

УДК 531.8

**ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК
ОДНОМЕРНОГО МАНИПУЛЯТОРА МЕТОДОМ ТРАЕКТОРИЙ
КОРНЕЙ**

БОРОВОЙ А. В.

При разработке роботов-манипуляторов большую роль играет изучение их динамических свойств. Этой теме посвящено множество работ. Так, например, в [4] изучается устойчивость процессов поддержания контакта и движения манипулятора при наличии обратной связи по силе. В публикуемой работе рассматривается линейная модель манипулятора с обратной связью по позиции и скорости. При помощи метода траекторий, изложенного в [2], исследуется расположение корней характеристического определителя в зависимости от соотношений между коэффициентами обратной связи. Анализ подобных систем в общем виде проведен в [3]. Предложен метод построения траекторий корней для конкретной системы с учетом всех возможных ситуаций. Рассмотрены некоторые предельные случаи.

1. Рассмотрим простейшую одномерную модель манипулятора, представляющую из себя штангу массы M , способную перемещаться как твердое тело поступательно вдоль оси x абсолютной системы координат. Штанга приводится в движение электродвигателем, соединенным с ней посредством идеального редуктора с передаточным числом Z . Индуктивностью цепи якоря электродвигателя пренебрегаем [4]. Соответствующие уравнения движения запишутся в виде

$$\begin{aligned} Mx'' &= -\sigma_1 x' + F, \quad J\varphi'' = c_1 u - \\ &- c_2 \varphi' - N, \quad \rho = rZ, \quad x = \rho\varphi, \quad N = \rho F \end{aligned} \quad (1.1)$$

где x — координата произвольной точки штанги в абсолютной системе координат, σ_1 — коэффициент вязкого трения, F — сила, действующая на штангу со стороны выходной шестерни редуктора, J — момент инерции вала электродвигателя относительно оси вращения, φ — угол поворота вала, c_1, c_2 — постоянные величины, зависящие от конструкции двигателя, u — напряжение на обмотке двигателя, N — момент внешних сил, действующих на вал, r — радиус выходной шестерни редуктора,

Напряжение на обмотку двигателя подается с усилителя и формируется на основе данных обратной связи. Уравнение усилителя запишется в виде

$$\tau u' + u = -a_1 x - a_2 x' \quad (1.2)$$

где τ — постоянная времени усилителя, a_1, a_2 — коэффициенты обратной связи.

Полученная система (1.1), (1.2) позволяет изучить собственные движения манипулятора. Группируя уравнения (1.1) и вводя обозначения $\sigma = (c_2 + \rho^2 \sigma_1) / (J + \rho^2 M)$, $\alpha = \rho c_1 / (J + \rho^2 M)$, $K = \alpha a_2 / \tau$, $\kappa = a_1 / a_2$, получаем характеристический полином системы

$$p(p + \sigma)(p + 1/\tau) + K(p + \kappa) = 0 \quad (1.3)$$

Траектории корней данного полинома в зависимости от изменения K и κ можно построить при помощи методов, изложенных в [2].

2. Для построения траекторий корней запишем (1.3) в виде

$$\begin{aligned} \Phi_3(p) + K\Psi_1(p) = 0, \quad \Phi_3(p) = p(p + \\ + \sigma)(p + 1/\tau), \quad \Psi_1(p) = p + \kappa \end{aligned} \quad (2.1)$$

Пусть K непрерывно возрастает от 0 до $+\infty$. Изучая соответствующие движения корней (2.1), воспользуемся рядом утверждений, обоснованных в [2]. Пусть p_1, p_2, p_3 — корни $\Phi_3(p)$, z_1 — корень $\Psi_1(p)$, тогда для точки p_* , лежащей на траектории, выполнено

$$\sum_{m=1}^3 \arg(p_* - p_m) - \arg(p_* - z_1) = L\pi \quad (2.2)$$

где L — целое нечетное число.

