МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1987

УДК 531.5

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЯХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

БАРКИН Ю. В., ПАНКРАТОВ А. А.

Вычисление характеристических показателей периодических решений представляет интерес, во-первых, для анализа необходимых условий их устойчивости, а во-вторых, для построения решений, близких к изучаемым периодическим решениям. Первая задача позволяет определить неустойчивые периодические решения, а вторая – представляет интерес для построения аналитических теорий движения механических систем, когда в качестве их невозмущенных движений выбираются соответствующие периодические движения. Задача вычисления характеристических показателей также связана с проблемой линейной и нелинейной нормализации гамильтониана в окрестности периодических решений. Последние вопросы имеют важное значение для исследования достаточных условий устойчивости по А. М. Ляпунову периодических решений и для более глубокого аналитического исследования их окрестности.

В настоящей работе исследуется устойчивость периодических решений канонической системы дифференциальных уравнений специального вида, так называемой основной задачи динамики [1], в линейном приближении. Изучена структура и найдены приближенные значения характеристических показателей как основных, так и некоторых вырожденных периодических решений. Дано приложение полученных результатов для изучения необходимых условий устойчивости вращения Венеры в рамках модели ее плоского движения в сложном гравитационном поле Земли и Солнца.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$d\mathbf{x}/dt=\mathbf{f}(\mathbf{x},\ t),\quad \mathbf{x}=(x_1,\dots,\ x_N)^T,\quad \mathbf{f}=(f_1,\dots,\ f_N)^T \tag{1.1}$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{x},\ t)$ — периодическая функция времени с периодом T_0.

Пусть система (1.1) имеет единственное аналитическое решение $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t,\ \xi)$, такое, что $\mathbf{x}(0,\ \xi)=\xi$, $\xi=(\xi_1,\dots,\ \xi_N)^T$. Пусть при $\xi=\xi^*$ это решение является периодическим с периодом T кратным T_0, т. е. $\mathbf{x}_p(t)=\mathbf{x}(t,\ \xi^*)=\mathbf{x}(t+T,\ \xi^*)$. Уравнения в вариациях системы (1.1) для периодического решения имеют вид $d\mathbf{y}/dt=\mathbf{F}(t)\mathbf{y}$, где $\mathbf{y}=\mathbf{x}-\mathbf{x}_p(t)$, $\mathbf{F}(t)=\partial\mathbf{f}(\mathbf{x},\ t)/\partial\mathbf{x}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p(t)}$ — периодическая по t матрица с периодом T.

Тогда $\mathbf{X}(t)=\partial\mathbf{x}(t,\ \xi)/\partial\xi|_{\xi=\xi^*}$ будет фундаментальной матрицей решений уравнений в вариациях, а $\mathbf{X}(T)$ — матрицей монодромии (см., например, [2]).

2. **Определяющее уравнение А. Пуанкаре.** Будем изучать периодические решения неавтономной гамильтоновой системы стандартного вида [1, 3]:

$$\begin{gathered}
d\mathbf{I}/dt=\partial H/\partial\varphi^T,\qquad d\varphi/dt=-\partial H/\partial\mathbf{I}^T\\
d\mathbf{J}/dt=\partial H/\partial\psi^T,\qquad d\psi/dt=-\partial H/\partial\mathbf{J}^T\\
\mathbf{I}^T=(p_1,\dots,\ p_l),\qquad \mathbf{J}^T=(p_{l+1},\dots,\ p_N),\qquad \mathbf{p}^T=(\mathbf{I}^T,\ \mathbf{J}^T)\\
\varphi^T=(q_1,\dots,\ q_l),\qquad \psi^T=(q_{l+1},\dots,\ q_N),\qquad \mathbf{q}^T=(\varphi^T,\ \psi^T)\\
H(\mathbf{p},\ \mathbf{q},\ t,\ \mu)\equiv H_0(\mathbf{I})+\mu H_1(\mathbf{p},\ \mathbf{q},\ t)+\mu^2H_2(\mathbf{p},\ \mathbf{q},\ t)+\dots
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Гамильтониан задачи является аналитической функцией переменных $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, t и малого параметра μ. Функции $H_i(\mathbf{p},\ \mathbf{q},\ t)$ $(i\geqslant 1)$ разлагаются в сходящиеся ряды Фурье по кратным угловых переменных $\mathbf{q}$ и Ωt ($\Omega=2\pi/T_0$ — заданная постоянная частота, T_0 — период).

В [3] получены достаточные условия существования периодических решений уравнений (2.1) как в основном случае А. Пуанкаре [1], так и в двух случаях вырождения. Для исследования устойчивости указанных периодических решений в линейном приближении разработаем процедуру вычисления их характеристических показателей.

В [3] использовалось следующее представление общего решения уравнений (2.1) (суммирование производится по m от 1 до ∞):

$$\mathbf{I}=\mathbf{a}_1+\beta_1+\sum\mu^m\mathbf{I}_m(\mathbf{a}_1+\beta_1,\mathbf{a}_2+\beta_2,\mathbf{n}t+\omega_1+\gamma_1,\omega_2+\gamma_2,t)\tag{2.2}$$

$$\mathbf{J}=\mathbf{a}_2+\beta_2+\sum\mu^m\mathbf{J}_m(\mathbf{a}_1+\beta_1,\mathbf{a}_2+\beta_2,\mathbf{n}t+\omega_1+\gamma_1,\omega_2+\gamma_2,t)$$

$$\varphi=\mathbf{n}t+\omega_1+\gamma_1+\sum\mu^m\varphi_m(\mathbf{a}_1+\beta_1,\mathbf{a}_2+\beta_2,\mathbf{n}t+\omega_1+\gamma_1,\omega_2+\gamma_2,t)$$

$$\psi=\omega_2+\gamma_2+\sum\mu^m\psi_m(\mathbf{a}_1+\beta_1,\mathbf{a}_2+\beta_2,\mathbf{n}t+\omega_1+\gamma_1,\omega_2+\gamma_2,t)$$

Здесь $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ω_1, ω_2 — порождающие значения переменных $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, φ, ψ; $\mathbf{n}=-\partial H_0/\partial \mathbf{I}_0{}^T$ — частоты возмущенного движения; β_1, β_2, γ_1, γ_2 — малые добавки к величинам $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ω_1, ω_2. При произвольных значениях β_1, β_2, γ_1, γ_2 ряды (2.2) представляют общее решение уравнений (2.1) (они являются сходящимися на определенном интервале времени $|t|\leqslant h$ [1]), а при значениях $\beta_1(\mu)$, $\beta_2(\mu)$, $\gamma_1(\mu)$, $\gamma_2(\mu)$, определяемых как функции μ из условий периодичности [3], ряды (2.2) представляют собой исследуемые периодические решения. В последнем случае (при достаточно малых μ) ряды (2.2) являются сходящимися для любых значений времени t.

Имея в распоряжении ряды (2.2) и зависимости $\beta_j(\mu)$, $\gamma_j(\mu)$ $(j=1, 2)$ (с требуемой точностью по μ), согласно п. 1 можно вычислить матрицу монодромии уравнений в вариациях для соответствующих периодических решений системы (2.1).

Пусть $\mathbf{Y}=\mathbf{X}(T)-\mathbf{E}_{2N}$, $\mathbf{E}_{2N}$ — единичная матрица размерности $2N$. Собственными числами матрицы $\mathbf{Y}$ будут величины $S=e^{\alpha T}-1$, где α — характеристические показатели [2].

