МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1987

УДК 531.39

ВРАЩЕНИЕ СВОБОДНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ

АЛЕКСЕЕВ С. А.

В работах [1, 2] изучено вращение систем, собственные частоты которых значительно больше угловой скорости вращения. В работах [3, 4] для системы частного вида исследуется устойчивость вращения. Некоторые приемы аппроксимации решений уравнений движения излагаются в [5]. Библиография, довольно обширная, приводится в указанных работах.

В данной работе рассматривается вращение произвольной упругой системы вокруг любой оси с переменной во времени угловой скоростью. На частоты собственных колебаний не накладывается никаких ограничений. Получены основные уравнения динамики таких систем и приводится пример.

1. Рассматриваемая система состоит из произвольного конечного числа N материальных точек с массами m_i ($i=1, 2, \ldots, N$), как угодно расположенных в пространстве и соединенных одна с другой безынерционными упругими связями (стержнями, пластинками, оболочками).

Масса системы

$$M=\sum m_i \tag{1.1}$$

Здесь, как и всюду ниже, символ Σ означает суммирование по всем материальным точкам системы.

Система с недеформированными упругими связями представляет собой по существу твердое тело; такую систему будем называть жесткой системой. Число степеней свободы ее равно шести или пяти, если система балочная, т. е. если все материальные точки ее находятся на одной прямой. Общее число степеней свободы упругой системы равно $3N$, из них $n=3N-6$ ($n=3N-5$) осуществляются при деформировании упругих связей. Эти степени свободы будут именоваться степенями свободы в упругом движении.

Введем две системы координат — неподвижную с ортами $\mathbf{e}_k{}^0$ ($k=1$, 2, 3) и подвижную с ортами $\mathbf{e}_k$. Радиус-вектор i-й точки жесткой системы

$$\boldsymbol{\rho}_i=x_{ik}{}^0\mathbf{e}_k{}^0 \tag{1.2}$$

где начало координат и направления ортов известны, а координаты $x_{ik}{}^0$ суть неизвестные функции времени. Начало координат подвижной системы координат поместим в центре масс C жесткой системы, а орты $\mathbf{e}_k$ направим по главным центральным осям инерции жесткой системы; их направления заранее неизвестны. Радиус-вектор i-й точки относительно центра масс жесткой системы

$$\mathbf{r}_i=x_{ik}\mathbf{e}_k \tag{1.3}$$

Координаты x_{ik} точек жесткой системы известны. В дальнейшем будем считать их постоянными, т. е. будем полагать неизменной конфигурацию механической системы в рассматриваемом промежутке времени. При рассмотрении систем с конфигурациями, изменяющимися во времени заданным образом, считаем $x_{ik}(t)$ известными функциями времени. Внесение соответствующих изменений в последующие рассуждения не представляет принципиальных трудностей.

Если $\boldsymbol{\rho}_c$ — радиус-вектор точки C то, очевидно

$$\boldsymbol{\rho}_i=\boldsymbol{\rho}_c+\mathbf{r}_i \tag{1.4}$$

Ясно, что

$$\sum m_i \mathbf{r}_i = 0 \tag{1.5}$$

2. Перемещения. Определим радиус-вектор i-й точки системы, упругие связи которой деформированы

$$\boldsymbol{\rho}_i = \boldsymbol{\rho}_c + \mathbf{r}_i + \mathbf{V}_i \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{V}_i$ — упругие перемещения. Подчиним их условиям

$$\sum m_i \mathbf{V}_i = 0, \qquad \sum m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{V}_i = 0 \tag{2.2}$$

Эти условия обеспечивают ортогональность упругих перемещений перемещениям $\mathbf{W}_i$ жесткой системы

$$\sum m_i \mathbf{V}_i \mathbf{W}_i = 0$$

что дает возможность в ряде важных случаев, как, например, при решении задач о собственных колебаниях, отделить движения твердого тела от упругого движения. Первое равенство (2.2), кроме того, обеспечивает независимость положения центра масс C в пространстве от упругих перемещений.

