

УДК 539.3.01

## НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ВДАВЛИВАНИЕ ДВУХ КОЛЬЦЕВЫХ ШТАМПОВ В УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

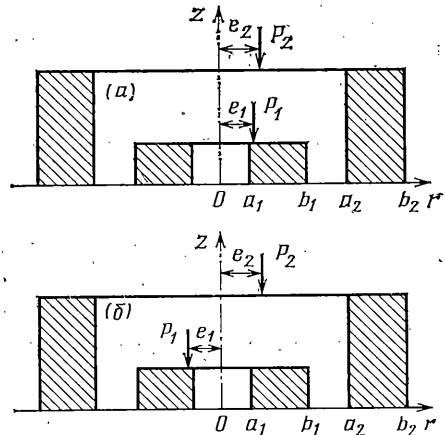
БЕЛЯЕВ С. Ю.

При помощи метода парных интегральных уравнений исследуемая задача сводится к системе интегральных уравнений, допускающей эффективное решение методом последовательных приближений. Получены таблицы коэффициентов связи между силами (моментами), приложенными к штампам, и перемещениями (углами поворотов) этих штампов. Определены коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности ребер штампов и условия полного соприкосновения штампов с полупространством.

1. Рассматривается задача о вдавливании двух жестких кольцевых штампов в упругое полупространство под действием вертикальных внецентренно приложенных сил. Линии действия этих сил пересекают плоскую границу полупространства в точках  $r=e_1$ ,  $\varphi=\varphi^*$ ;  $r=e_2$ ,  $\varphi=0$  ( $r$ ,  $z$ ,  $\varphi$  — цилиндрические координаты). Точка  $r=e_1$ ,  $\varphi=\varphi^*$  соответствует силе, приложенной к внутреннему штампу, а точка  $r=e_2$ ,  $\varphi=0$  — силе, приложенной к внешнему штампу. Предполагается, что  $\varphi^*$  может принимать два значения: 0 (фиг. 1, а) и  $\pi$  (фиг. 1, б). Основания штампов считаются плоскими, трение между штампам и полупространством отсутствует.

Граничные условия задачи имеют вид

$$\begin{aligned} \tau_{zx}|_{z=0} &= 0, \\ \tau_{zy}|_{z=0} &= 0, \quad 0 < r < \infty \\ \sigma_z|_{z=0} &= 0, \\ r < a_1, \quad b_1 < r < a_2, \quad r > b_2 & \quad (1.1) \\ u_z|_{z=0} &= \varepsilon_n + \vartheta_n r \cos \varphi, \\ a_n < r < b_n \quad (n=1, 2) \end{aligned}$$



Фиг. 1

где  $\varepsilon_n$  — осевые смещения штампов, а  $\vartheta_n$  — углы наклона штампов. С помощью соотношений Папковича — Нейбера поставленная задача сводится [1] к определению единственной гармонической в области  $r > 0$ ,  $z > 0$ ,  $0 \leq \varphi < \pi$  функции  $u(r, z, \varphi)$ , удовлетворяющей на границе полупространства смешанным условиям

$$\begin{aligned} \partial u / \partial z|_{z=0} &= 0, \quad r < a_1, \quad b_1 < r < a_2, \quad r > b_2 \\ u|_{z=0} &= (\varepsilon_n + \vartheta_n r \cos \varphi) G / (1 - \nu), \quad a_n < r < b_n \end{aligned} \quad (1.2)$$

Через эту функцию выражаются все перемещения и напряжения, в частности

$$\sigma_z = \partial u / \partial z - z \partial^2 u / \partial z^2 \quad (1.3)$$

2. Для определения функции  $u$  представим ее в виде

$$u = G(u_1 + u_2 \cos \varphi) / (1 - \nu) \quad (2.4)$$

где  $u_1(r, z)$ ,  $u_2(r, z)$  удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \partial u_i / \partial z|_{z=0} &= 0, & r < a_1, & & b_1 < r < a_2, & & r > b_2 \\ u_1|_{z=0} &= \varepsilon_n; & u_2|_{z=0} &= \vartheta_n r, & a_n < r < b_n \end{aligned} \quad (2.2)$$