Уравнение А. Пуанкаре, определяющее характеристические показатели α, запишем в виде

$$G(\alpha,\ \mu)\equiv\det\|\mathbf{Y}-S\mathbf{E}_{2N}\|=0\tag{2.3}$$

$$\mathbf{Y}-S\mathbf{E}_{2N}\equiv$$

$$=\begin{Vmatrix}\partial\Psi_1/\partial\beta_1-S\mathbf{E}_l & \partial\Psi_1/\partial\beta_2 & \partial\Psi_1/\partial\gamma_2 & \partial\Psi_1/\partial\gamma_1\\ \partial\Psi_2/\partial\beta_1 & \partial\Psi_2/\partial\beta_2-S\mathbf{E}_{N-l} & \partial\Psi_2/\partial\gamma_2 & \partial\Psi_2/\partial\gamma_1\\ \partial\Psi_3/\partial\beta_1 & \partial\Psi_3/\partial\beta_2 & \partial\Psi_3/\partial\gamma_2-S\mathbf{E}_{N-l} & \partial\Psi_3/\partial\gamma_1\\ \partial\Psi_4/\partial\beta_1 & \partial\Psi_4/\partial\beta_2 & \partial\Psi_4/\partial\gamma_2 & \partial\Psi_4/\partial\gamma_1-S\mathbf{E}_l\end{Vmatrix}$$

где $\Psi_i(\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \mu)$ $(i=1-4)$ — голоморфные функции параметров μ, β_j, γ_j, определяемые равенствами

$$\Psi_1=\mathbf{I}(T)-\mathbf{I}(0),\quad \Psi_2=\mathbf{J}(T)-\mathbf{J}(0),\quad \Psi_3=\psi(T)-\psi(0),$$
$$\Psi_4=\varphi(T)-\varphi(0)-\mathbf{n}^{(0)}T\tag{2.4}$$

Разложения этих функций по степеням величин μ, β_j, γ_j изучались в [3]. Из голоморфности функций $\beta_j(\mu)$, $\gamma_j(\mu)$ и (2.4) следует, что функция $G(\alpha, \mu)$ является аналитической по α и μ. Характеристические показатели являются корнями уравнения (2.3).

3. В классическом случае периодические решения системы (2.1) определяются условиями существования А. Пуанкаре, а функции (2.4) определяются следующими формулами [3]:

$$\Psi_i=\mu T\left(\frac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial \mathbf{a}_2\,\partial \xi_i^T}\beta_2+\frac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial \omega_1\,\partial \xi_i^T}\gamma_1+\frac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial \omega_2\,\partial \xi_i^T}\gamma_2+(\ldots)\beta_1+\mu(\ldots)+\ldots\right)$$
$$(i=1,2,3)$$

$$\Psi_4=-T\frac{\partial^2 H_0}{\partial \mathbf{a}_1\,\partial \mathbf{a}_1^T}\beta_1+\ldots+\mu(\ldots),\qquad \xi_1=\omega_1,\qquad \xi_2=\omega_2,\qquad \xi_3=-\mathbf{a}_2$$

$$\langle H_1\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T H_1(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{n}^{(0)}t+\omega_1,\omega_2,t)\,dt,\qquad \mathbf{n}^{(0)}=-\left.\frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{I}^T}\right|_{\mathbf{I}=\mathbf{a}_1} \tag{3.1}$$

Для определения структуры характеристических показателей и вычисления их приближенных значений в уравнении (2.3) выделим основные члены. Выполним в (2.3) замену $\alpha=\varepsilon\sqrt{\mu}$ и покажем, что оно преобразуется к виду

$$G(\varepsilon\sqrt{\mu},\ \mu)\equiv\mu^N G_1(\varepsilon,\ \sqrt{\mu})=0 \tag{3.2}$$

Для этого воспользуемся вспомогательными формулами, которые непосредственно получаются из (3.1) (все пределы здесь и далее в тексте вычисляются при $\mu\to 0$):

$$\lim\mu^{-1/2}\partial\Psi_i/\partial\beta_1=0,\qquad \lim\partial\Psi_4/\partial\beta_1=-T\partial^2H_0/\partial\mathbf{a}_1\partial\mathbf{a}_1^T$$
$$\lim\mu^{-1}\partial\Psi_i/\partial\beta_2=T\partial^2\langle H_1\rangle/\partial\mathbf{a}_2\partial\xi_i^T,\qquad \lim\mu^{-1/2}\partial\Psi_4/\partial\beta_2=0 \tag{3.3}$$
$$\lim\mu^{-1}\partial\Psi_i/\partial\gamma_j=T\partial^2\langle H_1\rangle/\partial\omega_j\partial\xi_i^T,\qquad \lim\mu^{-1/2}\partial\Psi_4/\partial\gamma_j=0\quad (i=1,\ 2,\ 3;\ j=1,\ 2)$$

Разделим элементы первой строки, второго, третьего и четвертого столбцов матрицы $\mathbf{Y}-S\mathbf{E}_{2N}$ на $\sqrt{\mu}$. В результате получим представление (3.2). Используя формулы (3.3) и соотношение $\lim S/\sqrt{\mu}=\lim[\exp\times\times(\varepsilon\sqrt{\mu}T)-1]/\sqrt{\mu}=\varepsilon T$, вычислим $\lim G_1(\varepsilon,\ \sqrt{\mu})$. В результате получим следующее алгебраическое уравнение:

$$G_1(\varepsilon,0)\equiv\det\begin{Vmatrix}-\varepsilon\mathbf{E}_l & \dfrac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial\mathbf{a}_2\,\partial\omega_1{}^T} & \dfrac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial\omega_2\,\partial\omega_1{}^T} & \dfrac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial\omega_1\partial\omega_1{}^T}\\ 0 & -\varepsilon\mathbf{E}_{N-l} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\varepsilon\mathbf{E}_{N-l} & 0\\ -\dfrac{\partial^2H_0}{\partial\mathbf{a}_1\partial\mathbf{a}_1{}^T} & 0 & 0 & -\varepsilon\mathbf{E}_l\end{Vmatrix}=0$$

которое допускает $2(N-l)$ нулевых корней ($\varepsilon=0$), а остальные $2l$ значений коэффициента ε определяются из уравнения

$$\det\|\varepsilon^2\mathbf{E}_l+(\partial^2H_0/\partial\mathbf{a}_1\partial\mathbf{a}_1{}^T)(\partial^2\langle H_1\rangle/\partial\omega_1\partial\omega_1{}^T)\|=0 \tag{3.4}$$

Из рассмотрения исключим случай кратных корней уравнения (3.4). При этом $\partial G_1/\partial\varepsilon|_{\mu=0,\varepsilon=\varepsilon^{(l)}}\neq 0$ ($\varepsilon^{(l)}$ — корни уравнения (3.4)) и на основании теоремы о неявных функциях можно утверждать, что существуют аналитические решения $\varepsilon=\varepsilon(\sqrt{\mu})$ уравнения (3.2). $2l$ решений этого уравнения представляются рядами по степеням $\sqrt{\mu}$ и при $\mu=0$ обращаются в решение $\varepsilon=\varepsilon^{(l)}$ уравнения (3.4).