При возрастании K от 0 до $+\infty$ два корня (2.1) уходят в бесконечность по двум асимптотам, расходящимся из точки $a_* = (\sum p_m - z_1)/2$ ($m = 1, 2, 3$) под углами $\pi/2$ и $3\pi/2$ к действительной оси. Обозначив $d = \sigma + 1/\tau$, получим

$$a_* = (\kappa - d)/2 \quad (2.3)$$

Условия существования кратного корня (2.1) запишутся в виде $\Phi_3(p) + K\Psi_1(p) = 0$, $\Phi_3'(p) + K\Psi_1'(p) = 0$ или, после исключения K :

$$\begin{aligned} f(p) = 2p^3 + (d + 3\kappa)p^2 + \\ + 2d\kappa p + \kappa e = 0, \quad e = \sigma/\tau \end{aligned} \quad (2.4)$$

Так как степень полинома (2.1) равна трем, комплексно-сопряженных кратных корней (2.1) не существует и только действительные корни (2.4) являются кратными корнями (2.1).

Вводя обозначение $p = \delta + i\omega$, запишем (2.1) в виде

$$\begin{aligned} \Phi_3(\delta) - (\omega^2/2!) \Phi_3''(\delta) + K\Psi_1(\delta) = 0, \quad \Phi_3'(\delta) - (\omega^2/3!) \Phi_3'''(\delta) + \\ + K\Psi_1'(\delta) = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

откуда после исключения K получаем

$$\omega^2 = \frac{1}{2} f(\delta) / (a_* - \delta) \quad (2.6)$$

$$K = 4(\delta + \sigma/2)(\delta + 1/2\tau)(\delta + d/2) / (a_* - \delta) \quad (2.7)$$

3. Определим вид траекторий корней (2.1) в зависимости от κ при $K \in [0, +\infty)$. Будем менять значение κ в пределах от 0 до d (в противном случае появятся корни (2.1), лежащие правее мнимой оси). Действительные участки траекторий строятся на основании (2.2), углы наклона асимптот к действительной оси известны. Остается определить множество пар значений (δ, ω) , удовлетворяющих (2.6) и отвечающих значениям $K > 0$. При этом выражения, стоящие правее знака равенства в (2.6) и (2.7), должны быть положительны. Для определения знака правой части (2.6) в зависимости от δ необходимо провести исследование функции $f(\delta)$. Точки экстремума $f(\delta)$ будут $\delta_1 = -\kappa$, $\delta_2 = -d/3$. Далее удобно рассмотреть значения функции f в ряде точек

$$f(-d/2) = -\kappa(\sigma - 1/\tau)^2/4 \quad (3.1)$$

$$f(-1/\tau) = (1/\tau - \sigma)(\kappa - 1/\tau)/\tau \quad (3.2)$$

$$f(-\sigma) = \sigma(1/\tau - \sigma)(\sigma - \kappa) \quad (3.3)$$

$$f(-1/2\tau) = (\sigma - \kappa)/(4\tau^2) \quad (3.4)$$

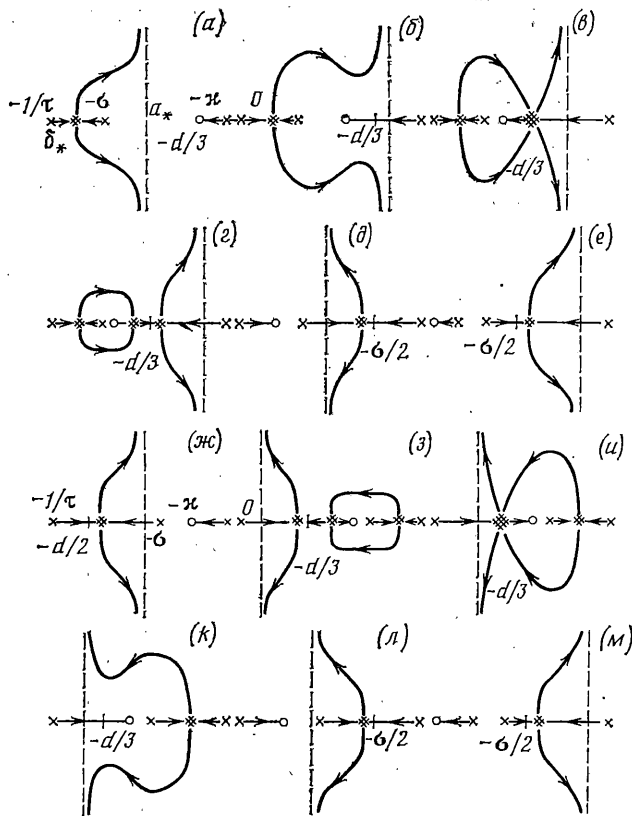
$$f(-\sigma/2) = \sigma^2(1/\tau - \kappa)/4 \quad (3.5)$$

