

УДК 531.8

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ МАНИПУЛЯТОРА ПРИ ВИБРАЦИЯХ ОСНОВАНИЯ

АКСЕЛЬРОД Б. В., ВУЙИЧ Д., ВУКОБРАТОВИЧ М.,
ГРАДЕЦКИЙ В. Г., ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л.

Исследуется динамика манипуляционного робота при вибрационном воздействии, которое передается через основание несущей конструкции манипулятора. Манипулятор рассматривается как цепь последовательно соединенных вращательными и поступательными парами твердых тел, жестко связанных с совершающим поступательные и угловые колебания основанием. Вибрации задаются в виде гармонических колебаний или случайного воздействия. Управление роботом строится с обратной связью по отклонениям от номинального движения. Предлагаются численный и асимптотический методы вычисления отклонений движения манипулятора от номинальной траектории. Приводятся результаты моделирования динамики манипулятора на ЭВМ.

1. Постановка задачи. Одним из факторов, влияющих на динамическую точность манипуляционного робота, является вибрация его основания вследствие действия расположенного вблизи технологического оборудования. Манипуляционные роботы обычно жестко крепятся к основанию, что исключает возможность демпфирования вибраций. В связи с этим, особенно при высоких требованиях к точности и значительном уровне вибраций, актуальным становится вопрос об их воздействии на точность.

В общем случае вызываемые работой соседнего оборудования вибрации основания могут иметь как периодический, так и непериодический характер. В простейших случаях, обусловленных возникающими при неидеальной балансировке центробежными силами, вибрации имеют гармонический вид. Может иметь место и более сложный закон вибрации, в частности импульсный. Как показывают исследования [1], часто встречаются вибрации, имеющие характер случайных функций.

Отклонения схвата манипулятора от номинальной траектории вследствие возмущающего движения основания вычисляются на основе уравнения динамики манипулятора на подвижном основании, движение которого задано как функция времени. В соответствии с [2-4] имеем

$$H(q)q'' + \xi(q, q') + \xi_g(q, \varphi_0) + h_1(q)w_0 + h_2(q)\varepsilon_0 + h_3(q, \omega_0) + h_4(q, q')\omega_0 = P \quad (1.1)$$

где q — n -мерный вектор обобщенных координат манипулятора, w_0 — трехмерный вектор поступательного ускорения основания, ε_0 , ω_0 и φ_0 — трехмерные векторы, задающие его угловое движение (ускорение, скорость и ориентацию), P — n -мерный вектор моментов (сил) приводов, $H(q)$ — матрица кинетической энергии, $\xi(q, q')$ — вектор кориолисовых и центробежных ускорений, $\xi_g(q, \varphi_0)$ — вектор моментов (сил) силы тяжести, $h_1(q)w_0$, $h_2(q)\varepsilon_0$ и $h_3(q, \omega_0)$ — векторы, характеризующие переносное ускорение вследствие вибраций основания, $h_4(q, q')\omega_0$ — вектор, характеризующий кориолисовы ускорения, связанные с вращением основания. Конкретные выражения для коэффициентов уравнения (1.1) приведены в [2-6]. Векторы w_0 , ε_0 , ω_0 , φ_0 в (1.1) являются заданными функциями времени, $\varepsilon_0 = \omega_0'$. Рассматриваем случай малых колебаний основания, для которого φ_0 — вектор малых углов поворота основания, $\omega_0' = \omega_0$.

Наибольшее распространение в промышленных роботах получили приводы, динамика которых описывается [4] линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами вида

$$\dot{x}_i = A_i x_i + c_i u_i + d_i P_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (1.2)$$

где x_i — вектор состояния i -го привода размерности n_i , A_i — матрица размера $n_i \times n_i$, c_i и d_i — векторы размерности n_i , u_i — управление i -го привода, удовлетворяющее ограничению $-u_{mi} \leq u_i \leq u_{mi}$, P_i — движущий момент (сила) по i -й степени свободы робота. В случае электромеханического привода при пренебрежении индуктивностью ротора и с учетом передаточно-го отношения редуктора по скорости N_{1i} и по моменту (силе) N_{2i} имеем

$$x_i = \|N_{1i} q_i, N_{2i} \dot{q}_i\|^T, \quad A_i = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a_{22i} \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

$$c_i = \|0, c_{mi}/(J_{ri} R_{ri})\|^T, \quad d_i = \|0, -1/(N_{2i} J_{ri})\|^T$$

