МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1987

УДК 531.36

НЕРЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, СОДЕРЖАЩЕЙ ТЯЖЕЛУЮ ДВУХСЛОЙНУЮ ЖИДКОСТЬ

АКУЛЕНКО Л. Д., НЕСТЕРОВ С. В.

В линейной постановке исследуются одномерные горизонтальные колебания твердого тела, имеющего прямоугольную полость, целиком заполненную тяжелой двухслойной жидкостью; сосуд связан с неподвижным основанием упругой линейной связью [1, 2]. В [2] получено интегродифференциальное уравнение колебаний сосуда и поставлена соответствующая задача Коши. Методом усреднения удалось построить асимптотическое решение в случае, когда частота свободных колебаний тела и одна из собственных частот колебаний двухслойной жидкости в сосуде совпадают, т. е. имеется внутренний резонанс. Получена полная картина эволюций колебаний на асимптотически большом интервале времени. Случай, когда указанные частоты существенно различаются, т. е. внутренний резонанс отсутствует, оказывается более сложным для исследования, которое выполняется в настоящей работе.

1. Движение вдоль горизонтальной оси твердого тела с прямоугольной полосью, целиком заполненной двухслойной жидкостью, согласно [2] может быть описано интегродифференциальным уравнением и начальными условиями вида

$$Ms^{\cdot\cdot}=X+F, \qquad s(0)=s^\circ, \qquad s^{\cdot}(0)=0 \tag{1.1}$$

Здесь $s=s(t)$ — линейное смещение тела массы M, $t\in[0, T]$ $(T<\infty)$ — время, точки означают производные по t, X — результирующая сил давления колеблющейся жидкости на боковые стенки, F — внешняя сила. Величина X есть интегродифференциальный оператор от $s(t)$ [1, 2], определяемый выражениями

$$\begin{gathered}X=X(t, \ [s(t)])=-Qs^{\cdot\cdot}-Rs^{\cdot\cdot}-I(t, \ [s^{\cdot\cdot}(t)]) \\ Q=(\rho_1h_1+\rho_2h_2)lr=\rho_1V_1+\rho_2V_2, \qquad V=V_1+V_2 \\ R=\frac{8}{\pi^4}\frac{l}{gh}(Q_2-Q_1)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\omega_{2j+1}^2}{(2j+1)^4}, \qquad Q_{1,2}=\rho_{1,2}V \\ I(t, [s^{\cdot\cdot}(t)])=\frac{8}{\pi^4}\frac{l}{gh}(Q_2-Q_1)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\omega_{2j+1}^3}{(2j+1)^4}\int_0^t s^{\cdot\cdot}(\tau)\sin\omega_{2j+1}(t-\tau)\,d\tau\end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь Q — масса жидкости, R — присоединенная («волновая») масса, обусловленная волновыми движениями жидкости в полости. Таким образом, первые два члена в X (1.2) есть фиктивная «сила инерции» со стороны жидкости. Интегральный член I от $s^{\cdot\cdot}(t)$ в (1.2) характеризует запаздывание в распространении волновых процессов и их воздействия на боковые стенки. Это слагаемое, как и волновой член $Rs^{\cdot\cdot}$, пропорционален разности $Q_2-Q_1=(\rho_2-\rho_1)V$. Величины ρ_1, ρ_2 $(\rho_2>\rho_1\geqslant0)$ — постоянные плотности верхнего и нижнего слоев жидкости соответственно (случай устойчивой стратификации), $V_{1,2}=h_{1,2}lr$ — объемы этих слоев, $V=V_1+V_2$ — полный объем полости, $h=h_1+h_2$ — высота полости, h_1, $h_2>0$ — толщины слоев, l — длина, а r — ширина полости, g — ускорение сил тяготения. Величины ω_n — собственные частоты внутренних волн двухслойной жидкости [2, 3], определяемые выражениями ($n=1, 2, \ldots$):

$$\omega_n^2 = \frac{(\rho_2-\rho_1)\, g l^{-1} n \operatorname{th}(\pi n h_1 l^{-1}) \operatorname{th}(\pi n h_2 l^{-1})}{\rho_2 \operatorname{th}(\pi n h_1 l^{-1}) + \rho_1 \operatorname{th}(\pi n h_2 l^{-1})}$$

$$\omega_n \to \omega_0 \sqrt{n}, \quad n \to \infty; \quad \omega_0^2 = (g l^{-1})(\rho_2-\rho_1)(\rho_1+\rho_2)^{-1} \tag{1.3}$$