Введем обобщенные координаты $q_\nu(t)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$:

$$\mathbf{V}_i = \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu(t) \mathbf{b}_{i\nu} \tag{2.3}$$

Здесь $\mathbf{b}_{i\nu}$ — системы векторов, удовлетворяющих равенствам

$$\sum m_i \mathbf{b}_{i\nu} = 0, \qquad \sum m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{b}_{i\nu} = 0, \qquad \sum m_i \mathbf{b}_{i\nu} \mathbf{b}_{i\mu} = M \delta_{\nu\mu} \tag{2.4}$$

($\delta_{\nu\mu}$ символ Кронекера). Для каждого ν, т. е. для каждой степени свободы, $\mathbf{b}_{i\nu}$ определяют перемещения всех точек системы. Как это принято в строительной механике, величины $\mathbf{b}_{i\nu}$ называются единичными перемещениями. В [6] указаны способы их нахождения для любой механической системы, причем для этого не требуется интегрировать никаких уравнений. Формы свободных колебаний получаются из $\mathbf{b}_{i\nu}$ ортогональным преобразованием. Поэтому разложение (2.3) в принципе не отличается от разложения по формам свободных колебаний.

Известно [7], что представление (2.3) не описывает перемещений типа сближения концов прямого стержня за счет его изгиба. Эти эффекты учитывать не будем.

Для вычисления матрицы жесткости система нагружается статическими единичными силами

$$\mathbf{p}_{i\nu} = m_i \mathbf{b}_{i\nu} / M \tag{2.5}$$

Как видно из (2.4), при каждом ν силы $\mathbf{p}_{i\nu}$ статически эквивалентны нулю. Матрица податливости δ определяется по правилам строительной механики. Вследствие статической уравновешенности нагрузок $\mathbf{p}_{i\nu}$ эта матрица не имеет нулевых собственных значений и, следовательно, может быть обращена. Матрица $c = \delta^{-1}$ является матрицей жесткости. Отметим, что матрица жесткости получается с использованием тождественности конфигураций нагруженной и ненагруженной систем, т. е. в предположении о малости упругих деформаций.

3. Уравнения движения. Дифференцируя (2.1) по времени, получим

$$d\boldsymbol{\rho}_i/dt = \dot{\boldsymbol{\rho}}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i + \dot{\mathbf{V}}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_i \tag{3.1}$$

и затем при помощи (2.2) и (2.3) получим выражение кинетической энергии T системы через q_ν и $\dot{q}_\nu$.

К материальным точкам системы приложены силы $\mathbf{R}_i$ произвольного вида. Обобщенные силы имеют вид

$$Q_\nu = \sum \mathbf{R}_i \mathbf{b}_{i\nu} \tag{3.2}$$

Уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_\nu^{\cdot}} - \frac{\partial T}{\partial q_\nu} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_\nu} = Q_\nu \tag{3.3}$$

содержат потенциальную энергию

$$\Pi = {}^1/_2 \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\nu\mu} q_\nu q_\mu \tag{3.4}$$

которую считаем накопленной только в упругих связях. Если имеются другие потенциальные силы, кроме сил упругости, они включаются в состав сил $\mathbf{R}_i$.

К уравнениям (3.3) следует присоединить уравнения движения системы в целом, так как (3.3) описывают только упругое движение системы. Из этих уравнений рассмотрим те, что описывают вращение механической системы. Их удобно получить из теоремы о кинетическом моменте

$$\frac{d}{dt}\sum m_i(\mathbf{r}_i+\mathbf{V}_i)\times(\boldsymbol{\rho}_c^{\cdot}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i+\mathbf{V}_i^{\cdot}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}_i) = \sum(\mathbf{r}_i+\mathbf{V}_i)\times R_i \tag{3.5}$$

Члены в левой части, не содержащие $\mathbf{V}_i$, являются левыми частями уравнений Эйлера вращения твердого тела; квадратичные относительно $\mathbf{V}_i$ и $\mathbf{V}_i^{\cdot}$ члены следует опустить, так как матрица жесткости, как указывалось выше, получается в предположении о малости перемещений и, следовательно, механическая система линейна.

Из (3.3) и (3.5) следует система уравнений относительно $q_1, \ldots, q_n$, ω_1, ω_2, ω_3 (угловая скорость вращения $\boldsymbol{\omega}$ проектируется на оси подвижной системы координат):

$$Mq^{\cdot\cdot} - 2Aq^{\cdot} + (c - B - A^{\cdot})q = Q + H \tag{3.6}$$

$$\frac{d}{dt}\sum m_i\mathbf{r}_i\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i) + \sum_\nu \mathbf{G}_\nu q_\nu^{\cdot} + \sum_\nu(\mathbf{G}_\nu^{\cdot}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{G}_\nu)q_\nu = \sum \mathbf{r}_i\times\mathbf{R}_i + \sum_\nu \mathbf{N}_\nu q_\nu$$