Здесь $a_{22i} = B_{ci}/J_{ri} + c_{mi} c_{ei}/(J_{ri} R_{ri})$, J_{ri} — момент инерции ротора, R_{ri} — сопротивление роторной обмотки, B_{ci} — коэффициент вязкого трения, c_{mi} и c_{ei} — коэффициенты пропорциональности момента и ЭДС. Управлением u_i является напряжение, приложенное к якорю двигателя.

Объединив уравнение механической части робота (1.1) и уравнения приводов (1.2) с учетом (1.3), получим полное уравнение динамики манипуляционного робота

$$\begin{aligned} & [H(q) + \text{diag}(J_1^+, \dots, J_n^+)] \ddot{q} + \xi(q, \dot{q}) + \\ & + [\text{diag}(b_1^+, \dots, b_n^+)] \dot{q} + \xi_g(q, \varphi_0) = \\ & = [\text{diag}(k_1^+, \dots, k_n^+)] u - h_1(q) \omega_0 - h_2(q) \varepsilon_0 - h_3(q, \omega_0) - h_4(q, \dot{q}) \omega_0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $J_i^+ = N_{1i} N_{2i} J_{ri}$ — приведенный к выходному валу редуктора момент инерции ротора, $b_i^+ = N_{1i} N_{2i} (B_{ci} + c_{mi} c_{ei}/R_{ri})$, $k_i^+ = N_{2i} c_{mi}/R_{ri}$.

Пусть $u^\circ(t)$ — некоторый программный закон управления, которому отвечает номинальная траектория $q^\circ(t)$ — решение уравнения (1.4) при отсутствии вибраций ($\omega_0 = \varepsilon_0 = \omega_0 = \varphi_0 = 0$) и при некоторых начальных условиях.

Для уменьшения отклонений от номинальной траектории $q^\circ(t)$, соответствующей программному закону управления $u^\circ(t)$, вводятся локальные позиционные и скоростные обратные связи [1, 4] (G_0 и G_1 — постоянные диагональные матрицы обратных связей):

$$u = u^\circ(t) + G_0 [q - q^\circ(t)] - G_1 [\dot{q} - \dot{q}^\circ(t)] \quad (1.5)$$

Таким образом, динамика манипуляционного робота с обратными связями на вибрирующем основании описывается векторным уравнением (1.4) и соотношением (1.5). Далее рассматриваются два способа численного интегрирования уравнений (1.4), (1.5): непосредственный численный метод и асимптотический метод разделения движений.

2. Методы интегрирования. Непосредственное численное интегрирование уравнения (1.4) с учетом (1.5) [1] позволяет исследовать возмущения произвольного вида и, в частности, реальные вибрации, имеющие место на производстве. В то же время реализация непосредственного интегрирования вызывает некоторые трудности и требует проводить вычисления с высокой точностью. В самом деле, интегрирование приходится вести с мелким шагом по времени, который должен быть значительно меньше периодов как внешнего возмущения, так и собственных колебаний манипулятора, что приводит к большому объему вычислений и быстрому накоплению ошибок округления. В связи с этим представляется полезным использовать асимптотические методы теории колебаний для расчета вынужденных вибраций робототехнических систем. Ранее эти методы применялись для расчета движений упругого манипулятора при отсутствии внешних возмущений [7, 8].

Найдем асимптотическое решение уравнений (1.4), (1.5) при гармонических колебаниях основания с частотой Ω в предположении, что она

достаточно велика, т. е. период колебаний $2\pi\Omega^{-1}$ мал по сравнению с характерным временем T_0 номинального движения: $\Omega T_0 \sim \varepsilon^{-1}$, где $\varepsilon \ll 1$ — безразмерный малый параметр. Под характерным временем T_0 понимается такой отрезок времени, для которого справедливы соотношения $q_i^{\circ\circ} \sim q_i T_0^{-1}$, $q_i^{\circ\circ\circ} \sim q_i T_0^{-2}$ ($i=1, \dots, n$). Таким образом, выбрав в качестве единицы измерения времени время T_0 , а в качестве единицы измерения координат q_i — их характерные значения, получим, что для номинального движения все производные q_i° , $q_i^{\circ\circ}$ будут безразмерными величинами порядка единицы.