Сила F может быть обусловлена линейной или нелинейной пружиной, связывающей тело и неподвижное основание [1, 2], тяготением (маятник с полостью, содержащей двухслойную жидкость) и другими факторами. Далее рассматривается случай [2], когда F — линейная возвращающая сила

$$F = F(t, s, s^{\cdot}) \equiv -\lambda^2 s \tag{1.4}$$

В (1.4) $\lambda^2 > 0$ — коэффициент пропорциональности восстанавливающей силы; другие внешние и внутренние воздействия (возмущения) не учитываются.

Для удобства асимптотического анализа задачу Коши (1.1) при помощи элементарных преобразований (интегрирования по частям в I (1.2) с учетом условия $s^{\cdot}(0)=0$ (1.1)) и перехода к безразмерным переменным аналогично [2] можно записать в следующем виде:

$$s^{\cdot\cdot} + s = -\varepsilon \int_0^t \chi(t-\tau)\, s^{\cdot}(\tau)\, d\tau, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0] \tag{1.5}$$

$$s(0) = s^\circ, \quad s^{\cdot}(0) = 0; \quad t \in [0, T], \quad T = T(\varepsilon)$$

Здесь в качестве единицы длины d естественно взять характерную линейную величину движения, например, $d = s^\circ$ (тогда в (1.5) $s(0) = s_*^\circ = 1$) или $d = l$ (тогда $s(0) = s_*^\circ = s^\circ / l$). Безразмерное время t_*, $t_* \in [0, T_*]$ удобно ввести следующим образом: $t_* = \Omega t$, $\Omega^2 = \lambda^2 / M_\Sigma$, где $M_\Sigma = M + Q + R$ — обобщенная инерционная характеристика системы («обобщенная масса»); индекс $*$ внизу для удобства опускается. Величина Ω характеризует частоту свободных колебаний тела с «затвердевшей жидкостью» в полости, если числовой параметр $\varepsilon > 0$ мал; в частности $\varepsilon \to 0$, что имеет место при $\rho_1 \to \rho_2$, поскольку по определению в (1.5):

$$\varepsilon = \frac{8}{\pi^4} \frac{(\rho_2-\rho_1) r l^3}{M_\Sigma g} \Omega^2 = \frac{8}{\pi^4} \frac{l}{h} \frac{Q_2 - Q_1}{M_\Sigma} \frac{l \Omega^2}{g} \tag{1.6}$$

Следует отметить, что тогда «присоединенная масса» R, входящая в M_Σ, также порядка ε: $R/M_\Sigma \sim R/(M+Q) \sim \varepsilon$.

Выражение для разностного ядра $\chi(t-\tau)$ интегрального оператора типа свертки в (1.5) получается посредством указанных преобразований переменных и параметров. Функция $\chi(t)$ имеет вид

$$\chi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \cos \nu_{2j+1} t, \quad \alpha_j = \nu_{2j+1}^4 / (2j+1)^4$$

$$\nu_n = \omega_n / \Omega \sim \sqrt{n}, \quad \alpha_n \sim 1/n^2, \quad n \to \infty \tag{1.7}$$

Ряд (1.7) абсолютно и равномерно сходится вместе с первой производной по t, $t \in [0, \infty)$ к некоторой равномерной почти периодической функции [4].