Для определения основных коэффициентов и структуры разложений остальных $2(N-l)$ значений характеристических показателей преобразуем определяющее уравнение (2.3) следующим образом. Положим $\alpha=\eta\mu$ и поделим три первых строки и три последних столбца матрицы $\mathbf{Y}-S\mathbf{E}_{2N}$ на $\sqrt{\mu}$. При этом из уравнения $G(\alpha,\ \mu)=0$ получаем

$$\mu^{-2N+l}G(\eta\mu,\ \mu)\equiv G_2(\eta,\ \mu)=0 \tag{3.5}$$

Используя формулы (3.3) и соотношение $\lim S/\mu=\eta T$, предельным переходом из (3.5) получим уравнение для определения $\eta^{(2N-l)}$ — основного коэффициента в разложении η:

$$G_2(\eta, 0) \equiv \det \begin{Vmatrix} 0 & \frac{\partial^2 \langle H_1\rangle}{\partial \mathbf{a}_2 \partial \boldsymbol{\omega}_1^T} & \frac{\partial^2 \langle H_1\rangle}{\partial \boldsymbol{\omega}_2 \partial \boldsymbol{\omega}_1^T} & \frac{\partial^2 \langle H_1\rangle}{\partial \boldsymbol{\omega}_1 \partial \boldsymbol{\omega}_1^T} \\ 0 & \frac{\partial^2 \langle H_1\rangle}{\partial \mathbf{a}_2 \partial \boldsymbol{\omega}_2^T} - \eta \mathbf{E}_{N-l} & \frac{\partial^2 \langle H_1\rangle}{\partial \boldsymbol{\omega}_2 \partial \boldsymbol{\omega}_2^T} & \frac{\partial^2 \langle H_1\rangle}{\partial \boldsymbol{\omega}_1 \partial \boldsymbol{\omega}_2^T} \\ 0 & \frac{\partial^2 \langle H_1\rangle}{\partial \mathbf{a}_2 \partial \mathbf{a}_2^T} & \frac{\partial^2 \langle H_1\rangle}{\partial \boldsymbol{\omega}_2 \partial \mathbf{a}_2^T} + \eta \mathbf{E}_{N-l} & \frac{\partial^2 \langle H_1\rangle}{\partial \boldsymbol{\omega}_1 \partial \mathbf{a}_2^T} \\ \frac{\partial^2 H_0}{\partial a_1 \partial a_1^T} & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \equiv \tag{3.6}$$

$$\equiv \det \left\Vert \frac{\partial^2 H_0}{\partial \mathbf{a}_1 \partial \mathbf{a}_1^T} \right\Vert \det \begin{Vmatrix} \frac{\partial^2 \langle H_1\rangle}{\partial \boldsymbol{\omega}_1 \partial \boldsymbol{\omega}_1^T} & \frac{\partial^2 \langle H_1\rangle}{\partial \boldsymbol{\omega}_2 \partial \boldsymbol{\omega}_1^T} & \frac{\partial^2 \langle H_1\rangle}{\partial \mathbf{a}_2 \partial \boldsymbol{\omega}_1^T} \\ \frac{\partial^2 \langle H_1\rangle}{\partial \boldsymbol{\omega}_1 \partial \boldsymbol{\omega}_2^T} & \frac{\partial^2 \langle H_1\rangle}{\partial \boldsymbol{\omega}_2 \partial \boldsymbol{\omega}_2^T} & \frac{\partial^2 \langle H_1\rangle}{\partial \mathbf{a}_2 \partial \boldsymbol{\omega}_2^T} - \eta \mathbf{E}_{N-l} \\ \frac{\partial^2 \langle H_1\rangle}{\partial \boldsymbol{\omega}_1 \partial \mathbf{a}_2^T} & \frac{\partial^2 \langle H_1\rangle}{\partial \boldsymbol{\omega}_2 \partial \mathbf{a}_2^T} + \eta \mathbf{E}_{N-l} & \frac{\partial^2 \langle H_1\rangle}{\partial \mathbf{a}_2 \partial \mathbf{a}_2^T} \end{Vmatrix} = 0.$$

Таким образом, из уравнения (3.6) определяются $2(N-l)$ значений коэффициента η. Пусть среди этих коэффициентов отсутствуют одинаковые. При этом $\partial G_2/\partial\eta|_{\mu=0,\eta=\eta^{(N-l)}} \neq 0$ и на основании теоремы о неявных функциях получаем, что из уравнения (3.5) определяются $2(N-l)$ значений характеристических показателей в виде голоморфных рядов по целым степеням малого параметра μ. Основные коэффициенты этих рядов $\eta^{(N-l)}$ являются корнями алгебраического уравнения (3.6).

Для построения высших приближений в разложениях характеристических показателей требуется уравнение (2.3) представить в виде ряда по степеням α и μ. Можно также воспользоваться прямым методом вычисления характеристических показателей в результате построения решения уравнений в вариациях [1] [1].

4. Рассмотрим вычисление характеристических показателей вырожденных периодических решений. Пусть усредненная по А. Пуанкаре (вдоль порождающего решения (см. (3.1)) функция H_1 не зависит от порождающих значений переменных $\mathbf{J}$, $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\psi}$ $(\mathbf{a}_2, \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)$, а зависит лишь от $\mathbf{I}$ $(\mathbf{a}_1)$, т. е. $\langle H_1\rangle \equiv f(\mathbf{a}_1)$. Условия существования периодических решений в этом особом случае получены в [3].

Для указанных вырожденных периодических решений по известным правилам составим определяющее уравнение А. Пуанкаре и рассмотрим процедуру вычисления характеристических показателей.

Для этого подставим в уравнение (2.3) функции Ψ_k, которые в [3] вычислены (для вырожденных решений) с точностью до μ^3:

$$\frac{\Psi_i}{\mu T} = -\left\{ \int \frac{\partial^2 H_1}{\partial \varphi_0 \, \partial \mathbf{y}_i^T} dt \right\} \Bigg|_{t=0} \frac{\partial^2 H_0}{\partial \mathbf{a}_1 \, \partial \mathbf{a}_i^T} \beta_1 + \mu \left(\left\langle \frac{\partial \{\mathbf{V}\}}{\partial \mathbf{y}_i^T} \left\{ \int \{\mathbf{W}\} dt \right\} \right\rangle + \right.$$
$$+ \left\{ \int \frac{\partial^2 H_1}{\partial \varphi_0 \, \partial \mathbf{y}_i^T} dt \right\} \Bigg|_{t=0} \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial \mathbf{a}_1 \, \partial \mathbf{a}_1^T} \left\{ \int \frac{\partial H_1}{\partial \varphi_0^T} dt \right\} \Bigg|_{t=0} - \frac{\partial \langle H_1 \rangle}{\partial \mathbf{a}_i^T} \right) +$$
$$\left. + \frac{\partial \langle H_2 \rangle}{\partial \mathbf{y}_i^T} \right) + \ldots \tag{4.1}$$

$$\Psi_4 = -T \frac{\partial^2 H_0}{\partial \mathbf{a}_1 \, \partial \mathbf{a}_1^T} \beta_1 + \mu T \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial \mathbf{a}_1 \, \partial \mathbf{a}_1^T} \left\{ \int \frac{\partial H_1}{\partial \varphi_0^T} dt \right\} \Bigg|_{t=0} - \frac{\partial \langle H_1 \rangle}{\partial \mathbf{a}_1^T} + (\ldots)\beta_1 \right) +$$
$$+ (\ldots)\beta_1\beta_1 + \mu^2(\ldots)$$

$$(i=1,\ 2,\ 3) \qquad \mathbf{y}_1 = \boldsymbol{\varphi}_0, \quad \mathbf{y}_2 = \boldsymbol{\psi}_0, \quad \mathbf{y}_3 = -\mathbf{J}_0$$

---

[1] *Баркин Ю. В.* Периодические решения в задаче о поступательно-вращательном движении небесных тел: Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук, М.: МГУ, 1978. 160 с.