Введем новые неизвестные функции  $\varphi_i$ ,  $\psi_i$ ,  $\omega_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  по формулам

$$\begin{aligned} u_i &= \int_0^\infty U_i(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \quad (i=1, 2), & U_i &= \int_0^a t_1 \varphi_i(t) L_i(\lambda t) dt + \\ &+ \int_a^b t_1 \psi_i(t) L_i(\lambda t) dt + \int_b^\infty t_1 \omega_i(t) L_{i-1}(\lambda t) dt + \int_0^c t_2 \alpha_i(t) L_i(\lambda t) dt + \\ &+ \int_c^1 t_2 \beta_i(t) L_{i-1}(\lambda t) dt + \int_1^\infty t_2 \gamma_i(t) L_{i-1}(\lambda t) dt \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} L_i(\rho) &= \sqrt{1/2} \pi \rho J_{i-1/2}(\rho) \\ t_1 &= t/\sqrt{|b^2 - t^2|}, & t_2 &= t/\sqrt{|c^2 - t^2|} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь и далее используются обозначения:  $a=a_1$ ,  $b=b_1$ ,  $c=a_2$ ,  $b_2=1$ .

Подставляя соотношения (2.3) в (2.2) и используя технику метода парных интегральных уравнений [1, 2], получим систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода для определения введенных выше функций

$$\varphi_i(t) = t t_1^{-1} \int_b^\infty \tau_1 \omega_i(\tau) F_{i1} d\tau, \quad t \leq a \quad (2.5)$$

$$\psi_i(t) = 2\pi^{-1} M_{i1} - t_1^{-1} t_2 \alpha_i(t) - \int_b^c \tau \tau_1^{-1} \tau_2 \alpha_i(\tau) F_{i2} d\tau, \quad a \leq t \leq b$$

$$\omega_i(t) = t_1^{-1} \left[ \int_0^a \tau \tau_1 \varphi_i(\tau) F_{i3} d\tau + \int_a^b \tau \tau_1 \psi_i(\tau) F_{i3} d\tau \right], \quad t \geq b$$

$$\alpha_i(t) = t^{-1} t_2 \left[ \int_c^1 \tau_2 \beta_i(\tau) F_{i4} d\tau + \int_1^\infty \tau_2 \gamma_i(\tau) F_{i4} d\tau \right], \quad t \leq c$$

$$\beta_i(t) = 2\pi^{-1} M_{i2} - t_1 t_2^{-1} \omega_i(t) - \int_b^c \tau \tau_1 \tau_2^{-1} \omega_i(\tau) F_{i5} d\tau, \quad c \leq t \leq 1$$

$$\gamma_i(t) = t_2^{-1} \int_0^c \tau \tau_2 \alpha_i(\tau) F_{i6} d\tau, \quad t \geq 1$$

$$\tau_1 = \tau/\sqrt{|b^2 - \tau^2|}, \quad \tau_2 = \tau/\sqrt{|c^2 - \tau^2|} \quad (2.6)$$

$$F_{im} = 2\Phi_{im}/(\pi|t^2 - \tau^2|), \quad \Phi_{1m} = 1, \quad \Phi_{21} = \Phi_{24} = R(t/\tau)$$

$$\Phi_{23} = \Phi_{26} = R(\tau/t), \quad \Phi_{22} = t/\tau, \quad \Phi_{25} = \tau/t$$

$$R(\rho) = 1/\rho - [(1-\rho^2)/(2\rho^2)] \ln[(1+\rho)/(1-\rho)]$$

$$M_{1n} = \varepsilon_n, \quad M_{21} = \vartheta_1 t, \quad M_{22} = \vartheta_2 (2t^2 - c^2)/t$$

Система (2.5) при  $i=1$  совпадает с исследованной в [2] и имеющей в классе непрерывных функций единственное решение, которое может быть получено методом последовательных приближений.