При $\varepsilon = 0$ система (1.5) совершает гармонические колебания с единичной частотой и амплитудой s°. Ставится задача исследовать эволюцию колебаний системы (1.5) при $\varepsilon > 0$ достаточно малом на асимптотически большом интервале времени, на котором происходит существенное изменение характеристик движения (амплитуды, фазы и т. п.), т. е. качественная эволюция картины колебаний [2, 5, 6].

2. Следует отметить, что может быть построено точное решение соответствующего линейного интегродифференциального уравнения с разностным ядром. Оно строится операционными методами при помощи преобразования Лапласа в виде контурного интеграла [2]. Однако получающееся при этом выражение $s=s(t, s^\circ, \varepsilon)$ не пригодно для анализа движения системы, поскольку указанный интеграл не вычисляется явно. Соответствующее подынтегральное выражение имеет счетное число чисто мнимых полюсов, определить которые для применения теории вычетов из весьма сложного трансцендентного уравнения, задаваемого рядами, не представляется возможным [2]. Исследуемая система эквивалентна колебательной системе со счетным числом колебательных степеней свободы, обусловленных взаимодействием сложных относительных волновых движений двухслойной жидкости в полости и колебаний сосуда относительно положения равновесия $s=0$.

В практических задачах параметр $\varepsilon>0$ можно считать достаточно малым. Поэтому существенный интерес и прикладное значение имеет развитие асимптотических методов анализа движения системы (1.5)–(1.7) на больших интервалах времени t ($T(\varepsilon)\to\infty$, $\varepsilon\to 0$), на которых происходит значительное (порядка единицы) изменение оскулирующих переменных (амплитуды и фазы (фазовой расстройки), переменных типа Ван-дер-Поля и т. п. [2, 5, 6]). Исследование колебательных систем со счетным числом степеней свободы на асимптотически больших интервалах времени сопряжено с большими аналитическими и вычислительными трудностями [2].

Для удобства применения метода усреднения по явно входящему времени t и аргументу интегрирования в (1.5) совершается замена переменных $(s, s^\cdot)$ на медленный двумерный вектор $w^T=(a, b)$ переменных типа Ван-дер-Поля посредством «преобразования поворота» [2]:

$$\begin{bmatrix} s \\ s^\cdot \end{bmatrix}=W(t)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \qquad W(t)=\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Дифференцирование замены (2.1) в силу (1.5) приводит к системе интегродифференциальных уравнений «стандартного вида»:

$$a^\cdot(t)=\varepsilon\int_0^t \sin t\chi(t-\tau)\left[-a(\tau)\sin\tau+b(\tau)\cos\tau\right]d\tau \qquad (a(0)=s^\circ)$$

$$b^\cdot(t)=-\varepsilon\int_0^t \cos t\chi(t-\tau)\left[-a(\tau)\sin\tau+b(\tau)\cos\tau\right]d\tau \qquad (b(0)=0) \tag{2.2}$$

В более компактной векторной форме интегродифференциальная задача Коши (2.2) записывается следующим образом:

$$w^\cdot(t)=\varepsilon\int_0^t K(t,\tau)w(\tau)\,d\tau, \qquad w(0)=w^\circ=\begin{bmatrix} s^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K(t,\tau)=\begin{bmatrix} -\sin t\sin\tau & \sin t\cos\tau \\ \cos t\sin\tau & -\cos t\cos\tau \end{bmatrix}\chi(t-\tau) \tag{2.3}$$

$$\det K(t,\tau)\equiv 0, \qquad t,\ \tau\in[0,\infty)$$

$$t\in[0,T],\quad T=T(\varepsilon),\quad \varepsilon\in(0,\varepsilon_0];\qquad T(\varepsilon)\to\infty,\quad \varepsilon\to 0$$

Здесь ядро $K(t, \tau)$ линейного интегрального оператора на основе вышеизложенного является непрерывно дифференцируемой по обоим аргументам равномерной почти периодической матрицей-функцией. Ставится задача приближенного асимптотического решения задачи Коши (2.3). Величина $T=T(\varepsilon)$ в (2.3) выбирается асимптотически большой, такой, что на интервале $t\in[0, T]$ происходит существенное (порядка единицы по отношению к малому параметру $\varepsilon\ll 1$) изменение «медленного» вектора w.