Для построения асимптотического решения запишем линеаризованное относительно номинального движения уравнение (1.4) с учетом (1.5) в виде

$$\begin{aligned} A(t)\Delta q^{\circ\circ} + B(t)\Delta q^{\circ} + C(t)\Delta q &= -h_1(q^{\circ}(t))\mathbf{w}_0 - h_2(q^{\circ}(t))\varepsilon_0 \quad (2.1) \\ \Delta q &= q - q^{\circ}(t), \quad A(t) = H(q^{\circ}(t)) + \text{diag}(J_1^+, \dots, J_n^+) \\ B(t) &= \partial \xi(q^{\circ}(t), q^{\circ\circ}(t)) / \partial q^{\circ} + \text{diag}(b_1^+, \dots, b_n^+) + G_{1N} \\ C(t) &= \partial [H(q^{\circ}(t))q^{\circ\circ}(t)] / \partial q + \partial \xi(q^{\circ}(t), q^{\circ\circ}(t)) / \partial q + \partial \xi_{\varepsilon}(q^{\circ}(t), 0) / \partial q + G_{0N} \end{aligned}$$

Здесь i -я строка матриц G_{0N} и G_{1N} получается из i -й строки матриц G_{00} и G_{10} (соответственно) путем умножения ее на k_i^+ . В дальнейшем будем считать, что матрицы обратных связей выбраны таким образом, что действительные части всех собственных значений уравнения (2.1) при «замороженном» времени отрицательны.

После умножения (2.1) слева на $A^{-1}(t)$ в некоторых уравнениях полученной системы, как показывают числовые оценки, возникают большие слагаемые, обусловленные малостью постоянной времени электродвигателей. Вводя соответствующий малый параметр μ , можно записать уравнение (2.1) в виде

$$\mu \Delta q^{\circ\circ} + \begin{vmatrix} \mu B_1(t) \\ B_2(t) \end{vmatrix} \Delta q^{\circ} + \begin{vmatrix} \mu C_1(t) \\ C_2(t) \end{vmatrix} \Delta q = \mu A^{-1}(t) h(t) e^{i\Omega t} \quad (2.2)$$

где B_1, B_2, C_1, C_2 — прямоугольные матрицы, выражающиеся через A, B, C , а h — вектор комплексной амплитуды. Функции $\mathbf{w}_0, \varepsilon_0$ в (2.1) предполагаются пропорциональными $\exp(i\Omega t)$.

Решение линейной неоднородной системы (2.2) с начальными условиями $\Delta q(0), \Delta q^{\circ}(0)$ состоит из ее частного решения Δq_* и решения $\Delta q'$ соответствующей однородной системы с начальными условиями $\Delta q'(0) = \Delta q(0) - \Delta q_*(0), \Delta q'^{\circ}(0) = \Delta q^{\circ}(0) - \Delta q^{\circ}_*(0)$.

При больших частотах возмущения можно ввести «быстрое» время $\tau = t/\varepsilon$ и нормированную частоту возмущения в быстром времени $\omega = \varepsilon\Omega$. Аналогично [9] будем искать решение в виде

$$\Delta q_*(\tau) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k R_k(t) \right] e^{i\omega\tau} \quad (\omega = \varepsilon\Omega) \quad (2.3)$$

Подставив это выражение в (2.2) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, считая μ и ε величинами одного порядка малости, найдем соотношения для $R_k(t)$.