Здесь для периодических функций $f=f(\mathbf{a}_1, \mathbf{J}_0, \mathbf{n}^{(0)}t+\varphi_0, \psi_0, t)$ используется представление $f=\langle f\rangle+\{f\}$, где $\langle f\rangle$ — усредненная по Пуанкаре функция f, а $\{f\}$ — ее чисто периодическая часть. В (4.1) используются вспомогательные обозначения

$$\{\mathbf{W}^T\}=\left(\frac{\partial\{H_1\}}{\partial\varphi_0^T}, \frac{\partial\{H_1\}}{\partial\psi_0^T}, -\frac{\partial\{H_1\}}{\partial\mathbf{J}_0^T}, -\frac{\partial\{H_1\}}{\partial\mathbf{a}_1^T}-\frac{\partial^2 H_0}{\partial\mathbf{a}_1\,\partial\mathbf{a}_1^T}\left\{\int\frac{\partial\{H_1\}}{\partial\varphi_0^T}\,dt\right\}\right)$$

$$\mathbf{V}=\left(\frac{\partial H_1}{\partial\mathbf{a}_1}, \frac{\partial H_1}{\partial\mathbf{J}_0}, \frac{\partial H_1}{\partial\psi_0}, \frac{\partial H_1}{\partial\varphi_0}\right), \qquad \mathbf{n}^{(0)}=-\left.\frac{\partial H_0}{\partial\mathbf{I}^T}\right|_{\mathbf{I}=\mathbf{a}_1}$$

а функции Ψ_i для удобства разложены в ряды по части параметров, а именно μ и β_1, т. е. при их вычислении использовалось представление $H_i=H_i(\mathbf{a}_1, \mathbf{J}_0, \mathbf{n}^{(0)}(\mathbf{a}_1)t+\varphi_0, \psi_0, t)$, $\mathbf{J}_0=\mathbf{a}_2+\beta_2$, $\varphi_0=\omega_1+\gamma_1$, $\psi_0=\omega_2+\gamma_2$.

Для анализа характеристических показателей преобразуем уравнение (2.3), воспользовавшись известной формулой вычисления определителя сложной матрицы [4]: $G(\alpha, \mu)=\det\|\mathbf{Y}-S\mathbf{E}_{2N}\|=\det\|\partial\Psi_4/\partial\beta_1\|\det\mathbf{A}$. Для матрицы $\mathbf{A}$ имеет место следующее представление:

$$\mathbf{A}=\mathbf{Z}+\mathbf{R}$$

$$\mathbf{Z}=\left\|\begin{matrix}
\frac{\partial\Psi_1}{\partial\beta_2}-\frac{\partial\Psi_1}{\partial\beta_1}\left(\frac{\partial\Psi_4}{\partial\beta_1}\right)^{-1}\frac{\partial\Psi_4}{\partial\beta_2} & \frac{\partial\Psi_1}{\partial\gamma_2}-\frac{\partial\Psi_1}{\partial\beta_1}\left(\frac{\partial\Psi_4}{\partial\beta_1}\right)^{-1}\frac{\partial\Psi_4}{\partial\gamma_2} & \frac{\partial\Psi_1}{\partial\gamma_1}-\frac{\partial\Psi_1}{\partial\beta_1}\left(\frac{\partial\Psi_4}{\partial\beta_1}\right)^{-1}\frac{\partial\Psi_4}{\partial\gamma_1}\\
\frac{\partial\Psi_2}{\partial\beta_2}-\frac{\partial\Psi_2}{\partial\beta_1}\left(\frac{\partial\Psi_4}{\partial\beta_1}\right)^{-1}\frac{\partial\Psi_4}{\partial\beta_2} & \frac{\partial\Psi_2}{\partial\gamma_2}-\frac{\partial\Psi_2}{\partial\beta_1}\left(\frac{\partial\Psi_4}{\partial\beta_1}\right)^{-1}\frac{\partial\Psi_4}{\partial\gamma_2} & \frac{\partial\Psi_2}{\partial\gamma_1}-\frac{\partial\Psi_2}{\partial\beta_1}\left(\frac{\partial\Psi_4}{\partial\beta_1}\right)^{-1}\frac{\partial\Psi_4}{\partial\gamma_1}\\
\frac{\partial\Psi_3}{\partial\beta_2}-\frac{\partial\Psi_3}{\partial\beta_1}\left(\frac{\partial\Psi_4}{\partial\beta_1}\right)^{-1}\frac{\partial\Psi_4}{\partial\beta_2} & \frac{\partial\Psi_3}{\partial\gamma_2}-\frac{\partial\Psi_3}{\partial\beta_1}\left(\frac{\partial\Psi_4}{\partial\beta_1}\right)^{-1}\frac{\partial\Psi_4}{\partial\gamma_2} & \frac{\partial\Psi_3}{\partial\gamma_1}-\frac{\partial\Psi_3}{\partial\beta_1}\left(\frac{\partial\Psi_4}{\partial\beta_1}\right)^{-1}\frac{\partial\Psi_4}{\partial\gamma_1}
\end{matrix}\right\|$$

$$\mathbf{R}=\left\|\begin{matrix}
S\left(\frac{\partial\Psi_4}{\partial\beta_1}\right)^{-1}\frac{\partial\Psi_4}{\partial\beta_2} & S\left(\frac{\partial\Psi_4}{\partial\beta_1}\right)^{-1}\frac{\partial\Psi_4}{\partial\gamma_2} & S\left(\left(\frac{\partial\Psi_4}{\partial\beta_1}\right)^{-1}\frac{\partial\Psi_4}{\partial\gamma_1}+\frac{\partial\Psi_1}{\partial\beta_1}\left(\frac{\partial\Psi_4}{\partial\beta_1}\right)^{-1}\right)-S^2\left(\frac{\partial\Psi_4}{\partial\beta_1}\right)^{-1}\\
-S\mathbf{E}_{N-l} & 0 & S\frac{\partial\Psi_2}{\partial\beta_1}\left(\frac{\partial\Psi_4}{\partial\beta_1}\right)^{-1}\\
0 & -S\mathbf{E}_{N-l} & S\frac{\partial\Psi_3}{\partial\beta_1}\left(\frac{\partial\Psi_4}{\partial\beta_1}\right)^{-1}
\end{matrix}\right\|$$

Поскольку $\det\|\partial\Psi_4/\partial\beta_1\|\neq 0$, то задача сводится к исследованию уравнения

$$Q(\alpha, \mu)\equiv\det\mathbf{A}=0 \tag{4.2}$$

В [3] показано, что если выполнены условия существования вырожденных периодических решений, то β_1, β_2, γ_1, γ_2 определяются как конкретные голоморфные функции параметра μ, причем

$$\beta_1=\mu\left(\left.\left\{\int\frac{\partial H_1}{\partial\varphi_0^T}dt\right\}\right|_{t=0}-\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial\mathbf{a}_1\,\partial\mathbf{a}_1^T}\right)^{-1}\frac{\partial\langle H_1\rangle}{\partial\mathbf{a}_1^T}\right)+\mu^2(\ldots) \tag{4.3}$$