Следует заметить, что задача Коши (2.3) обобщает соответствующую задачу для системы дифференциальных уравнений

$$v^{\cdot\cdot}=\varepsilon H(t)v, \quad v(0)=v^\circ, \quad v^\cdot(0)=0 \tag{2.4}$$

где $H(t)$ — равномерная почти периодическая (2×2)-матрица. Задача Коши (2.4) однократным интегрированием приводится к частному случаю интегродифференциальной задачи (2.3), в которой матрица $K(t, \tau)\equiv\equiv H(\tau)$, т. е. не зависит от t, что существенно для дальнейшего. Система (2.4) посредством простой замены приводится к виду стандартной по Боголюбову [5, 6] с малым параметром $\sqrt{\varepsilon}$:

$$v^\cdot=\sqrt{\varepsilon}u, \quad u^\cdot=\sqrt{\varepsilon}H(t)v, \quad v(0)=v^\circ, \quad u(0)=0 \tag{2.5}$$

К (2.5) применима простая схема метода усреднения по t. Дифференциальные уравнения (2.5) квадратурами элементарно сводятся к интегральным типа Вольтерра второго рода [7], используемым при обосновании метода усреднения (лемма Гронуолла [8]).

Приведенные наводящие соображения справедливы также для интегродифференциальной системы (2.3). Аналогично (2.5) система (2.3) заменой $w^\cdot=\sqrt{\varepsilon}z$ преобразуется к интегральным уравнениям «стандартного вида» типа Вольтерра второго рода с малым параметром $\sqrt{\varepsilon}$:

$$w(t)=w^\circ+\sqrt{\varepsilon}\int_0^t z(\tau)d\tau, \quad z(t)=\sqrt{\varepsilon}\int_0^t K(t,\tau)w(\tau)d\tau \tag{2.6}$$

Как установлено [2], к интегральным уравнениям (2.6) применим метод усреднения [5, 6]. Процедура усреднения первого приближения по $\sqrt{\varepsilon}$ на интервале времени порядка $1/\sqrt{\varepsilon}$ заключается в усреднении ядра $K(t, \tau)$ по обоим аргументам t и τ. На основе представлений (1.7), (2.2) это двойное среднее $\langle K(t, \tau)\rangle_{t,\tau}=K_{00}$ существует [4].

Если имеет место «резонансный случай» $\nu_{2j+1}=1$, т. е. $\omega_{2j+1}=\Omega$ для некоторого фиксированного «не очень большого» $j=j^*=0, 1, 2, \ldots$, то указанное среднее отлично от нуля и равно $\langle K(t, \tau)\rangle_{t,\tau}=K_{00}=-\varkappa^2E$, где $\varkappa=1/2(2j^*+1)^2$, E — единичная (2×2)-матрица. Искомое решение первого (по $\sqrt{\varepsilon}$) приближения в безразмерных переменных равно [2]:

$$a(t,\ \varepsilon)=s^\circ\cos\sqrt{\varepsilon}\varkappa t+O(\sqrt{\varepsilon}), \quad b(t,\ \varepsilon)=O(\sqrt{\varepsilon}), \quad t\in[0,\ \vartheta/\sqrt{\varepsilon}] \tag{2.7}$$
$$s(t,\ \varepsilon)=s^\circ\cos\sqrt{\varepsilon}\varkappa t\cos t+O(\sqrt{\varepsilon}), \quad s^\cdot(t,\ \varepsilon)=-s^\circ\cos\sqrt{\varepsilon}\varkappa t\sin t+O(\sqrt{\varepsilon})$$

Механическая картина колебательного процесса ясна: происходит обмен энергией между колебаниями твердого тела и внутренними волновыми движениями жидкости («биения» с частотой $O(\sqrt{\varepsilon})$). Линейная задача в «резонансном случае» подробно изучена в [2]; там же приведено обоснование метода усреднения и оценка погрешности $O(\sqrt{\varepsilon})$ для $t\sim1/\sqrt{\varepsilon}$ приближенного решения (2.7).