Ограничиваясь вторым приближением, получим

$$R_0(t) = 0, \quad R_1(t) = 0, \quad R_2(t) = -\frac{i}{\omega} \left[A(t)i\omega + A(t) \begin{vmatrix} 0 \\ B_2(t) \end{vmatrix} \right]^{-1} h(t) \quad (2.4)$$

Выражение (2.4) преобразуем к виду

$$R_2(t) = -i[A(t)i\omega + B(t)]^{-1} h(t) / \omega \quad (2.5)$$

Выражение (2.5) отличается от (2.4) тем, что в нём вместо нулевой субматрицы подставлена субматрица $\mu B_1(t)$, фигурирующая в (2.2). Поэтому соотношения (2.4), (2.5) отличаются на величины порядка μ , что не нарушает принятой точности определения второго приближения. Однако выражение (2.5) проще для вычислений, в связи с чем оно используется в дальнейшем вместо (2.4).

Выражение (2.5) позволяет определить начальные условия для собственного движения. Считая, что начальные условия $\Delta q(0)$, $\Delta \dot{q}(0)$ имеют тот же порядок малости, что и $\Delta q_*(0)$, $\Delta \dot{q}_*(0)$ соответственно, т. е. $\Delta q(0) = \mu^2 a$, $\Delta \dot{q}(0) = \mu b$, с точностью до малых более высокого порядка будем иметь

$$\Delta \dot{q}'(0) = \mu^2 [a - \text{Im}(R_2(0))], \quad \Delta \dot{q}''(0) = \mu [b - \text{Re}(R_2(0)\omega)] \quad (2.6)$$

Определим собственное движение системы (2.2) с начальными условиями (2.6). Представим (2.2) при $h=0$ в форме

$$\dot{y}^* = f(z, y, t), \quad \mu \dot{z}^* = F(z, y, t), \quad y = (y', y''), \quad y' = \Delta q / \mu \quad (2.7)$$

где y'' , z^* — части вектора $\Delta \dot{q}^* / \mu$, соответствующие двум группам уравнений системы (2.2); через n'' обозначим размерность вектора y'' ($n'' \leq n$).

Уравнения (2.7) являются сингулярно возмущенными [10], их асимптотическое решение состоит из регулярной, медленно изменяющейся части $y^r(t)$, $z^r(t)$ и пограничных функций $y^*(\tau)$, $z^*(\tau)$, быстро затухающих вблизи начальной точки. Для определения $y^r(t)$, $z^r(t)$ воспользуемся подходом [11], а для расчета $y^*(\tau) = y_0^*(\tau) + \mu y_1^*(\tau) + \dots$ и $z^*(\tau) = z_0^*(\tau) + \mu z_1^*(\tau) + \dots$ — методом [10]. В результате вычислений получим

$$y_0^*(\tau) = 0, \quad z_0^*(\tau) = e^{D\tau} [z(0) - D^{-1} B_{21}(0) y''(0)], \quad D = -B_{22}(0) \quad (2.8)$$

$$y_1^*(\tau) = K D^{-1} e^{D\tau} [z(0) - D^{-1} B_{21}(0) y''(0)], \quad K = \|0 \ E \ -B_{12}(0)\|^r$$

где B_{ij} — части матрицы B_i , соответствующие переменным y'' (при $j=1$) и z (при $j=2$), E — единичная матрица размера $(n - n'') \times (n - n'')$, нулевая матрица — размера $n'' \times n''$.

Первое приближение $y_1^r(t)$ определяется дифференциальным уравнением

$$d y_1^r / dt = f(z_1^r, y_1^r, t), \quad y_1^r(0) = y(0) - \mu y_1^*(0) \quad (2.9)$$

в котором $z_1^r = H_0(y_1^r, t) + \mu H_1(y_1^r, t)$ — первое приближение для $z^r(t)$, и обозначено

$$H_0(y_1^r, t) = -B_{22}^{-1} \|C_2 \ B_{21}\| y_1^r, \quad H_1(y_1^r, t) = -B_{22}^{-1} B_{22}^{-1} \{ \|C_2 \ B_{21}\| \times$$