Доказательство, приведенное в [2], автоматически распространяется на случай  $i=2$ , если заметить, что  $|\Phi_{2m}| \leq 1$ . Следовательно, все сказанное для случая  $i=1$  справедливо и при  $i=2$ .

3. Решение системы (2.5) позволяет получить численную связь между перемещениями штампов и силами, приложенными к этим штампам,

$a_1$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$2/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$3/6$
$b_1$	$2/6$	$2/6$	$3/6$	$3/6$	$2/6$	$3/6$	$4/6$	$4/6$
$a_2$	$3/6$	$4/6$	$4/6$	$4/6$	$5/6$	$5/6$	$5/6$	$5/6$
$p_{11}$	1,87	1,64	3,06	2,88	1,54	2,62	4,21	3,82
$p_{22}$	5,19	4,68	5,60	5,53	4,12	4,61	5,52	5,40
$-p_{12}$	1,540	1,20	2,34	2,23	0,958	1,69	2,89	2,68
$10q_{11}$	1,06	1,01	3,74	3,67	0,995	3,49	9,16	9,79
$q_{22}$	2,72	2,66	2,80	2,80	2,49	2,57	2,80	2,79
$-10q_{12}$	0,817	0,654	2,62	2,57	0,507	1,89	5,51	5,35
$-10\sigma_{11}^{(1)}$	3,01	2,76	1,93	4,66	2,60	1,77	1,39	5,76
$-\sigma_{21}^{(1)}$	0,957	0,821	1,05	1,09	0,761	0,862	1,12	1,18
$10\sigma_{31}^{(1)}$	4,20	2,65	5,62	5,42	2,14	3,88	7,05	6,64
$10\sigma_{41}^{(1)}$	0,575	0,829	1,41	1,31	1,25	2,11	3,25	2,91
$10\sigma_{12}^{(1)}$	2,27	1,87	1,22	3,14	1,53	0,964	0,689	3,34
$10\sigma_{22}^{(1)}$	8,33	6,28	8,88	9,12	4,92	6,05	8,97	9,36
$-\sigma_{32}^{(1)}$	0,630	0,581	0,821	0,808	0,692	0,809	1,05	1,03
$-10\sigma_{42}^{(1)}$	6,97	7,37	7,84	7,77	8,36	8,94	9,80	9,61
$-10\sigma_{11}^{(2)}$	0,533	0,516	0,339	1,64	0,510	0,326	0,250	3,09
$-10\sigma_{21}^{(2)}$	4,32	4,10	6,77	6,92	4,04	6,23	9,42	9,76
$10\sigma_{31}^{(2)}$	0,915	0,447	1,97	1,95	0,281	1,08	3,37	3,30
$100\sigma_{41}^{(2)}$	0,435	0,696	2,35	2,29	1,12	3,93	9,99	9,60
$10\sigma_{12}^{(2)}$	0,360	0,301	0,177	0,945	0,239	0,138	0,0914	1,43
$10\sigma_{22}^{(2)}$	3,49	2,74	5,18	5,28	2,11	3,62	6,60	6,74
$-10\sigma_{32}^{(2)}$	3,07	4,36	5,46	5,46	7,11	7,55	9,02	9,00
$-\sigma_{42}^{(2)}$	1,28	1,29	1,30	1,30	1,34	1,35	1,39	1,39

а также между углами поворотов штампов и моментами

$$P_n = G(p_{n1}\epsilon_1 + p_{n2}\epsilon_2) / (1-\nu) \quad (n=1, 2) \quad (3.1)$$

$$P_n h_n = G(q_{n1}\vartheta_1 + q_{n2}\vartheta_2) / (1-\nu), \quad h_1 = e_1 \cos \varphi^*, \quad h_2 = e_2 \quad (3.2)$$

Используя формулы

$$P_n = -2\pi \int_{a_n}^{b_n} \sigma_z|_{z=0} r dr, \quad P_n h_n = - \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_{a_n}^{b_n} r^2 \sigma_z|_{z=0} dr$$