3. Вопрос об эволюции медленных переменных и качественном поведении системы на асимптотически большом интервале времени в так называемом «нерезонансном случае» $\nu_{2j+1}\neq1$, т. е. $\omega_{2j+1}\neq\Omega$ $(j=0, 1, 2, \ldots)$, когда $K_{00}=0$, оставался открытым [2]. При помощи обычной процедуры усреднения и стандартных оценок удается получить выражения [2]:

$$a(t,\ \varepsilon)=s^\circ+O(\varepsilon^\gamma), \quad b(t,\ \varepsilon)=O(\varepsilon^\gamma) \tag{3.1}$$
$$t\in[0,\ \vartheta/\varepsilon^{1-\gamma}], \quad 0<\gamma<1 \quad (\gamma,\ \vartheta=\mathrm{const})$$

В частности, при $\gamma=1/2$ получаются выражения и оценки типа (2.7). Возникает проблема построения приближенного решения на интервале времени $t\in[0,\ \vartheta/\varepsilon]$, для которого указанные построения непригодны. Для исследования системы (2.3) целесообразно воспользоваться формулой повторного интегрирования и привести ее к интегральному виду

$$w(t)=w^{\circ}+\varepsilon\int_{0}^{t}L(t,\tau)\,w(\tau)\,d\tau \tag{3.2}$$

$$L(t,\tau)=\int_{\tau}^{t}K(\sigma,\tau)\,d\sigma=K_{0}^{(1)}(\tau)\,(t-\tau)+L^{(1)}(t,\tau)$$

$$K_{0}^{(1)}(\tau)\equiv\langle K(t,\tau)\rangle_{t},\qquad 0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T(\varepsilon)$$

Здесь $K_0^{(1)}(\tau)$, $L^{(1)}(t,\tau)$ — равномерные почти периодические матрицы-функции t, τ $(0\leqslant\tau\leqslant t<\infty)$. Если матрица $L(t,\tau)$ равномерно ограничена по t, τ, что имеет место лишь при условии $K_0^{(1)}(\tau)\equiv0$, то среднее $L_{00}\equiv\langle L(t,\tau)\rangle_{t,\tau}$ существует. Решение $w(t,\varepsilon)$ (3.2) тогда близко постоянной — начальному значению w° на интервале времени $t\in[0,\vartheta/\varepsilon]$ при условии, что $\langle L^{(1)}(t,\tau)\rangle_{\tau}\equiv0$ (это случай «очень слабого» ядра $K(t,\tau)$). Утверждение устанавливается стандартным приемом на основе интегрального равенства и применения леммы (неравенства) Гронуолла [2]:

$$w(t)-w^{\circ}=\varepsilon\int_{0}^{t}L(t,\tau)\,[w(\tau)-w^{\circ}]\,d\tau+\varepsilon\int_{0}^{t}L(t,\tau)\,w^{\circ}\,d\tau \tag{3.3}$$

$$|w(t,\varepsilon)-w^{\circ}|\leqslant\varepsilon\max_{t\in[0,\vartheta/\varepsilon]}\left\|\int_{0}^{t}L(t,\tau)\,d\tau\right\|\,|w^{\circ}|\exp(\|L\|\vartheta)$$

Следует заметить, что к «резонансному случаю» нужно относить ситуацию, когда $K_0^{(1)}(\tau)\not\equiv0$, хотя $\langle K_0^{(1)}(\tau)\rangle_{\tau}=0$, т. е. $K_{00}=0$. Для рассматриваемой задачи (2.3) в «нерезонансном случае» $K_0^{(1)}(\tau)\equiv0$, однако среднее $\langle L^{(1)}(t,\tau)\rangle_{\tau}\not\equiv0$. Поэтому, вообще говоря (нетрудно построить контрпример), нельзя гарантировать ε-близости $\mathrm{w}(t,\varepsilon)$ и w° на асимптотически большом интервале $t\in[0,\vartheta/\varepsilon]$, а только погрешность $O(\varepsilon^{\gamma})$ для относительно короткого интервала $t\in[0,\vartheta/\varepsilon^{1-\gamma}]$, $0<\gamma<1$ (см. выше) и, кроме того, нельзя утверждать, что w является медленной переменной на большом промежутке изменения времени.