Здесь $M = \sum m_i$ — постоянная, q — матрица-столбец обобщенных координат; квадратная $n\times n$ матрица A составлена из элементов

$$A_{\nu\mu} = \boldsymbol{\omega}\sum m_i \mathbf{b}_{i\nu}\times\mathbf{b}_{i\mu} \tag{3.7}$$

Квадратная матрица B содержит элементы

$$B_{\nu\mu} = \sum m_i(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{b}_{i\nu})(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{b}_{i\mu}) \tag{3.8}$$

Матрица-столбец H имеет элементы

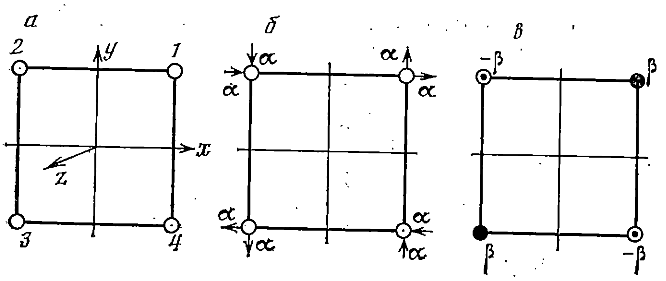
$$H_\nu = \sum m_i(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i)(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{b}_{i\nu}) \tag{3.9}$$

Матрица-столбец Q состоит из обобщенных сил согласно (3.2). Во втором равенстве (3.6):

$$\mathbf{G}_\nu = 2\sum m_i\mathbf{b}_{i\nu}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i), \quad \mathbf{N}_\nu = \sum \mathbf{b}_{i\nu}\times R_i \tag{3.10}$$

Система (3.6) линейна относительно q_ν и квазилинейна относительно ω_1, ω_2, ω_3.

Кроме (3.6) имеются еще уравнения, описывающие поступательное движение механической системы, которые здесь не рассматриваются, так как имеется в виду именно ее вращение.



4. Пример. Покажем применение уравнений (3.6) к исследованию вращения по инерции простой механической системы, представляющей собой квадратную плоскую рамку со стороной $2a$ из нерастяжимых стержней круглого сечения. При коэффициенте Пуассона, равном $1/3$, отношение изгибной и крутильной жесткостей $EI/GI_p=4/3$. В углах рамки помещены четыре груза с массами $m_i=m$ (фиг. 1, *а*). Очевидно, $M=4m$, $I_1=I_2=Ma^2$, $I_3=2Ma^2$.

Сделаем несколько общих замечаний относительно вращений упругих систем по инерции. Если L — характерный размер системы, то $|q_\nu|\ll L$ из-за линейности системы. Назовем вращение медленным, если $\omega^2\ll p^2$, где p — наименьшая частота собственных колебаний. Нетрудно показать, что в этом случае в левой части первого равенства (3.6) следует опустить члены вида $q_\nu\omega_k$ и $\omega_k\omega_j$, а также квадратичный относительно ω_k вектор H. Тогда оно получает вид $Mq^{\cdot\cdot}+cq=0$, так что частоты и формы собственных колебаний не зависят от угловой скорости. Из второго равенства (3.6) при этом получаем $\omega_1^{\cdot}=\omega_2^{\cdot}=\omega_3^{\cdot}=0$ и оказывается, что вращение может происходить с постоянной скоростью вокруг любой оси (предполагается, что рассматриваемый интервал времени не слишком велик).

В случае, когда угловые скорости ω_k имеют порядок наименьшей частоты свободных колебаний покоящейся или медленно вращающейся системы, малые колебания при $|q_\nu|\ll L$ могут существовать, если компоненты вектора H малы (согласно (3.6) при $Q=0$). Это условие выполняется не для всякой системы, а если оно выполнено, то определяет, вообще говоря, некоторые избранные направления оси вращения. Поэтому при быстром вращении малые колебания упругой системы имеют ограниченную амплитуду только в том случае, когда угловая скорость направлена определенным образом, да и то при условии, что упругая система вообще допускает такие режимы вращения.

В рассматриваемом примере система имеет две степени свободы в упругом движении, поэтому следует определить две группы единичных перемещений $\mathbf{b}_{i\nu}$ ($\nu=1,\ 2$; $i=\overline{1,\ 4}$) (фиг. 1*б*, *в*). Первая группа определяет сдвиговую форму, вторая — депланационную. Видно, что обе формы ортогональны в смысле (2.4); постоянные α и β определяются из условия нормирования (2.4): $\alpha=2^{-1/2}$, $\beta=1$. В таблице приведены значения $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{b}_{i1}$, $\mathbf{b}_{i2}$ (1, 2 и 3 группы соответственно).