$$f(-\kappa) = \kappa(\kappa - \sigma)(\kappa - 1/\tau) \quad (3.6)$$

$$f(-\kappa) = f(a_*) \quad (3.7)$$

$$f(-\kappa) - f(-d/3) = (\kappa - d/3)^3 \quad (3.8)$$

$$f(0) = \kappa e \quad (3.9)$$



Из этих формул легко определить знак $f(\delta)$ в заданных точках для произвольных значений κ . Исследуем отдельно знак выражения

$$f(-d/3) = d^3/27 - \kappa d^2/3 + \epsilon \kappa \quad (3.10)$$

Пусть $1/\tau = \theta\sigma$, $\theta \geq 1$ (если $1/\tau < \sigma$, можно поменять местами обозначения). Тогда (3.10) преобразуется к виду $f(-d/3) = (1+\theta)^3 \sigma^3 / 27 - \kappa (1+\theta)^2 \sigma^2 / 3 + \kappa \theta \sigma^2$, откуда следует, что $f(-d/3) < 0$ при $\kappa > (1+\theta)^3 \sigma / [9(\theta^2 - \theta + 1)] = \sigma_0(\theta)$, $f(-d/3) = 0$ при $\kappa = \sigma_0(\theta)$, $f(-d/3) > 0$ при $\kappa < \sigma_0(\theta)$. Далее можно показать, что $d/3 < \sigma_0(\theta) < \sigma$ при $1 \leq \theta < 2$, $\sigma < \sigma_0(\theta) < d/3$ при $\theta > 2$. Теперь на основании (3.1)–(3.10) можно качественно определить расположение корней функции $f(\delta)$, а также участки ее монотонности. Все это позволяет построить траектории комплексно-сопряженных корней (2.1).

Пусть $1 < \theta < 2$. В этом случае справедливы неравенства $d > 1/\tau > d/2 > \sigma > d/3 > 1/2\tau > \sigma/2 > 0$. Исследуем поведение $f(\delta)$ при $0 < \kappa \leq d/3$. Центр асимптот, согласно (2.3), лежит в пределах $-d/2 < a_* \leq -d/3$. Воспользовавшись соотношениями (3.1), (3.3), (3.6), (3.8), получим $f(-d/2) < 0$, $f(-\sigma) > 0$, $f(-d/3) > f(-\kappa) > 0$, откуда следует, что существует $\delta_* \in (-d/2, -\sigma)$, при котором выполнено $f(\delta_*) = 0$, а при $\delta \in (\delta_*, +\infty)$ справедливо $f(\delta) > 0$. Последнее условие в силу (3.7) сужает область для центра асимптот: $\delta_* < a_* \leq -d/3$. Теперь при помощи (2.6) определяется движение комплексно-сопряженных корней (2.1). Соответствующие траектории показаны на фигуре, а. При росте κ от 0 до $+\infty$ корни, вышедшие из точек $-1/\tau$ и $-\sigma$, движутся навстречу друг другу и в точке δ_* образуют корень второй кратности. Далее корни расходятся под углами $\pi/2$ и $3\pi/2$ к действительной оси (углы находятся на основании (2.2)) и образуют пару комплексно-сопряженных участков траектории, уходящих в бесконечность по асимптотам с центром в a_* и углами наклона к действительной оси $\pi/2$ и $3\pi/2$. Действительный корень, выйдя из точки 0, приходит в точку $-\kappa$.

Если $d/3 < \kappa < \sigma_0(\theta)$, то центр асимптот будет лежать в пределах $-d/3 < a_* < (\sigma_0(\theta) - d)/2$. Соответствующие траектории изображены на фигуре, б.