и соотношения (1.3), (2.1), (2.3), (2.5), аналогично [2] получим

$$p_{1j} = 2\pi \int_b^{\infty} t_1 \omega_1(t) dt, \quad p_{2j} = 2\pi \left[ \int_c^1 t_2 \beta_1(t) dt + \int_1^{\infty} t_2 \gamma_1(t) dt \right]$$

$$q_{1j} = 2b \left[ \int_0^a \varphi_2(t) T dt + \int_a^b \psi_2(t) T dt \right] \quad (3.3)$$

$$T = t_1 \left[ \frac{t^2 + b^2}{2bt^2} \ln \frac{b+t}{b-t} - \frac{1}{t} \right], \quad q_{2j} = 2\pi \left[ \int_0^c \frac{tt_2 \alpha_2(t) dt}{\sqrt{1-t^2}} + \right.$$

$$\left. + 2 \int_c^1 t_2 \beta_2(t) dt + \int_1^{\infty} t_2 \gamma_2(t) \left( 2 - \frac{2t^2-1}{\sqrt{t^2-1}} \right) dt \right]$$

где предполагается, что если  $j=1$ , то система (2.5) решается при  $\epsilon_1=1$ ,  $\epsilon_2=0$  ( $i=1$ ) и  $\vartheta_1=1$ ,  $\vartheta_2=0$  ( $i=2$ ), а если  $j=2$ , то при  $\epsilon_1=0$ ,  $\epsilon_2=1$  ( $i=1$ ) и  $\vartheta_1=0$ ,  $\vartheta_2=1$  ( $i=2$ ).

Результаты расчетов по формулам (3.3) приведены в таблице.

4. Полученное решение задачи верно лишь в том случае, если основания штампов полностью соприкасаются с полупространством. Очевидно, что это условие будет выполнено, если оно выполнено в крайних точках оснований штампов, т. е. на окружностях  $r=r_k$  ( $r_1=a_1$ ,  $r_2=b_1$ ,  $r_3=a_2$ ,  $r_4=b_2$ ). Последнее имеет место, если

$$\sigma_k = \frac{1-\nu}{G} \lim_{r \rightarrow r_k} \sqrt{|r^2 - r_k^2|} |\sigma_z|_{z=0} \leq 0 \quad (k=\overline{1,4}) \quad (4.1)$$

где при  $r \rightarrow r_1$ ,  $r_3$  предел берется справа, а при  $r \rightarrow r_2$ ,  $r_4$  — слева. Представим  $\sigma_k$  в виде

$$\sigma_k = \varepsilon_1 \sigma_{k1}^{(1)} + \varepsilon_2 \sigma_{k2}^{(1)} + (\vartheta_1 \sigma_{k1}^{(2)} + \vartheta_2 \sigma_{k2}^{(2)}) \cos \varphi \quad (4.2)$$

где коэффициенты  $\sigma_{kj}^{(i)}$  с помощью соотношений (3.1), (1.3), (2.4), (2.3) выражаются через решение системы (2.5):

$$\begin{aligned} \sigma_{1j}^{(i)} &= \frac{a[\varphi_i(a) - \psi_i(a)]}{\sqrt{b^2 - a^2}}, & \sigma_{2j}^{(i)} &= \lim_{t \rightarrow b} \frac{t\omega_i(t) - b\omega_i(b)}{\sqrt{t^2 - b^2}} \\ \sigma_{3j}^{(i)} &= \lim_{t \rightarrow c} \frac{t\alpha_i(t) - c\alpha_i(c)}{\sqrt{c^2 - t^2}}, & \sigma_{4j}^{(i)} &= \frac{\gamma_i(1) - \beta_i(1)}{\sqrt{1 - c^2}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь, как и в выражениях (3.3), предполагается, что если  $j=1$ , то система (2.5) решается при  $\varepsilon_1=1$ ,  $\varepsilon_2=0$  ( $i=1$ ) и  $\vartheta_1=1$ ,  $\vartheta_2=0$  ( $i=2$ ), а если  $j=2$ , то при  $\varepsilon_1=0$ ,  $\varepsilon_2=1$  ( $i=1$ ) и  $\vartheta_1=0$ ,  $\vartheta_2=1$  ( $i=2$ ). Численные значения  $\sigma_{kj}^{(i)}$ , полученные по формулам (4.3), приведены в таблице.

