2+{}^1/_{84}(\zeta_2-\zeta_1)^4$$

В обратносимметричном случае при одноконстантном приближении функции θ получаем следующие приближенные выражения для коэффициентов жесткости

$$B_{11}=B_{11}{}^0+{}^1/_{24}\cos^2\beta(\zeta_2-\zeta_1)[1-\sqrt{6}\rho\operatorname{ctg}\beta/(\zeta_1+\zeta_2)]/\Delta_1$$
$$B_{12}=B_{21}=B_{12}{}^0+\cos\beta(\zeta_2-\zeta_1)^2[1-\sqrt{6}\,\rho\operatorname{ctg}\beta/(\zeta_1+\zeta_2)](\zeta_1+\zeta_2+$$
$$+2(\zeta_2{}^3-\zeta_1{}^3)/(\zeta_2{}^2-\zeta_1{}^2)]/(120\sqrt{6}\,\rho\Delta_1) \tag{5.2}$$
$$B_{22}=B_{22}{}^0+(\zeta_2-\zeta_1)^2[\zeta_1+\zeta_2+2(\zeta_2{}^3-\zeta_1{}^3)/(\zeta_2{}^2-\zeta_1{}^2)]\times$$
$$\times[\zeta_1+\zeta_2+2(\zeta_2{}^3-\zeta_1{}^3)/(\zeta_2{}^2-\zeta_1{}^2)-5\rho(^3/_2)^{1/2}\operatorname{ctg}\beta]/(3600\rho^2\Delta_1)$$
$$\Delta_1=1+{}^1/_{10}(\zeta_2-\zeta_1)^2+{}^1/_2[\zeta_1{}^2+\zeta_2{}^2-8\zeta_1\zeta_2+$$
$$+12\ln(\zeta_2/\zeta_1)\zeta_1{}^2\zeta_2{}^2/(\zeta_2{}^2-\zeta_1{}^2)]\sin^{-2}\beta(\zeta_2-\zeta_1)^{-2}$$

Из полученных выражений для коэффициентов жесткости видно, что их величина характеризуется двумя безразмерными совмещенными параметрами ζ_1, ζ_2 включающими в себя как тонкостенность слоя s/h, так и показатель сжимаемости резины ρ.

Ниже приводятся значения коэффициентов жесткости однослойного конического тонкого элемента при $\beta=47°$, $\zeta_1=2{,}29$, $\zeta_2=3{,}85$, $\nu=1{,}36$; $\rho^2=1{,}10^{-3}$ (первые две строки).

B_{11}	B_{12}	B_{22}	B_{33}	B_{66}
0,0358	2,0334	116,43	0,0873	1,0232
0,0357	2,0292	116,07	0,0871	1,0232
$0{,}536\cdot10^{-3}$	$0{,}268\cdot10^{-3}$	38,403	0,0967	1,0

Точные значения жесткостей (первая строка) вычислялись с использованием ЭВМ. Приближенные величины коэффициентов, подсчитанные по формулам (5.1), (5.2) (вторая) в данном примере хорошо согласуются с точными. Здесь же жесткость конического элемента сопоставляется с жесткостью кольцевого плоского элемента тех же размеров (третья строка). Для соответствующего сферического элемента [3] жесткость на сжатие практически совпала с жесткостью конического: $B_{33}=0{,}0872$. Пример и проведенные вычисления показали, что для определения жесткостей при средних встречающихся на практике значениях совмещенных параметров ζ_1 и $\zeta_2 (\leqslant 10)$ с достаточной степенью точности можно ограничиться формулами одноконстантного приближения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черных К. Ф., Милякова Л. В.* Тонкие резинометаллические элементы.— Вест. ЛГУ, 1981, № 19, вып. 4, с. 88—96.
2. *Черных К. Ф., Милякова Л. В.* Вариационный подход к расчету тонких резинометаллических элементов.— В кн.: Механика деформируемого твердого тела. Тула: Политехн. ин-т, 1983, с. 151—156.
3. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М., 1983, 750 с.

Ленинград

Поступила в редакцию 18.II.1985