МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1987

УДК 531.383

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

СЕЙРАНЯН А. П., ШАРАНЮК А. В.

Проводится качественный и количественный анализ чувствительности частот колебаний линейных систем в зависимости от параметров задачи. Такой анализ является актуальным для проектирования современных колебательных устройств и приборов [1–4].

Работа продолжает исследования [5–8]. Влияние изменения параметров линейных гироскопических систем на частоты колебаний исследовалось в [9].

1. Рассмотрим колебания линейной системы общего вида

$$Aq^{\cdot\cdot}+\Gamma q^{\cdot}+Cq=0 \tag{1.1}$$

в которой A, Γ, C — матрицы с действительными коэффициентами размерности $m\times m$, q — вектор размерности m. Предполагается, что коэффициенты матриц A, Γ и C являются гладкими функциями вектора параметров h размерности n. Параметры $h_1, h_2, \ldots, h_n$ считаются независимыми величинами.

Будем искать решение системы уравнений (1.1) в виде $X\exp(\lambda t)$, t — время. В результате приходим к обобщенной задаче на собственные значения, λ — собственное значение, X — собственный вектор размерности m:

$$[A\lambda^2+\Gamma\lambda+C]X=0 \tag{1.2}$$

Наряду с правым собственным вектором X рассмотрим также левый собственный вектор Y, удовлетворяющий уравнению

$$Y^T[A\lambda^2+\Gamma\lambda+C]=0 \tag{1.3}$$

Индекс T означает операцию транспонирования. Это уравнение можно также записать в виде $[A^T\lambda^2+\Gamma^T\lambda+C^T]Y=0$.

Исследуем изменение собственных значений λ от изменения вектора параметров h, предполагая, что λ — простое собственное значение. С этой целью придадим вектору h приращение εk, ε — малое положительное число, k — произвольный вектор размерности n, $\|k\|=1$.

В результате матрицы A, Γ и C получат приращения

$$\begin{gathered} A(h+\varepsilon k)=A(h)+\varepsilon A_1(k)+\ldots, \quad \Gamma(h+\varepsilon k)=\Gamma(h)+\varepsilon\Gamma_1(k)+\ldots \\ C(h+\varepsilon k)=C(h)+\varepsilon C_1(k)+\ldots, \quad A_1=\|(\nabla a_{ij}, k)\|, \quad \Gamma_1=\|(\nabla\gamma_{ij}, k)\| \\ C_1=\|(\nabla c_{ij}, k)\|, \quad \nabla=(\partial/\partial h_1, \partial/\partial h_2, \ldots, \partial/\partial h_n) \end{gathered} \tag{1.4}$$

В результате возмущения параметров h собственное значение λ и собственный вектор X также получат приращения [10]:

$$\lambda(h+\varepsilon k)=\lambda(h)+\varepsilon\lambda_1+\varepsilon^2\lambda_2+\ldots, \quad X(h+\varepsilon k)=X(h)+\varepsilon X_1+\varepsilon^2X_2+\ldots \tag{1.5}$$

Подставляя разложения (1.4), (1.5) в (1.2), в первом приближении по ε получим $\lambda_1[2\lambda A+\Gamma]X+[A_1\lambda^2+\Gamma_1\lambda+C_1]X+[A\lambda^2+\Gamma\lambda+C]X_1=0$. Умножим это уравнение слева на вектор Y и заметим, что последний член полученного выражения равен нулю в силу (1.3). В итоге получим выражение для приращения собственного значения λ_1:

$$\lambda_1 = -\frac{Y^T[A_1\lambda^2+\Gamma_1\lambda+C_1]X}{Y^T[2\lambda A+\Gamma]X} \tag{1.6}$$

Это выражение представляет собой производную собственного значения λ по направлению k. В силу непрерывности правой части (1.6) существует и обычная производная. Умножая обе части (1.6) на ε и используя обозначения $\delta h=\varepsilon k$, $\delta\lambda=\varepsilon\lambda_1$, запишем выражение (1.6) в виде

$$\delta\lambda=(\nabla\lambda, \delta h), \qquad \nabla\lambda = -\frac{Y^T[\nabla A\lambda^2+\nabla\Gamma\lambda+\nabla C]X}{Y^T[2\lambda A+\Gamma]X} \tag{1.7}$$

$$\nabla A=\|\nabla a_{ij}\|, \quad \nabla\Gamma=\|\nabla\gamma_{ij}\|, \quad \nabla C=\|\nabla c_{ij}\|$$

Вариация $\delta\lambda$ является комплексным числом. Отделяя действительную и мнимую части, получим выражения для вариаций декремента затухания и частоты колебаний соответственно.