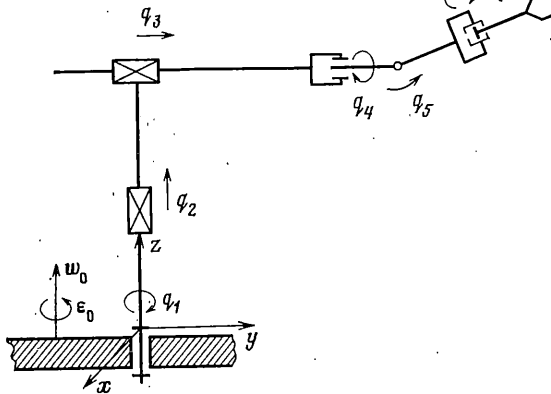
$$\times f(H_0(y_1^r, t), y_1^r, t) + [-(dB_{22}/dt) B_{22}^{-1} \|C_2 \ B_{21}\| + \|dC_2/dt \ dB_{21}/dt\|] y_1^r \}$$

$$\frac{d}{dt} \|B_{21} \ B_{22} \ C_2\| = \|A^{-1}\|_2 \left[-\frac{dA}{dt} \left\| \begin{matrix} B_{11} & B_{12} & C_1 \\ B_{21} & B_{22} & C_2 \end{matrix} \right\| + \left\| \frac{dB}{dt} \ \frac{dC}{dt} \right\| \right]$$

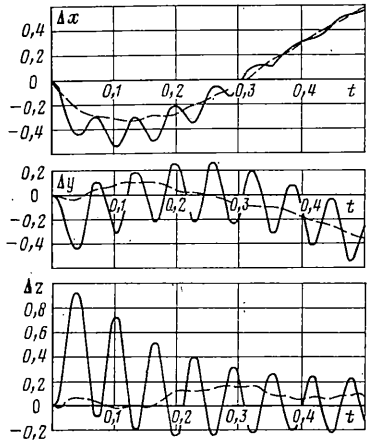
Здесь $\|A^{-1}\|_2$ — субматрица матрицы $A^{-1}(t)$: $B_2 = \|A^{-1}\|_2 B$; $C_2 = \|A^{-1}\|_2 C$; производные $dA(t)/dt$, $dB(t)/dt$, $dC(t)/dt$ вычисляются в соответствии с (2.1).

Таким образом, предлагаемый асимптотический метод расчета динамики манипулятора сводится к следующему. Сначала на основе исходного уравнения (1.4) с учетом (1.5) и заданного номинального движения $q^0(t)$ определяются коэффициенты линейной модели (2.1). Полученная система (2.1) приводится к виду (2.2), (2.7) путем выделения членов порядка μ (по предположению $\mu \sim \varepsilon \sim (\Omega T_0)^{-1}$). Затем по соотношениям (2.5), (2.6) находятся начальные данные $\Delta \dot{q}'(0)$, $\Delta \dot{q}''(0)$ для собственного движения. На их основе при помощи формул (2.8), (2.9) вычисляются начальные данные для уравнения (2.9). Посредством численного интегрирования задачи Коши (2.9) определяется $y_1^r(t)$. Вектор $y_1^*(\tau)$ находится по формуле (2.8), а вектор $\Delta \dot{q}$ — по формулам (2.3) — (2.5). Искомое отклонение Δq определяется в виде суммы $\Delta q = \mu [y_1^r(t) + \mu y_1^*(\tau)] + \Delta q_*(\tau)$ с погрешностью $O(\mu^3) = O(\varepsilon^3)$ при $t \in [0, T]$. Изложенная методика требует численного интегрирования уравнения (2.9), которое существенно проще, чем (2.1), так как имеет меньший порядок (равный $(n'' + n) \leq 2n$) и не содержит быстрых движений. В остальном расчет проводится по аналитическим формулам.

3. Результаты расчетов. Приведем некоторые результаты моделирования динамики манипулятора на ЭВМ. Рассчитывались возмущенные движения робота с шестью степенями свободы и электромеханическими приводами, изображенного на



Фиг. 1



Фиг. 2

фиг. 1. Рассматриваемая схема широко распространена и соответствует, в частности, роботам типа «Универсал» (СССР) (без учета дополнительного вращения руки) и УМС-2 (Югославия). Используются следующие числовые значения параметров [1, 4].

Массы звеньев: $m_1=10$ кг, $m_2=7$ кг, $m_3=4,15$ кг, $m_4=m_5=m_6=0,5$ кг.

Длины звеньев: $l_1=0,38$ м, $l_2=0,02$ м, $l_3=0,45$ м, $l_4=l_5=l_6=0,05$ м.