Для применения асимптотических методов (типа усреднения [5, 6]) в нерезонансном случае предполагается, однако, что w — медленная переменная, т. е. $w(t,\varepsilon)\sim1$ при $t\sim1/\varepsilon$. Тогда естественно сделать в (3.2) замену

$$w(t)=\xi(t)+\varepsilon\int_{0}^{t}L(t,\tau)\,\xi(\tau)\,d\tau \tag{3.4}$$

Здесь $L(t,\tau)$ — равномерная почти периодическая матрица-функция. Подстановка (3.4) в (2.3) приводит к векторному интегродифференциальному уравнению относительно вектора ξ

$$\xi^{\cdot}(t)=\varepsilon^{2}\int_{0}^{t}S(t,\sigma)\,\xi(\sigma)\,d\sigma,\qquad \xi(0)=w^{\circ},\qquad S(t,\sigma)=\int_{\sigma}^{t}K(t,\tau)\,L(\tau,\sigma)\,d\tau \tag{3.5}$$

В (3.5), как и в (3.2), используется формула повторного интегрирования. Специфика задачи Коши (3.5) такова, что в рассматриваемом «нерезонансном случае» подстановка выражений (1.7), (2.3), (3.2) в (3.5) приводит к матрице-функции $S(t,\sigma)$, элементы которой $S_{\alpha\beta}(t,\sigma)$ $(\alpha,\beta=1,2)$ есть равномерные почти периодические функции по обоим аргументам t, σ. Резонансные члены, пропорциональные $(t-\sigma)$, как в (3.2), взаимно уничтожаются. В результате громоздких вычислений для элементов $S_{\alpha\beta}(t, \sigma)$ получаются выражения

$$\begin{gathered}
S_{11}(t, \sigma)={}^1/_2A \sin t \sin\sigma \cos\sigma[-{}^1/_2A \cos t+\chi_c(t, \sigma)]- \\
-{}^1/_2A \sin t \sin^2\sigma[{}^1/_2A \sin t-\chi_s(t, \sigma)] \\
S_{12}(t, \sigma)=-{}^1/_2A \sin t \cos^2\sigma[-{}^1/_2A \cos t+\chi_c(t, \sigma)]+ \\
+{}^1/_2A \sin t \sin\sigma\cos\sigma[{}^1/_2A \sin t+\chi_s(t, \sigma)] \\
S_{21}(t, \sigma)=-{}^1/_2A \cos t \sin\sigma\cos\sigma[-{}^1/_2A \cos t+\chi_c(t, \sigma)]+ \\
+{}^1/_2A \cos t \sin^2\sigma[{}^1/_2A \sin t-\chi_s(t, \sigma)] \\
S_{22}(t, \sigma)={}^1/_2A \cos t \cos^2\sigma[-{}^1/_2A \cos t+\chi_c(t, \sigma)]- \\
-{}^1/_2A \cos t \sin\sigma\cos\sigma[{}^1/_2A \sin t-\chi_s(t, \sigma)]
\end{gathered} \tag{3.6}$$