Левая часть в (4.2) достигает максимума при  $\varphi = \varphi_0$ , где

$$\varphi_0 = \pi [1 - \text{sign}(\vartheta_1 \sigma_{k1}^{(2)} + \vartheta_2 \sigma_{k2}^{(2)})] / 2.$$

Следовательно, неравенства (4.1) будут выполнены при всех  $\varphi$ , если они выполнены при  $\varphi = \varphi_0$ . Это обстоятельство позволяет записать условие полного соприкосновения штампов с полупространством в виде

$$\varepsilon_1 \sigma_{k1}^{(1)} + \varepsilon_2 \sigma_{k2}^{(1)} + |\vartheta_1 \sigma_{k1}^{(2)} + \vartheta_2 \sigma_{k2}^{(2)}| < 0 \quad (4.4)$$

Выполнение неравенства (4.4) представляет собой необходимое условие полного соприкосновения штампов с полупространством, но не достаточное, так как коэффициенты  $\sigma_{kj}^{(i)}$  вычислены в предположении такого соприкосновения. Если при некотором  $k$  неравенство (4.4) обращается в равенство, то в точке  $r=r_k$ ,  $\varphi = \varphi_0$  происходит отрыв основания штампа от полупространства.

Разрешим системы (3.1), (3.2) относительно  $\varepsilon_n$ ,  $\vartheta_n$  и подставим полученные выражения в (4.4). Будем иметь

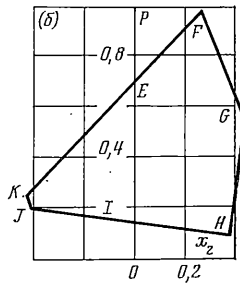
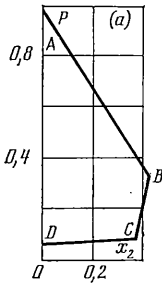
$$N_k(P_1, P_2, e_1, e_2) = P_1 s_{k1}^{(1)} + P_2 s_{k2}^{(1)} + |P_1 e_1 \cos \varphi^* s_{k1}^{(2)} + P_2 e_2 s_{k2}^{(2)}| < 0 \quad (4.5)$$

$$s_{k1}^{(i)} = (y_{22} \sigma_{k1}^{(i)} - y_{21} \sigma_{k2}^{(i)}) / (y_{11} y_{22} - y_{12} y_{21}) \quad (4.6)$$

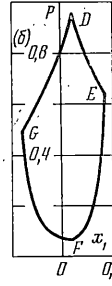
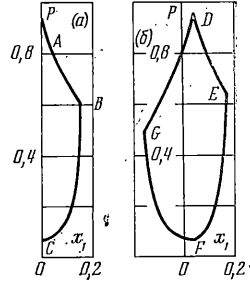
$$s_{k2}^{(i)} = (y_{11} \sigma_{k2}^{(i)} - y_{12} \sigma_{k1}^{(i)}) / (y_{11} y_{22} - y_{12} y_{21})$$

где  $y_{nj} = p_{nj}$  при  $i=1$  и  $y_{nj} = q_{nj}$  при  $i=2$ .

Сформулируем достаточные условия полного соприкосновения оснований штампов с полупространством. Если при  $P_n = P_n^0$ ,  $e_n = e_n^0$  основания штампов полностью соприкасаются с полупространством и существуют непрерывные функции  $f_n(\mu)$ ,  $g_n(\mu)$ , такие, что  $P_n^0 = f_n(\mu_0)$ ,  $e_n^0 = g_n(\mu_0)$ ,  $P_n^1 = f_n(\mu_1)$ ,  $e_n^1 = g_n(\mu_1)$  и для любого  $\mu \in [\mu_0, \mu_1]$  имеют место неравенства  $N_k(f_1(\mu), f_2(\mu), g_1(\mu), g_2(\mu)) < 0$  ( $k=\overline{1,4}$ ), то при  $P_n = P_n^1$ ,  $e_n = e_n^1$  основания штампов полностью соприкасаются с полупространством.



