УДК 531.39

О ЧАСТНЫХ ИНТЕГРАЛАХ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА НА СТРУНЕ

БУРОВ А. А.

Задача о движении тела на струне является важным объектом исследования теоретической механики [1–4]. Сложность ее изучения связана с тем, что для полной интегрируемости уравнений движения недостает в общем случае трех (в случае динамической симметрии тела — двух) дополнительных первых интегралов.

В публикуемой работе найдены случаи, когда уравнения движения допускают дополнительный частный интеграл, аналогичный интегралу Гесса в задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из тонкого твердого невесомого стержня OO_1, подвешенного в неподвижной точке O_1, и твердого тела, подвешенного в точке O.

Пусть G — центр масс тела, $O\xi_1\xi_2\xi_3$ — система координат, оси которой направлены по его главным осям инерции для точки O. Пусть l — длина стержня OO_1, m — масса тела, $\mathbf{I}=\operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — центральный тензор инерции, $\mathbf{v}$ — скорость движения точки O, $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный вектор вертикали, $\mathbf{e}$ — единичный вектор, направленный вдоль OO_1, $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости вращения тела, $\mathbf{a}$ — вектор OG, N — реакция стержня, g — ускорение свободного падения.

Уравнения движения, отнесенные к осям $O\xi_1\xi_2\xi_3$, можно представить в виде [4]:

$$m[(\mathbf{v}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a})^{\boldsymbol{\cdot}}+\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{v}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a})]=-mg\boldsymbol{\gamma}+N\mathbf{e} \tag{1}$$
$$l(\mathbf{e}^{\boldsymbol{\cdot}}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e})=-\mathbf{v},\qquad (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})^{\boldsymbol{\cdot}}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}=N\mathbf{e}\times\mathbf{a},\qquad \boldsymbol{\gamma}^{\boldsymbol{\cdot}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\gamma}=0$$

Под частным интегралом уравнений движения будем понимать функцию $F=F(\mathbf{v},\boldsymbol{\omega},\mathbf{e},\boldsymbol{\gamma})$, такую, что полная производная по времени в силу системы уравнений движения $F^{\boldsymbol{\cdot}}|_{(1)}$ обращается в нуль на поверхности $\{F=0\}$.

Пусть $I_1<I_2<I_3$. Будем искать частный интеграл в виде

$$F=\sqrt{I_1^{-1}-I_2^{-1}}I_1\omega_1\pm\sqrt{I_2^{-1}-I_3^{-1}}I_3\omega_3 \tag{2}$$

Продифференцируем функцию (2):

$$F^{\boldsymbol{\cdot}}|_{(1)}=\mp I_2\omega_2\sqrt{(I_1^{-1}-I_2^{-1})(I_2^{-1}-I_3^{-1})}\,(\sqrt{I_1^{-1}-I_2^{-1}}I_1\omega_1\pm\sqrt{I_2^{-1}-I_3^{-1}}I_3\omega_3)+$$
$$+N[\sqrt{I_1^{-1}-I_2^{-1}}(e_2a_3-e_3a_2)\pm\sqrt{I_2^{-1}-I_3^{-1}}(e_1a_2-e_2a_1)]$$

На поверхности $\{F=0\}$ функция $F^{\boldsymbol{\cdot}}|_{(1)}$ имеет вид

$$F^{\boldsymbol{\cdot}}|_{(1)}=N[(-e_3\sqrt{I_1^{-1}-I_2^{-1}}\pm e_1\sqrt{I_2^{-1}-I_3^{-1}})a_2+e_2(\sqrt{I_1^{-1}-I_2^{-1}}a_3\mp\sqrt{I_2^{-1}-I_3^{-1}}a_1)$$

При выполнении условий $\sqrt{I_1^{-1}-I_2^{-1}}a_3\mp\sqrt{I_2^{-1}-I_3^{-1}}a_1=0$, $a_2=0$ ограничение функций $F^{\boldsymbol{\cdot}}|_{(1)}$ на поверхность обращается в нуль и функция $F=\sqrt{I_1^{-1}-I_2^{-1}}I_1\omega_1\pm\sqrt{I_2^{-1}-I_3^{-1}}I_3\omega_3$ является частным интегралом уравнений движения.

Полученный частный интеграл аналогичен интегралу Гесса в задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский А. Ю., Стороженко В. А., Темченко М. Е.* О движении осесимметричного твердого тела, подвешенного на струне.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 6, с. 3–16.
2. *Ишлинский А. Ю., Малашенко С. В., Стороженко В. А., Темченко М. Е., Шишкин П. Г.* О стационарных движениях подвешенного на струне твердого тела при вертикальном расположении одной из его главных осей инерции.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 2, с. 34–45.
3. *Румянцев В. В.* К динамике твердого тела, подвешенного на струне.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 5–15.
4. *Рубановский В. Н.* Анализ условий устойчивости равномерного вертикального вращения динамически симметричного твердого тела, подвешенного на нити.— В кн.: Современные вопросы математики и механики и приложения. М.: Изд-е МФТИ, 1983, с. 16–21.
5. *Hess W.* Ueber die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue particulare Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt.— Math. Ann., 1890, Bd. 37, No 2, S. 153–181.

Москва

Поступила в редакцию
21.X.1985