Постоянная A $(A \gtreqless 0)$ и равномерные почти периодические функции $\chi_{c,s}(t, \sigma)$ строятся на основе выражения (1.7) для $\chi(t)$ и равны

$$A=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\alpha_j}{1-\nu^2_{2j+1}}, \quad \alpha_j=\frac{\nu^4_{2j+1}}{(2j+1)^4} \quad (j=0, 1, 2, \ldots) \tag{3.7}$$

$$\chi_c(t,\sigma)=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha_j^+\cos\psi_j^+ + \alpha_j^-\cos\psi^-),$$

$$\chi_s(t,\sigma)=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha_j^+\sin\psi_j^+ + \alpha_j^-\sin\psi_j^-)$$

$$\alpha_j^\pm=\alpha_j/(1\pm\nu_{2j+1}), \quad \psi^\pm=\sigma\pm\nu_{2j+1}(\sigma-t)$$

Поскольку $\nu_{2j+1}\neq 1$ (резонанс отсутствует), то все ряды в (3.7) абсолютно и равномерно сходятся. Таким образом, интегральной заменой (3.4) интегродифференциальная задача Коши (2.3) приведена к виду (3.5), где равномерно почти периодическое ядро $S(t, \sigma)$ обладает теми же свойствами, что и $K(t, \tau)$ в случае резонанса, см. [2] и п. 2. Непосредственное применение методики работы [2] позволяет построить приближенное («резонансное») с погрешностью $O(\varepsilon)$ на интервале $t\in[0, \vartheta/\varepsilon]$ решение $\xi(t, \varepsilon)$, см. выше. Для этого нужно усреднить матрицу $S(t, \sigma)$ по t, σ; в результате согласно (3.6) $\langle S(t, \sigma)\rangle_{t,\sigma}=-(A/4)^2E$, где E — единичная матрица. Медленный вектор $\xi(t, \varepsilon)$ находится приближенно в виде

$$\xi^T(t, \varepsilon)=(s^0\cos(({}^1/_4)A\varepsilon t)+O(\varepsilon), O(\varepsilon)) \quad t\in[0, \vartheta/\varepsilon] \tag{3.8}$$

Подстановка выражения $\xi(t, \varepsilon)$ (3.8) в формулу замены (3.4) позволяет определить действительно медленный вектор $w(t, \varepsilon)$ с искомой погрешностью по ε:

$$\begin{gathered}
w^T=(a, b), \quad a(t, \varepsilon)=s^0\cos(({}^1/_4)A\varepsilon t)+O(\varepsilon) \\
b(t, \varepsilon)=-s^0\sin(({}^1/_4)A\varepsilon t)+O(\varepsilon), \quad t\in[0, \vartheta/\varepsilon]
\end{gathered} \tag{3.9}$$

В итоге получается простая формула, определяющая в безразмерных переменных нерезонансные колебания твердого тела с полостью, целиком заполненной двухслойной жидкостью. Согласно (2.1) смещение сосуда s и его скорость $s^\cdot$ равны

$$\begin{gathered}
s(t, \varepsilon)=s^0\cos\nu t+O(\varepsilon), \quad t\in[0, \vartheta/\varepsilon] \\
s^\cdot(t, \varepsilon)=-s^0\sin\nu t+O(\varepsilon), \quad \varepsilon\in(0, \varepsilon_0]
\end{gathered} \tag{3.10}$$

$$\nu=\nu(\varepsilon)=1+\frac{\varepsilon}{4}A, \quad A=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\nu^4_{2j+1}}{(2j+1)^4}\frac{1}{1-\nu^2_{2j+1}}$$

В первом приближении по ε движение тела представляет собой гармонические колебания с постоянной амплитудой s^0 и мало, на $O(\varepsilon)$, измененной частотой $\nu(\varepsilon)=1+O(\varepsilon)$, т. е. эквивалентно колебаниям некоторой линейной консервативной системы с одной степенью свободы вида $s^{\cdot\cdot}+\nu^2 s=0$, $s(0)=s^0$, $s^{\cdot}(0)=0$, $\nu=\nu(\varepsilon)=1+(^1/_4)\varepsilon A$, $t\in[0, \vartheta/\varepsilon]$.

Таким образом, колебания твердого тела в резонансном (2.7) и нерезонансном (3.10) случаях — существенным образом различаются. Влияние колебаний жидкости в нерезонансном случае эквивалентно наличию положительной (при $A<0$) или отрицательной (при $A>0$), присоединенной массы.