Фиг. 2



Фиг. 3

*Пример.* Пусть  $a_1=1/6$ ,  $b_1=1/2$ ,  $a_2=2/3$ ,  $b_2=1$ . Введем координаты  $P=P_1/P_2$ ,  $x_2=\cos \varphi^* e_2$  и перепишем неравенства (4.5) в виде

$$P < - (s_{h2}^{(1)} + \zeta s_{h2}^{(2)} x_2) / (s_{h1}^{(1)} + \zeta s_{h1}^{(2)} e_1), \quad \zeta = \text{sign}[s_{h1}^{(2)} P e_1 + s_{h2}^{(2)} x_2] \quad (k=1, 4).$$

Области, описываемые последними неравенствами при  $e_1=0$  и  $e_1=0,1$ , изображены на фиг. 2, а и б. На прямых, ограничивающих эти области, происходит отрыв оснований штампов от полупространства. На прямой  $AB$  отрыв происходит в точке  $r=a_2$ ,  $\varphi=\pi$ , на  $BC$  — в точке  $r=b_2$ ,  $\varphi=\pi$ , на  $CD$  — в точке  $r=b_1$ ,  $\varphi=0$ , на  $EF$  — в точке  $r=a_2$ ,  $\varphi=0$ , на  $FG$  — в точке  $r=a_2$ ,  $\varphi=\pi$ , на  $GH$  — в точке  $r=b_2$ ,  $\varphi=\pi$ , на  $HI$  — в точке  $r=b_1$ ,  $\varphi=\pi$ , на  $IJ$  — в точке  $r=b_1$ ,  $\varphi=0$ , на  $JK$  — в точке  $r=b_2$ ,  $\varphi=\pi$ , на  $KE$  — в точке  $r=a_2$ ,  $\varphi=\pi$ .

Введем координаты  $P=P_1/P_2$ ,  $x_1=\cos \varphi^* e_1$  и неравенства (4.5) перепишем в виде

$$P < - (s_{h2}^{(1)} + \zeta s_{h2}^{(2)} e_2) / (s_{h1}^{(1)} + \zeta s_{h1}^{(2)} x_1)$$

$$\zeta = \text{sign}[s_{h1}^{(2)} P x_1 + s_{h2}^{(2)} e_2]$$

Эти неравенства при  $e_2=0$  и  $e_2=0,1$  описывают области, изображенные на фиг. 3, а и б. На границах этих областей происходит отрыв оснований штампов от полупространства. На линии  $AB$  отрыв происходит в точке  $r=a_2$ ,  $\varphi=0$ , на  $BC$  — в точке  $r=b_1$ ,  $\varphi=\pi$ , на  $DE$  — в точке  $r=a_2$ ,  $\varphi=0$ , на  $EF$  — в точке  $r=b_1$ ,  $\varphi=\pi$ , на  $FG$  — в точке  $r=b_1$ ,  $\varphi=0$ , на  $GD$  — в точке  $r=a_2$ ,  $\varphi=\pi$ .

Очевидно, что на прямых  $AD$  (фиг. 2, а) и  $AC$  (фиг. 3, а) основания штампов полностью соприкасаются с полупространством. Воспользовавшись этим обстоятельством и сформулированными выше достаточными условиями, убеждаемся в том, что внутри областей, изображенных на фиг. 2, 3, основания штампов полностью соприкасаются с полупространством.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 220 с.
2. Беляев С. Ю. Электростатическая задача для двух колец. — Ж. техн. физики, 1982, т. 52, вып. 3, с. 419—422.

Ленинград

Поступила в редакцию  
20.IX.1985