В случае $\kappa = \sigma_0(\theta)$ центр асимптот будет расположен в точке $a_* = (\sigma_0(\theta) - d)/2$. При этом $f(-d/3) = 0$, $\Phi_3''(-d/3) + K\Psi_1''(-d/3) = 0$, следовательно, в точке $-d/3$ возникает действительный корень третьей кратности. Траектории выйдут из $-d/3$, согласно (2.2), под углами $\pi/3$, π , $5\pi/3$ к действительной оси (фигура, в).

Траектории для $\sigma_0(\theta) < \kappa < \sigma$ изображены на фигуре, г; для $\sigma < \kappa < 1/\tau$ – на фигуре, д; для $1/\tau < \kappa \leq d$ – на фигуре, е.

При $\theta > 2$ справедливы неравенства $d > 1/\tau > d/2 > 1/(2\tau) > d/3 > \sigma > \sigma/2 > 0$. Движение корней исследуется аналогично. Траектории для $0 < \kappa < \sigma$ изображены на фигуре, ж; для $\sigma < \kappa < \sigma_0(\theta)$ — на фигуре, з; для $\kappa = \sigma_0(\theta)$ — на фигуре, и; для $\sigma_0(\theta) < \kappa \leq d/3$ — на фигуре, к; для $d/3 < \kappa < 1/\tau$ — на фигуре, л; для $1/\tau < \kappa \leq d$ — на фигуре, м.

При $\kappa = 0$, $\kappa = \sigma$, $\kappa = 1/\tau$ корни (2.1) находятся тривиально. При $\theta = 1$, $\theta = 2$ в частном отношении ничего нового не возникает. Таким образом удалось определить поведение траекторий корней (2.1) в области устойчивости в зависимости от изменения как параметра управления κ , так и параметров системы σ и $1/\tau$. Причем, соотношение между σ и $1/\tau$ обуславливает наличие двух типов траекторий, качественно отличающихся друг от друга. Последний факт не был учтен в [3].

4. Процесс нахождения корней (2.1) в ряде случаев можно существенно упростить. Так, из (2.5) получаем

$$K = \omega^2 - (3\delta^2 + 2d\delta + e) = \omega^2 - W(\delta) \quad (4.1)$$

При больших значениях $K > 0$ будет выполнено $p_1 \rightarrow -\kappa$, $\text{Re } p_2 = \text{Re } p_3 = -\delta \rightarrow a_*$, где p_1 — действительный корень (2.1), а p_2, p_3 — комплексно-сопряженные корни (2.1). Поэтому в (4.1) можно положить $\omega^2 = K + W(a_*)$ и считать, что (2.1) имеет следующие корни:

$$p_1 = -\kappa, \quad p_{2,3} = a_* \pm i\sqrt{K + W(a_*)} \quad (4.2)$$

Далее исследуем зависимость $W(a_*)$ от κ при фиксированном θ :

$$W(a_*) = 3\kappa^2/4 - d\kappa/2 + e - d^2/4, \quad 0 \leq \kappa \leq d$$

откуда $\min_{\kappa} W(a_*) = -(\sigma^2 - \sigma/\tau + 1/\tau^2)/3$, $\max_{\kappa} W(a_*) = \sigma/\tau$.

На основании последней оценки в ряде случаев можно считать $K \gg \gg W(a_*)$. Тогда

$$p_1 = -\kappa, \quad p_{2,3} = a_* \pm i\sqrt{K} \quad (4.3)$$

Выражения (4.2), (4.3) могут быть использованы при рассмотрении более сложных задач, например об устойчивости движения манипулятора с силовой обратной связью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гориневский Д. М., Формальский А. М. Об устойчивости движений упругого манипулятора с обратной связью по силе. — Изв. АН СССР. МТТ, 1985, № 3, с. 49–56.
2. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М.: Наука, 1964. 159 с.
3. Yeh V. C. M. The study of transients in linear feedback system by conformal mapping and the root-locus method. — Trans. ASME, 1954, v. 76, No. 3, p. 349–361.
4. Чиликин М. Г., Сандлер А. С. Общий курс электропривода. М.: Энергоиздат, 1981. 576 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.XII.1985.