Используя соотношения (4.1), (4.3), получим группу вспомогательных формул

$$\lim\mu^{-2}\left(\frac{\partial\Psi_i}{\partial\beta_2}-\frac{\partial\Psi_i}{\partial\beta_1}\left(\frac{\partial\Psi_4}{\partial\beta_1}\right)^{-1}\frac{\partial\Psi_4}{\partial\beta_2}\right)=T\left(\frac{\partial\langle\Phi_i\rangle}{\partial\mathbf{a}_2}+\frac{\partial^2\langle H_2\rangle}{\partial\mathbf{a}_2\,\partial\xi_i^T}\right)$$

$$\lim\mu^{-2}\left(\frac{\partial\Psi_i}{\partial\gamma_j}-\frac{\partial\Psi_i}{\partial\beta_1}\left(\frac{\partial\Psi_4}{\partial\beta_1}\right)^{-1}\frac{\partial\Psi_4}{\partial\gamma_j}\right)=T\left(\frac{\partial\langle\Phi_i\rangle}{\partial\omega_j}+\frac{\partial^2\langle H_2\rangle}{\partial\omega_j\,\partial\xi_i^T}\right) \tag{4.4}$$

$$\lim\mu^{-1}((\partial\Psi_4/\partial\beta_1)^{-1}(\partial\Psi_4/\partial\gamma_1)+(\partial\Psi_1/\partial\beta_1)(\partial\Psi_4/\partial\beta_1)^{-1})=0$$

$$(i=1,\ 2,\ 3;\quad j=1,\ 2)\qquad \xi_1=\omega_1,\quad \xi_2=\omega_2,\quad \xi_3=-\mathbf{a}_2$$

$$\Phi_1 \equiv \Phi_I = \left(\frac{\partial \{\mathbf{V}\}}{\partial \varphi_0{}^T} \left\{ \int \{\mathbf{W}\}\, dt \right\} \right) \Bigg|_{\mathbf{J}_0=\mathbf{a}_2,\ \varphi_0=\omega_1,\ \psi_0=\omega}$$

$$\Phi_2 \equiv \Phi_J = \left(\frac{\partial \{\mathbf{V}\}}{\partial \psi_0{}^T} \left\{ \int \{\mathbf{W}\}\, dt \right\} \right) \Bigg|_{\mathbf{J}_0=\mathbf{a}_2,\ \varphi_0=\omega_1,\ \psi_0=\omega_2}$$

$$-\Phi_3 \equiv \Phi_\psi = \left(\frac{\partial \{\mathbf{V}\}}{\partial \mathbf{J}_0{}^T} \left\{ \int \{\mathbf{W}\}\, dt \right\} \right) \Bigg|_{\mathbf{J}_0=\mathbf{a}_2,\ \varphi_0=\omega_1,\ \psi_0=\omega_2}$$

Сделаем в уравнении (4.2) подстановку $\alpha=\nu\mu$ и преобразуем его к удобному для анализа виду. Для этого поделим элементы первой, второй, третьей строк и третьего столбца матрицы $\mathbf{A}$ на μ. В результате уравнение $Q(\alpha, \mu)=0$ можно заменить равносильным уравнением

$$\mu^{-2N} Q(\nu\mu, \mu) \equiv Q_1(\nu, \mu) = 0 \tag{4.5}$$

Воспользуемся формулами (4.4) и соотношением $\lim S/\mu=\nu T$ и вычислим $\lim Q_1(\nu, \mu)$. Тогда из (4.5) получим уравнение

$$Q_1(\nu, 0) \equiv \det \left\| \nu^2 \mathbf{E}_{N-l} \| \det \| \frac{\partial \langle \Phi_I \rangle}{\partial \omega_1} + \frac{\partial^2 \langle H_2 \rangle}{\partial \omega_1\, \partial \omega_1{}^T} + \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial \mathbf{a}_1\, \partial \mathbf{a}_1{}^T} \right)^{-1} \nu^2 \right\| = 0$$

которое допускает $2(N-l)$ нулевых корней, а его ненулевые корни $\nu=\nu^{(l)}$ (предполагаем, что они различны) определяются из алгебраического уравнения

$$\det \left\| \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial \mathbf{a}_1\, \partial \mathbf{a}_1{}^T} \right) \left(\frac{\partial \langle \Phi_I \rangle}{\partial \omega_1} + \frac{\partial^2 \langle H_2 \rangle}{\partial \omega_1\, \partial \omega_1{}^T} \right) + \nu^2 \mathbf{E}_l \right\| = 0 \tag{4.6}$$

Поскольку $\partial Q_1/\partial \nu|_{\mu=0,\nu=\nu^{(l)}} \neq 0$, то по теореме о неявных функциях уравнение (4.5) позволяет определить $2l$ значений ν в виде голоморфных функций параметра μ. Следовательно, $2l$ характеристических показателей вырожденных периодических решений будут раскладываться в ряды по целым степеням параметра μ. Основные коэффициенты этих рядов являются корнями $\nu^{(l)}$ уравнения (4.6).

Для определения остальных $2(N-l)$ характеристических показателей сделаем замену $\alpha=\sigma\mu^2$ и преобразуем уравнение (4.2), поделив все столбцы матрицы A на μ^2:

$$\mu^{-4N+2l} Q(\sigma\mu^2, \mu) \equiv Q_2(\sigma, \mu) = 0 \tag{4.7}$$

Далее воспользуемся формулами (4.1) и соотношением $\lim S/\mu^2=\sigma T$ для вычисления значения $Q_2(\sigma, 0)$. В результате получим алгебраическое уравнение для определения $2(N-l)$ значений коэффициента σ (предполагаем, что корни различны):

$$Q_2(\sigma, 0) \equiv \tag{4.8}$$

$$\equiv \det \left\| \begin{matrix} \frac{\partial \langle \Phi_I \rangle}{\partial \omega_1} + \frac{\partial^2 \langle H_2 \rangle}{\partial \omega_1 \partial \omega_1{}^T} & \frac{\partial \langle \Phi_I \rangle}{\partial \omega_2} + \frac{\partial^2 \langle H_2 \rangle}{\partial \omega_2 \partial \omega_1{}^T} & \frac{\partial \langle \Phi_I \rangle}{\partial \mathbf{a}_2} + \frac{\partial^2 \langle H_2 \rangle}{\partial \mathbf{a}_2 \partial \omega_1{}^T} \\ \frac{\partial \langle \Phi_J \rangle}{\partial \omega_1} + \frac{\partial^2 \langle H_2 \rangle}{\partial \omega_1 \partial \omega_2{}^T} & \frac{\partial \langle \Phi_J \rangle}{\partial \omega_2} + \frac{\partial^2 \langle H_2 \rangle}{\partial \omega_2 \partial \omega_2{}^T} & \frac{\partial \langle \Phi_J \rangle}{\partial \mathbf{a}_2} + \frac{\partial^2 \langle H_2 \rangle}{\partial \mathbf{a}_2 \partial \omega_2{}^T} - \sigma \mathbf{E}_{N-l} \\ \frac{\partial \langle \Phi_\psi \rangle}{\partial \omega_1} + \frac{\partial^2 \langle H_2 \rangle}{\partial \omega_1 \partial \mathbf{a}_2{}^T} & \frac{\partial \langle \Phi_\psi \rangle}{\partial \omega_2} + \frac{\partial^2 \langle H_2 \rangle}{\partial \omega_2 \partial \mathbf{a}_2{}^T} + \sigma \mathbf{E}_{N-l} & \frac{\partial \langle \Phi_\psi \rangle}{\partial \mathbf{a}_2} + \frac{\partial^2 \langle H_2 \rangle}{\partial \mathbf{a}_2 \partial \mathbf{a}_2{}^T} \end{matrix} \right\| = 0$$

Поскольку $\partial Q_2/\partial \sigma|_{\mu=0,\sigma=\sigma^{(N-l)}} \neq 0$, то из уравнения (4.7) σ определяется как голоморфная функция параметра μ. Следовательно, характеристические показатели ($2(N-l)$ значений) также являются голоморфными функциями параметра μ. Разложения этих характеристических показателей начинаются с членов $\sigma^{(N-l)}\mu^2$, где $\sigma^{(N-l)}$ — корни уравнения (4.8).