4. Полученные выражения (3.10) остаются справедливыми вне $\sqrt{\varepsilon}$-окрестности значений частот: $\nu_{2j+1}-1=O(1)$; внутри $\sqrt{\varepsilon}$-окрестности, когда $\nu_{2j+1}-1=O(\sqrt{\varepsilon})$, имеет место резонансная ситуация, исследованная, в частности, при $\nu_{2j+1}-1=O(\varepsilon)$ в [2].

Приближенное решение $w(t, \varepsilon)$ (3.9) интегродифференциальной задачи Коши (2.3) более просто следует из интегрального уравнения (3.2). В самом деле, при помощи леммы Гронуолла устанавливается ε-близость для $t\in[0, \vartheta/\varepsilon]$ решения $w(t, \varepsilon)$ уравнения (3.2) и решения $\eta(t, \varepsilon)$ этого уравнения с усредненным по аргументу интегрирования τ ядром $L(t, \tau)$:

$$\eta(t)=w^\circ+\varepsilon L_0^{(2)}(t)\int_0^t \eta(\tau)\,d\tau \tag{4.1}$$

$$L_0^{(2)}(t)\equiv\langle L(t,\tau)\rangle_\tau=\langle L(t,\tau)\rangle_{t,\tau}\equiv L_{00}=\text{const}$$

Весьма существенно, что матрица $L_0^{(2)}(t)$ оказывается постоянной. Тогда для решения $\eta(t, \varepsilon)$ системы (4.1) при помощи интегральных неравенств получается искомая оценка близости к решению $w(t, \varepsilon)$ системы (3.2) для $t\in[0, \vartheta/\varepsilon]$:

$$|w-\eta|\leqslant \exp(\|L\|\vartheta)\,\varepsilon^2 \max_t\left|\int_0^t P(t, \sigma)\eta(\sigma)\,d\sigma\right|\leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \exp[(\|L\|+\|L_{00}\|)\vartheta]C_L\vartheta|w^\circ|,\qquad t\in[0, \vartheta/\varepsilon]$$

$$P(t, \sigma)=\int_\sigma^t [L(t,\tau)-L_0^{(2)}(\tau)]L_0^{(2)}(\tau)\,d\tau,\qquad \|P\|\leqslant C_L \tag{4.2}$$

$$\eta(t, \varepsilon)=w^0\exp(\varepsilon L_{00}t),\quad |\eta|\leqslant|w^0|\exp(\|L_{00}\|\vartheta)$$

Матрица $L_0^{(2)}(t)\equiv L_{00}$ в (4.1), (4.2), как и следовало ожидать, кососимметрическая с элементами $(^1/_4)A$ и $-(^1/_4)A$ на побочной диагонали. Дифференцируя (4.1) по t, можно получить (см. (3.9)):

$$\eta^T(t, \varepsilon)=(s^0\cos((^1/_4)A\varepsilon t),\ -s^0\sin((^1/_4)A\varepsilon t))$$
$$\eta(t, \varepsilon)=w(t, \varepsilon)+O(\varepsilon),\quad t\in[0, \vartheta/\varepsilon]$$

Для приложений изложенной методики представляет существенный интерес учет влияния дополнительных внешних и внутренних возмущающих воздействий.

Авторы благодарят В. Ф. Журавлева за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
2. *Акуленко Л. Д., Нестеров С. В.* Колебания твердого тела с полостью, содержащей тяжелую неоднородную жидкость.– Изв. АН СССР. МТТ, 1986, № 1, с. 27–36.
3. *Акуленко Л. Д., Нестеров С. В.* Управление колебаниями неоднородной тяжелой жидкости в подвижном сосуде.– Изв. АН СССР. МТТ, 1985, № 3, с. 27–35.
4. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978. 205 с.
5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
6. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 508 с.
7. *Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. и др.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.
8. *Филатов А. Н., Шарова Л. В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 152 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.X.1985