Легко найти коэффициенты податливости, а затем получить элементы матрицы жесткости $c_{11}=12EI/a^3$, $c_{12}=0$, $c_{22}=1{,}2EI/a^3$. Обозначим $p^2=1{,}2EI/Ma^3$ квадрат наименьшей частоты свободных колебаний покоящейся системы по депланационной форме. Квадрат частоты колебаний по сдвиговой форме равен $10p^2$.

В данном случае гироскопическая матрица A оказывается нулевой, поэтому в системе возможны стоячие упругие колебания. Заметим, что если

i	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
1	1	1	0	1	1	0	0	0	1
2	−1	1	0	1	−1	0	0	0	−1
3	−1	−1	0	−1	−1	0	0	0	1
4	1	−1	0	−1	1	0	0	0	−1

убрать один стержень, матрица A будет уже ненулевой, а число степеней свободы возрастет на единицу.

Элементы матрицы H: $B_{11}=M(^1/_2\omega_1^2+^1/_2\omega_2^2+\omega_3^2)$; $B_{12}=0$, $B_{22}=$ $=M(\omega_1^2+\omega_2^2)$. Компоненты вектора H: $H_1=-Ma\sqrt{2}\omega_1\omega_2$, $H_2=0$. Далее находим $\mathbf{G}_1=-Ma\sqrt{2}(\omega_2\mathbf{e}_1+\omega_1\mathbf{e}_2)$, $\mathbf{G}_2=0$.

Обозначим $q_1\sqrt{2}=aY$ и после простых преобразований получим систему уравнений, следующую из (3.6):

$$\omega_1^{\cdot}+\omega_2\omega_3-\omega_2 Y^{\cdot}=0$$
$$\omega_2^{\cdot}-\omega_3\omega_1-\omega_1 Y^{\cdot}=0,\quad \omega_3^{\cdot}-{}^1/_2(\omega_1^2-\omega_2^2)Y=0$$
$$Y^{\cdot\cdot}+(10p^2-{}^1/_2\omega_1^2-{}^1/_2\omega_2^2-\omega_3^2)Y+2\omega_1\omega_2=0$$
$$q_2^{\cdot\cdot}+(p^2-\omega_1^2-\omega_2^2)q_2=0$$

Условие малости вектора H принимает здесь форму $|\omega_1\omega_2|\ll 1$, поэтому нужно рассматривать лишь те решения, которые удовлетворяют этому требованию.

Например, частное решение $\omega_1=\omega_2=0$, $\omega_3\neq 0$ описывает вращение механической системы вокруг нормали, т. е. вокруг оси с наибольшим моментом инерции.

Принятая расчетная схема не исключает рассмотрения систем, содержащих твердые тела. В самом деле твердое тело с заданными массой, положением центра масс и тензором инерции может быть представлено несколькими (в общем случае не менее чем четырьмя) материальными точками, соединенными недеформируемыми стержнями. Поэтому, не выходя за пределы общей схемы, можно рассматривать системы твердых тел с упругими элементами.

Изложенный метод удобен при использовании ЭЦВМ, которой можно поручить выполнение многих операций, включая определение единичных перемещений и жесткостей.

Полная система уравнений, описывающая движение упругой системы, получается путем дополнения уравнений (3.6) уравнениями поступательного движения и равенствами, связывающими углы ориентации подвижной системы координат с угловыми скоростями. Эти группы уравнений здесь не приведены, так как они имеют тот же вид, что в случае движения твердого тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черноусько Ф. Л.* О движении твердого тела с упругими диссипативными элементами.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 1, с. 34—42.
2. *Егармин Н. Е.* Влияние упругих деформаций на тензор инерции твердого тела.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 6, с. 43—48.
3. *Рубановский В. Н.* Устойчивость стационарных вращений тяжелого твердого тела с двумя упругими стержнями.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 1, с. 55—64.
4. *Likins P., Ohkami Y.* Coordinate trausformation and truncatien for rotating spacecraft with flexible appendages.— AIAA Journal, 1975, v. 13, No. 12, p. 1657—1665.
5. *Meirovitch L.* A stationary principle for the eigenvalue problem for rotating structure.— AIAA Journal, 1976, v. 14, No. 10, p. 1387—1394.
6. *Алексеев С. А.* Динамика свободных систем материальных точек с упругими связями.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 3, с. 558—563.
7. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. ГИФМЛ, М.: Физматгиз, 1961. 824 с.

Москва

Поступила в редакцию 5.I.1982