Опишем кратко структуру характеристических показателей периодических решений, соответствующих второму случаю вырождения, рассмотренному в [3]. В этом случае усредненная по А. Пуанкаре функция H_1 зависит от порождающих значений части переменных $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, φ, ψ. Условия существования этих периодических решений получены в [3].

Используем следующие обозначения для порождающих значений переменных:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{J}^*=\mathbf{a}_{21},\quad \mathbf{J}^{**}=\mathbf{a}_{22},\quad \varphi^*=\omega_{11},\quad \varphi^{**}=\omega_{12},\quad \psi^*=\omega_{21},\quad \psi^{**}=\omega_{22}\\
\mathbf{J}^*=(p_{l+1},\ldots,p_{l+S_1})^T,\quad \varphi^*=(q_1,\ldots,q_{S_2})^T,\quad \psi^*=(q_{l+1},\ldots,q_{l+S_3})^T \qquad (4.9)\\
\mathbf{J}^{**}=(p_{l+S_1+1},\ldots,p_N)^T,\quad \varphi^{**}=(q_{S_2+1},\ldots,q_l)^T,\quad \psi^{**}=(q_{l+S_3+1},\ldots,q_N)^T\\
\mathbf{J}^T=(\mathbf{J}^{*T},\mathbf{J}^{**T}),\quad \varphi^T=(\varphi^{*T},\varphi^{**T}),\quad \psi^T=(\psi^{*T},\psi^{**T})\\
\mathbf{a}_2{}^T=(\mathbf{a}_{21}{}^T,\mathbf{a}_{22}{}^T),\quad \omega_1{}^T=(\omega_{11}{}^T,\omega_{12}{}^T),\quad \omega_2{}^T=(\omega_{21}{}^T,\omega_{22}{}^T)
\end{gathered}
$$

Предположим, что $\langle H_1\rangle=f(\mathbf{a}_{21},\omega_{11},\omega_{21})$, т. е. эта усредненная функция зависит от определенных групп порождающих значений переменных (4.9).

Не останавливаясь на подробном анализе характеристических показателей указанных периодических решений, отметим, что он проводится по схеме, аналогичной той, которая применялась выше, с использованием формул для функций Ψ_i $(i=1, 2, 3, 4)$, полученных в [3]. Окончательный результат для случая $S_1=S_3$ сформулируем следующим образом.

Характеристические показатели вырожденных периодических решений, определяемых условиями существования [3], образуют четыре группы. $2S_2$ характеристических показателей представляются рядами по степеням $\sqrt{\mu}$, а остальные — по целым степеням малого параметра μ, причем для $2(N-l-S_1)$ из них разложения начинаются с членов порядка μ^2. Основными составляющими указанных разложений являются $\varepsilon\sqrt{\mu}$ ($2S_2$ значений), $\eta\mu$ ($2S_1$ значений), $\nu\mu$ ($2(l-S_2)$ значений), $\sigma\mu^2$ ($2(N-l-S_1)$ значений), коэффициенты ε, η, ν, σ которых определяются как корни следующих алгебраических уравнений:

$$
\det\left\|\varepsilon^2\mathbf{E}_{S_2}+\frac{\partial^2 H_0}{\partial\mathbf{a}_1'\,\partial\mathbf{a}_1'^T}\,\frac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial\omega_{11}\,\partial\omega_{11}{}^T}\right\|=0
$$

$$
\det\begin{Vmatrix}
\dfrac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial\omega_{11}\partial\omega_{11}{}^T} & \dfrac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial\omega_{21}\partial\omega_{11}{}^T} & \dfrac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial\mathbf{a}_{21}\partial\omega_{11}{}^T}\\
\dfrac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial\omega_{11}\partial\omega_{21}{}^T} & \dfrac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial\omega_{21}\partial\omega_{21}{}^T} & \dfrac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial\mathbf{a}_{21}\partial\omega_{21}{}^T}-\eta\mathbf{E}_{S_1}\\
\dfrac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial\omega_{11}\partial\mathbf{a}_{21}{}^T} & \dfrac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial\omega_{21}\partial\mathbf{a}_{21}{}^T}+\eta\mathbf{E}_{S_1} & \dfrac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial\mathbf{a}_{21}\partial\mathbf{a}_{21}{}^T}
\end{Vmatrix}=0 \qquad (4.10)
$$

$$
\det\left\|\begin{array}{c|c}
0\quad -\nu\mathbf{E}_{l-S_2} & \dfrac{\partial\langle\Phi_I''\rangle}{\partial\omega_{12}}+\dfrac{\partial^2\langle H_2\rangle}{\partial\omega_{12}\partial\omega_{12}{}^T}\\
\hline
\dfrac{\partial^2 H_0}{\partial\mathbf{a}_1\partial\mathbf{a}_1{}^T} & \begin{matrix}0\\ \nu\mathbf{E}_{l-S_2}\end{matrix}
\end{array}\right\|=0
$$

$$
\det\begin{Vmatrix}
\dfrac{\partial\langle\Phi_I''\rangle}{\partial\omega_{12}}+\dfrac{\partial^2\langle H_2\rangle}{\partial\omega_{12}\partial\omega_{12}{}^T} & \dfrac{\partial\langle\Phi_I''\rangle}{\partial\omega_{22}}+\dfrac{\partial^2\langle H_2\rangle}{\partial\omega_{22}\partial\omega_{12}{}^T} & \dfrac{\partial\langle\Phi_I''\rangle}{\partial\mathbf{a}_{22}}+\dfrac{\partial^2\langle H_2\rangle}{\partial\mathbf{a}_{22}\partial\omega_{12}{}^T}\\
\dfrac{\partial\langle\Phi_J''\rangle}{\partial\omega_{12}}+\dfrac{\partial^2\langle H_2\rangle}{\partial\omega_{12}\partial\omega_{22}{}^T} & \dfrac{\partial\langle\Phi_J''\rangle}{\partial\omega_{22}}+\dfrac{\partial^2\langle H_2\rangle}{\partial\omega_{22}\partial\omega_{22}{}^T} & \dfrac{\partial\langle\Phi_J\rangle}{\partial\mathbf{a}_{22}}+\dfrac{\partial^2\langle H_2\rangle}{\partial\mathbf{a}_{22}\partial\omega_{22}{}^T}-\sigma\mathbf{E}_{N-l-S_1}\\
\dfrac{\partial\langle\Phi_\psi''\rangle}{\partial\omega_{12}}+\dfrac{\partial^2\langle H_2\rangle}{\partial\omega_{12}\partial\mathbf{a}_{22}{}^T} & \dfrac{\partial\langle\Phi_\psi''\rangle}{\partial\omega_{22}}+\dfrac{\partial\langle H_2\rangle}{\partial\omega_{22}\partial\mathbf{a}_{22}{}^T}+\sigma\mathbf{E}_{N-l-S_1} & \dfrac{\partial\langle\Phi_\psi\rangle}{\partial\mathbf{a}_{22}}+\dfrac{\partial^2\langle H_2\rangle}{\partial\mathbf{a}_{22}\partial\mathbf{a}_{22}{}^T}
\end{Vmatrix}=0
$$