Главные центральные моменты инерции: $J_{z1}=0,029$ кг·м², $J_{z2}=0,55$ кг·м², $J_{z3}=-0,318$ кг·м², $J_{z4}=J_{z5}=J_{z6}=0,0015$ кг·м², $J_{x4}=J_{x5}=J_{x6}=J_{y4}=J_{y5}=J_{y6}=0,001$ кг·м².

Передаточные отношения редукторов: $N_{11}=31,17$, $N_{12}=2616$, $N_{13}=1570$, $N_{14}=N_{15}=-N_{16}=25$, $N_{21}=N_{11}$, $N_{22}=N_{12}$, $N_{23}=N_{13}$, $N_{24}=N_{25}=N_{26}=10$.

Коэффициенты вязкого трения: $B_{c1}=1,86 \cdot 10^{-4}$ Н·м/(рад/с), $B_{c2}=1,54 \cdot 10^{-2}$ Н·м/(рад/с), $B_{c3}=9,24 \cdot 10^{-3}$ Н·м/(рад/с), $B_{c4}=B_{c5}=B_{c6}=3 \cdot 10^{-4}$ Н·м/(рад/с).

Параметры приводов первой, второй и третьей степеней свободы: $c_m=-0,048$ Н·м/А, $c_e=0,046$ В/(рад/с), $R_r=1,6$ Ом, $J_r=3 \cdot 10^{-5}$ кг·м². Параметры приводов четвертой, пятой и шестой степеней свободы: $c_m=0,014$ Н·м/А, $c_e=0,013$ В/(рад/с), $R_r=3,32$ Ом, $J_r=10^{-5}$ кг·м².

Матрицы обратных связей задавались одним из следующих двух способов:

1) $G_0 = \text{diag}(3,56; 188; 113; 2,36; 2,37; 2,36)$, $G_1 = \text{diag}(1,93; 4,36; 2,66; 1,13; 1,14; 1,13)$;
 2) $G_0' = \text{diag}(29,6; 1209; 726; 14,9; 15,1; 14,9)$, $G_1' = \text{diag}(4,60; 27,9; 16,9; 1,22; 1,28; 1,24)$.
 Второй вариант отвечает более высоким значениям коэффициентов обратных связей, чем первый.

Программный закон движения задавался в виде (T — время движения):

$$q^\circ(t) = q(0) + 6(1/2 - 1/3t/T)t^2[q(T) - q(0)]/T^2 \quad (3.1)$$

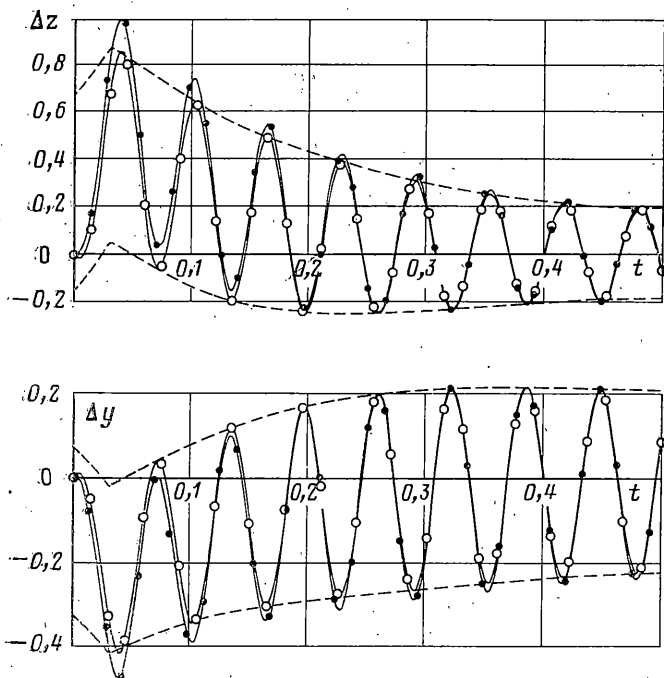
Исследование по полной модели (1.4), (1.5) проводилось численно с шагом интегрирования 0,001 с при пространственном движении робота из точки: $q_1(0)=0,2$ рад, $q_2(0)=0$, $q_3(0)=0,03$ м, $q_4(0)=0,3$ рад, $q_5(0)=0,5$ рад, $q_6(0)=0,2$ рад, в точку: $q_1(T)=0,6$ рад, $q_2(T)=0,1$ м, $q_3(T)=0,12$ м, $q_4(T)=0,8$ рад, $q_5(T)=1$ рад, $q_6(T)=0,7$ рад. На фиг. 2–5 построены отклонения Δx , Δy , Δz схвата манипулятора от его номинальной траектории в декартовых координатах (значения отклонений на фигурах приведены в мм, время — в с).

На фиг. 2 сплошной линией показано движение при вибрации основания, задаваемой в виде $\omega_{oz} = -10 \sin 100t$ м/с². Штриховой линией представлено действие случайного возмущения, амплитуда которого задается в виде центрированного случайного процесса: $\omega_{oz} = -10(0,5-R) \sin 100t$ м/с². Величина R здесь вычисляется на каждом шаге по времени при помощи программы генерации случайных чисел на интервале $[0, 1]$. Оба движения соответствуют первому варианту матриц обратной связи, вращательные движения основания здесь отсутствуют. Как видно, отклонения при случайном возмущении значительно меньше, чем при синусоидальном. Как показывают расчеты, предлагаемый вид управления (1.5) обеспечивает успешное отслеживание номинальной траектории манипулятора.

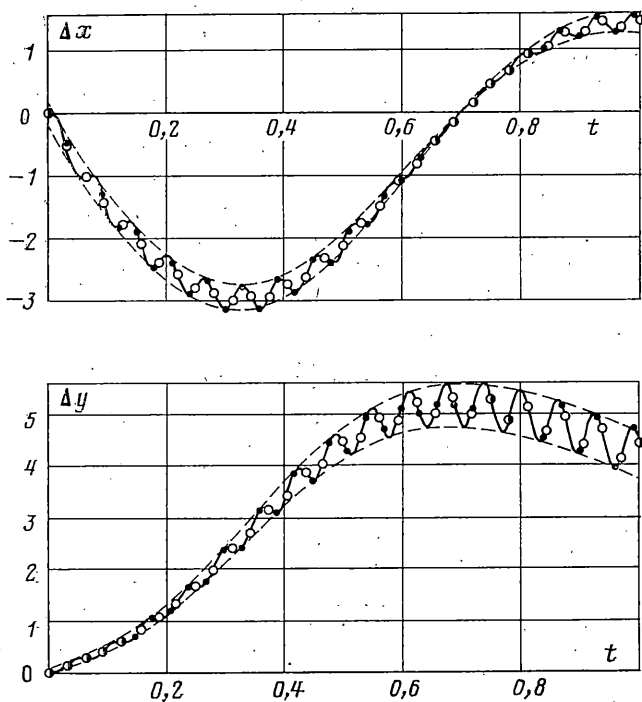
Асимптотический метод определения отклонений робота от его номинального движения иллюстрируется на фиг. 3–5.

Фиг. 3 соответствует движению робота в вертикальной плоскости: координаты $q_1 = \text{const}$, $q_4 = q_6 = 0$ фиксированы, а координаты q_2, q_3, q_5 в номинальном движении изменяются в соответствии с приведенными соотношениями. Вибрация основания задана тем же соотношением, что и в случае фиг. 2.

Фиг. 4, 5 отвечают движению робота в горизонтальной плоскости: координаты $q_2 = \text{const}$, $q_4 = q_6 = 0$ фиксированы, а остальные координаты в номинальном движении изменяются согласно (3.1) при следующих начальных и конечных значениях: $q_1(0)=0,2$ рад, $q_3(0)=0,03$ м, $q_6(0)=0,2$ рад, $q_1(T)=1,8$ рад, $q_3(T)=0,39$ м, $q_6(T)=$