Здесь через $\mathbf{a}_1'$ обозначены порождающие значения канонических переменных, сопряженных φ^*

$$
\Phi_I''=\left(\frac{\partial\{\mathbf{V}\}}{\partial\varphi_0^{**T}}\left\{\int\{\mathbf{W}\}\,dt\right\}\right)\Bigg|_{\mathbf{y}_i=\xi_i},\qquad \Phi_J''=\left(\frac{\partial\{\mathbf{V}\}}{\partial\psi_0^{**T}}\left\{\int\{\mathbf{W}\}\,dt\right\}\right)\Bigg|_{\mathbf{y}_i=\xi_i}
$$

$$
\Phi_\psi''=\left(\frac{\partial\{\mathbf{V}\}}{\partial\mathbf{J}_0^{**T}}\left\{\int\{\mathbf{W}\}\,dt\right\}\right)\Bigg|_{\mathbf{y}_i=\xi_i}\qquad (i=1, 2, 3;\ \mathbf{y}_1=\varphi_0,\ \mathbf{y}_2=\psi_0,\ \mathbf{y}_3=-\mathbf{J}_0;
$$

$$
\xi=\omega_1,\ \xi_2=\omega_2,\ \xi_3=-\mathbf{a}_2)
$$

Разобранные приемы исследования характеристических показателей могут быть распространены на многие другие случаи вырождения, которые имеют место в гамильтоновых системах вида (1.1).

Полученные уравнения (3.4), (3.6), (4.6), (4.8) и (4.10) представляют интерес для изучения устойчивости как вырожденных, так и невырожденных периодических решений в различных задачах механики. Эти уравнения позволяют определить главные члены в разложениях характеристических показателей.

Условия устойчивости периодических решений, существующих при достаточно малых значениях параметра μ, в линейном приближении можно представить в виде $\varepsilon^2\mu<0$, $\eta^2<0$, $\nu^2<0$, $\sigma^2<0$ (здесь ε, η, ν, σ – основные коэффициенты в разложениях соответствующих характеристических показателей).

По приближенным значениям характеристических показателей можно также оценить периоды резонансных либраций механических систем в окрестности их периодических движений. Указанные периоды определяются формулами:

$$T_r^{(\varepsilon)}\simeq 2\pi/\sqrt{\mu}|\varepsilon|,\qquad T_r^{(\eta)}\approx 2\pi/\mu|\eta|,\qquad T_r^{(\nu)}\simeq 2\pi/\mu|\nu|,\qquad T_r^{(\sigma)}\approx 2\pi/\mu^2|\sigma|.$$

5. Рассмотрим плоскую модель движения Венеры (B_1) в сложном гравитационном поле Солнца (B_0) и Земли (B_2). Солнце и Землю будем рассматривать как шары с концентрическим распределением плотностей, а Венеру – как несферическое твердое тело. Центры масс O_0, O_1 и O_2 тел B_0, B_1 и B_2 движутся в фиксированной плоскости P, которая является плоскостью динамической симметрии тела B_1, вращающегося вокруг оси $O_1\zeta$, ортогональной P. Обозначим m_0, m_1 и m_2 массы тел B_0, B_1 и B_2; A, B и C – главные центральные моменты инерции тела B_1, соответствующие его осям инерции $O_1\xi$, $O_1\eta$ и $O_1\zeta$ связанной системы координат.

Введем малый параметр μ на основе предположений: 1) размеры тела B_1 малы; 2) его распределение плотностей близко к концентрическому; 3) массы m_1, m_2 тел B_1, B_2 малы по сравнению с массой m_0 тела B_0, т. е. $m_i/m_0=\mu m_i^{(0)}$ ($i=1, 2$), $C_{nm}=\mu C_{nm}^{(0)}$, $S_{nm}=\mu S_{nm}^{(0)}$ ($n=2, 3,\ldots$; $m=0, 1,\ldots, n$), $r_0=\mu r^{(0)}$, где C_{nm}, S_{nm} – коэффициенты Пуассона, характеризующие распределение плотностей тела B_1, r_0 – средний радиус тела B_1, а нулем сверху отмечены постоянные коэффициенты порядка единицы.

Пусть O_0xy – система координат с осями, расположенными в плоскости P и сохраняющими свою ориентацию (ось O_0x направлена вдоль линии $\overline{O_0O_1O_2}$ в нижнем соединении тел). Будем изучать вращательное движение тела B_1, предполагая, что орбитальные движения тел B_1, B_2 в осях O_0xy являются заданными и происходящими по возмущенным орбитам (соответствующим периодическим решениям первого сорта задачи трех тел-точек), близким к круговым орбитам с радиусами $r_i=a_i$ ($i=1, 2$).

В соответствии с этим предположением полярные координаты r_i, φ_i центров масс O_i тел B_i ($i=1, 2$) в осях O_0xy представляются рядами [1]:

$$r_i=a_i+\sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\mu^\sigma[R_s^{(\sigma)}\cos(s\Omega_2 t)] \tag{5.1}$$

$$\varphi_i=M_i+\sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\mu^\sigma[\varphi_s^{(\sigma)}\sin(s\Omega_2 t)]\qquad (\Omega_2=n_2-n_1)$$

Здесь $M_i=n_it$ – средние аномалии тел B_i ($i=1, 2$), n_i – их средние орбитальные движения, $R_s^{(\sigma)}$, $\varphi_s^{(\sigma)}$ – известные для конкретных решений постоянные.

Пусть h – угол вращения тела B_1 (угол между осью O_0x и $O_1\xi$), H – величина кинетического момента вращательного движения тела B_1. В переменных H, h гамильтониан задачи $F=-H^2/2C+U(h-\varphi_1, \varphi_2-\varphi_1)$, где U – силовая функция, объединяющая силовые функции U_{01} и U_{12} тел B_0, B_1 и B_1, B_2.

При сделанных предположениях вторая гармоника $U_{01}^{(2)}$ силовой функции U_{01} имеет первый порядок малости по μ, ее третья гармоника $U_{01}^{(3)}\sim\mu^2$, а вторая гармоника $U_{12}^{(2)}$ силовой функции U_{12} также имеет порядок μ^2. Эти составляющие определяются формулами

$$U_{01}^{(2)}=3f\frac{m_0m_1}{r_1}\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2C_{22}\cos 2(\varphi_1-h)$$

$$U_{12}^{(2)}=3f\frac{m_1m_2}{r_{12}}\left(\frac{r_0}{r_{12}}\right)^2 C_{22}\cos 2(\beta+\varphi_2-h)$$

$$U_{01}^{(3)}=f\frac{m_0m_1}{r_1}\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^3\left[\frac{3}{2}(C_{31}\cos(\varphi_1-h)+S_{31}\sin(\varphi_1-h))-\right.$$

$$\left.-15(C_{33}\cos 3(\varphi_1-h)+S_{33}\sin 3(\varphi_1-h))\right]$$

Здесь r_{12} – расстояние между центрами масс тел B_1, B_2, β – угол между $\overline{O_1O_0}$ и $\overline{O_1O_2}$ (угол элонгации).