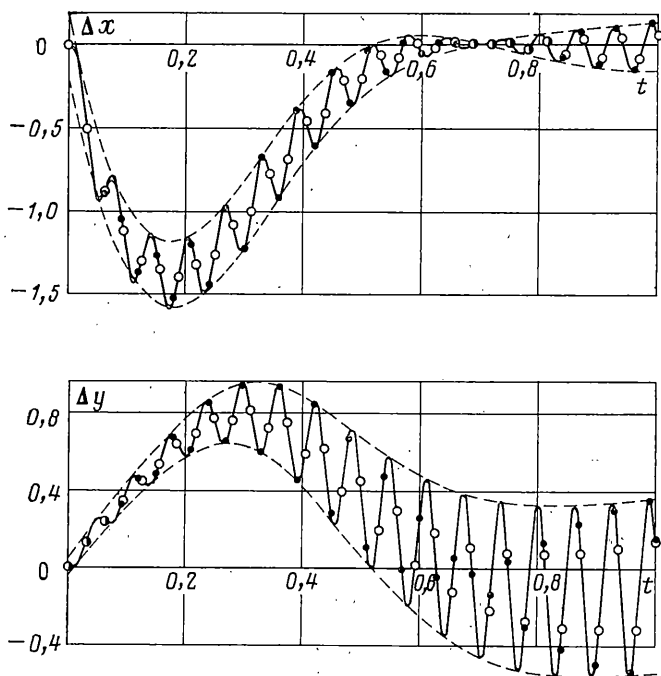
Фиг. 3



Фиг. 4

$=2,2$ рад. Вибрация основания задается в виде $\varepsilon_{0z} = -10 \sin 100t \text{ с}^{-2}$, поступательное движение основания отсутствует.

В случае, изображенном на фиг. 4, использовался первый вариант обратных связей, а в случаях, показанных на фиг. 3 и 5, — второй. Сплошными кривыми с темными точками на фиг. 3–5 показаны отклонения схвата Δx , Δy , Δz , полученные в результате численного моделирования по полной модели (1.4), (1.5), а кривыми со светлыми точками — результаты асимптотического решения. Штриховыми линиями изображены огибающие асимптотических решений, построенные на основе соотношений (2.5), (2.8) и решения уравнения (2.9) без вычисления самих величин $\Delta x(t)$, $\Delta y(t)$, $\Delta z(t)$. Возможность непосредственного определения амплитуды колебаний без



Фиг. 5

вычисления их фазы является одним из преимуществ асимптотического подхода, так как для практических оценок важны именно амплитуды колебаний.

Как показывают расчеты, предлагаемый асимптотический метод обеспечивает высокую точность вычисления возмущенного движения манипуляционных роботов. В то же время этот метод требует существенно меньших затрат машинного времени, так как в нем исключается интегрирование быстрых колебаний: шаг интегрирования примерно в 30 раз больше, чем для точной модели. Значительное снижение объема вычислений особенно ценно при решении задач управления в реальном времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vujić D., Vukobratović M. Uticaj mehaničkih vibracija na tačnost pozicioniranja manipulacionih robota. — Tehnika, 1985, god. 40, № 6, s. 1071–1079.
2. Медведев В. С., Лесков А. Г., Ющенко А. С. Системы управления манипуляционных роботов. М.: Наука, 1978. 416 с.
3. Витгенбург Й. Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. 292 с.
4. Вукобрагович М., Стокич Д. Управление манипуляционными роботами. М.: Наука, 1985. 383 с.
5. Пол Р. Моделирование, планирование траекторий и управление движением робота-манипулятора. М.: Наука, 1976. 103 с.
6. Аксельрод Б. В. Описание динамики манипуляторов с применением теории винтов. — Изв. АН СССР. МТТ, 1985, № 2, с. 79–84.
7. Черноусько Ф. Л. Динамика систем с упругими элементами большой жесткости. — Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 101–113.
8. Градецкий В. Г., Гукасян А. А., Грудев А. И., Черноусько Ф. Л. О влиянии упругой податливости конструкции роботов на их динамику. — Изв. АН СССР. МТТ, 1985, № 3, с. 63–71.
9. Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. Киев: Наук. думка, 1966. 252 с.
10. Васильева А. Б., Бугузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
11. Черноусько Ф. Л., Шамаев А. С. Эволюционные уравнения для медленных переменных в теории сингулярно возмущенных систем. — Докл. АН СССР, 1984, т. 277, № 2, с. 315–318.

Москва, Белград

Поступила в редакцию
6.VI.1986