Выполним каноническое преобразование $g=n_1t-h$, $G=H$ и обозначим $M=M_2-M_1$. Тогда, используя формулы (5.1) и выполняя необходимые преобразования, получим следующее представление для гамильтониана задачи:

$$F=F_0(G)+\mu F_1(g,M)+\mu^2F_2(g,M)+\ldots$$

$$F_0=-\frac{G^2}{2C}+n_1G,\qquad F_1=3f\frac{m_0m_1}{r_1}\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 C_{22}^{(0)}\cos 2g$$

$$F_2=f\frac{m_0m_1r^{(0)}}{a_1^2}\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2\left[\frac{3}{2}(C_{31}^{(0)}\cos g+S_{31}^{(0)}\sin g)-15(C_{33}^{(0)}\cos 3g+S_{33}\sin 3g)\right]+$$

$$+1{,}5fm_1^2m_2^{(0)}r_0^2C_{22}^{(0)}\sum_{i=-\infty}^{\infty}[A_i[\cos((i+2)M+2g)+\cos((i-2)M-2g)]-$$

$$-D_i[\cos((i-1)M-2g)-\cos((i+3)M+2g)]-C_i[\cos((i-3)M-2g)-\cos((i+1)M+2g)]]-$$

$$-3f\frac{m_0m_1r_0^2}{a_1^3}C_{22}^{(0)}\sum_{s=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3}{2}\frac{R_s^{(1)}}{a_1}-\varphi_s^{(1)}\right)\cos(sM+2g)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{3}{2}\frac{R_s^{(1)}}{a_1}+\varphi_s^{(1)}\right)\cos(sM-2g)\right]$$

Величины A_i, D_i, C_i выражаются через коэффициенты Лапласа и являются известными функциями величин a_1, a_2.

При $\mu=0$ задача имеет периодическое решение (в смысле А. Пуанкаре [1]):

$$G=G_0,\ g=\Omega_1t+g_0,\ \Omega_1q_1=\Omega_2q_2\ (q_i\in Z) \tag{5.2}$$
$$\Omega_1=G_0/C-n_1,\ \Omega_2=n_2-n_1$$

которое описывает (вместе с (5.1)) движение центров масс тел B_1, B_2 по круговым орбитам и равномерное вращение тела B_1 вокруг нормали к плоскости орбиты P. Указанное движение системы тел является периодическим в равномерно вращающихся с угловой скоростью n_1 в плоскости P осях $O_0x'y'$ (ось O_0x' невозмущенном движении проходит через центр масс тела B_1).

Условия А. Пуанкаре [1], определяющие существование периодических решений задачи, близких к (5.2), здесь нарушаются. Но условия существования вырожденных периодических решений [3]:

$$\partial^2F_0/\partial G_0^2\neq 0,\ \langle\Phi\rangle=0,\ \partial\langle\Phi\rangle/\partial g_0\neq 0$$

$$\langle\Phi\rangle\equiv\left\langle\frac{\partial^2\{F_1\}}{\partial G_0\,\partial g_0}\left\{\int\frac{\partial\{F_1\}}{\partial g_0}dt\right\}\right\rangle-\left\langle\frac{\partial^2\{F_1\}}{\partial g_0^2}\left(\frac{\partial^2F_0}{\partial G_0^2}\left\{\int\left\{\int\frac{\partial\{F_1\}}{\partial g_0}dt\right\}dt\right\}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left\{\int\frac{\partial\{F_1\}}{\partial G_0}dt\right\}\right)\right\rangle+\frac{\partial\langle F_2\rangle}{\partial g_0}$$

определяют периодические решения, которые получаются из (5.2) при соизмеримостях вида $q\Omega_2=\pm 2\Omega_1$ (q – целое число) и при $g_0=0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$. В этом легко убедиться, получив выражение для $\langle\Phi\rangle$:

$$\langle\Phi\rangle=0{,}5Cn_2^2C_{22}^{(0)}Q_q\sin 2g_0$$

$$Q_q = \frac{3m_2^{(0)}}{I} a_2^3 (A_{-(2\pm q)} + A_{(2\pm q)} - D_{1\pm q} + D_{-(3\pm q)} - C_{(3\pm q)} - C_{-(1\pm q)}) -$$

$$- \frac{6a_2^3}{Ia_1^3} \left(\frac{3}{2} \frac{R_q^{(1)}}{a_1} \pm \varphi_q^{(1)} \right)$$

$I=C/(m_1 r_0^2)$ – безразмерный момент инерции тела B_1.

В соответствии с п. 4 необходимое условие устойчивости найденных периодических решений имеет вид $(\partial^2 F_0/\partial G_0^2)(\partial\langle\Phi\rangle/\partial g_0)>0$ и выполняется, если при $C_{22}^{(0)} Q_q>0$ $g_0=0$, π, а при $C_{22}^{(0)} Q_q<0$ $g_0=\pi/2$, $3\pi/2$. Знак $C_{22}^{(0)}$ определяется знаком разности $B-A$.

Согласно современным данным радиолокационных наблюдений, угловые скорости орбитальных движений Венеры и Земли (n_1, n_2) и угловая скорость вращения Венеры (n) с высокой точностью удовлетворяют резонансному соотношению $n_1-n=-5(n_2-n_1)$. Сделанные выше предположения, в том числе и о структуре орбитальных возмущений Венеры, обусловленных притяжением Земли, также соответствуют реальному движению системы Солнце – Венера – Земля [5]. Если движение Венеры приближенно описать рассматриваемой моделью, то ему соответствует одно из найденных периодических решений, а именно с $q=10$. Для значений параметров a_1, a_2, $C_{22}^{(0)}$ ($\mu=10^{-6}$) системы Земля – Венера – Солнце и резонанса с $q=10$ получаем $C_{22}^{(0)} Q_{10}=250$ и из условия устойчивости находим, что при $A<B$ $g_0=0$, π, а при $A>B$ $g_0=\pi/2$, $3\pi/2$. Последние условия означают, что в нижнем соединении Земли и Венеры вдоль линии центров $\overline{O_0 O_1 O_2}$ направлена большая ось эллипсоида инерции Венеры (это так в невозмущенном движении). Для принятого здесь значения $C_{22}^{(0)}=0{,}91$ находим период резонансных либраций Венеры в окрестности найденного периодического решения

$$T_r \simeq \frac{2\pi}{\mu} \left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial G_0^2} \cdot \frac{\partial\langle\Phi\rangle}{\partial g_0} \right)^{-1/2} \simeq 63{,}2\cdot 10^3 \text{ лет}$$

Отметим, что модель плоского движения Венеры впервые рассматривалась в [5]. Также изучалось пространственное движение Венеры на заданной возмущенной орбите [2]. В указанных работах вращательному движению Венеры сопоставлялись стационарные решения усредненных уравнений движения. В предлагаемой статье движение Венеры изучается с помощью теории вырожденных периодических решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 1. М.: Наука, 1971. 771 с.
2. *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела.— М.: Изд-во МГУ, 1980. 230 с.
3. *Баркин Ю. В., Панкратов А. А.* Периодические решения гамильтоновых систем в некоторых случаях вырождения.— ПММ: 1987. т. 51, вып. 2, с. 235–243.
4. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 367 с.
5. *Goldreich P., Peale S.* The dynamics of planetary rotations.— In: Annual. Review of Astron. and Astroph. Palo Alto, Calif.: Annual Rev. Inc., 1968, Vol. 6, p. 287–320.

Москва

Поступила в редакцию 13.XI.1985

[2] *Белецкий В. В., Левин Е. М., Погорелов Д. Ю.* К теории вращения Венеры.— Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. М., 1979, № 75. 31 с.