Таким образом, для оценки чувствительности некратного собственного значения λ к изменению вектора параметров δh нужно знать левый и правый собственные векторы Y, X, отвечающие этому собственному значению; вычислить матрицы ∇A, $\nabla\Gamma$ и ∇C при данном h (эта операция производится аналитически); затем из (1.7) найти градиент $\nabla\lambda$ и получить искомую величину $\delta\lambda$. Эффективность проведенного анализа чувствительности возрастает при увеличении размерности вектора параметров n и размерности системы m.

2. Рассмотрим случай линейной гироскопической системы. Пусть A и C — симметрические матрицы с действительными коэффициентами размерности $m\times m$, причем A — положительно определенная матрица, а C — неотрицательная; Γ — кососимметрическая матрица с действительными коэффициентами той же размерности. Согласно (1.2) приходим к задаче на собственные значения:

$$[A\lambda^2+\Gamma\lambda+C]X=0 \tag{2.1}$$

Известно, что собственные значения λ системы (2.1) — чисто мнимые $\lambda=i\omega$, ω — частоты собственных колебаний, i — мнимая единица.

Ввиду действительности матриц A, Γ и C заметим, что если λ — собственное значение (2.1), соответствующее собственному вектору X, то $\bar\lambda=-i\omega$ также собственное значение с собственным вектором $\bar X$. Поэтому

$$[-A\omega^2-i\omega\Gamma+C]\bar X=0 \tag{2.2}$$

Поскольку $A^T=A$, $C^T=C$, $\Gamma^T=-\Gamma$, то отсюда следует $\bar X^T[-A\omega^2+i\omega\Gamma+C]=0$. Таким образом, в случае гироскопической системы (2.1), если X — правый собственный вектор, то $\bar X$ — левый собственный вектор, отвечающий той же частоте ω.

Из (1.7) получим выражение для вариации частоты $\delta\omega$, используя $Y=\bar X$, $\lambda=i\omega$, $\delta\lambda=i\delta\omega$:

$$\delta\omega=(\nabla\omega, \delta h), \qquad \nabla\omega = \frac{\bar X^T[-\omega^2\nabla A+i\omega\nabla\Gamma+\nabla C]X}{\bar X^T[2\omega A-i\Gamma]X} \tag{2.3}$$

Умножим числитель и знаменатель последнего соотношения на ω и, выполняя несложные преобразования, получим окончательное выражение для градиента частоты

$$\nabla\omega = \frac{\omega(\bar X^T\nabla CX)+i\omega^2(\bar X^T\nabla\Gamma X)-\omega^3(\bar X^T\nabla AX)}{\omega^2(\bar X^TAX)+(\bar X^TCX)} \tag{2.4}$$

Все члены в круглых скобках в (2.4) являются действительными величинами, кроме величины $(\bar X^T\nabla\Gamma X)$, которая чисто мнимая. Таким образом, все слагаемые в числителе и знаменателе (2.4) действительны. Если представить вектор X в виде $X=X_1+iX_2$, то, например, выражение $\bar X^TAX$ при любом X, $\|X\|\neq 0$ положительно $\bar X^TAX=X_1^TAX_1+X_2^TAX_2>0$ ввиду положительной определенности матрицы A.

Исходя из соотношений (2.3), (2.4), можно сделать некоторые качественные выводы общего характера.

Рассмотрим случай, когда $\delta A=(\nabla A,\ \delta h)$ — неотрицательная матрица, а $\delta\Gamma=(\nabla\Gamma,\ \delta h)$, $\delta C=(\nabla C,\ \delta h)$ — нулевые матрицы. Физически этот случай соответствует увеличению массы системы $((\bar{X}^T\delta AX)\geqslant 0)$ при неизменных жесткостных и гироскопических характеристиках. Тогда из (2.3), (2.4) следует $\delta\omega\leqslant 0$.

Таким образом, при увеличении массы гироскопической системы $((\bar{X}^T\delta AX)\geqslant 0)$ частоты колебаний не увеличиваются.

Аналогично рассмотрим другой случай: $\delta C=(\nabla C,\ \delta h)$ — неотрицательная матрица, а $\delta\Gamma$ и δA — нулевые матрицы. Тогда из (2.3), (2.4) следует $\delta\omega\geqslant 0$.

Следовательно, при увеличении жесткости гироскопической системы $((\bar{X}^T\delta CX)\geqslant 0)$ частоты колебаний не уменьшаются.

Требование строгой положительной определенности матриц A, C, δA, δC приводит к строгим неравенствам $\delta\omega<0$, $\delta\omega>0$ в первом и втором случаях соответственно.

Доказанные результаты являются локальными аналогами теорем В. Ф. Журавлева [3] и А. И. Балинского [4] в случае простых собственных значений.

Рассмотрим случай кратных частот ω. В этом случае при варьировании вектора h кратная частота, вообще говоря, расщепляется. Для нахождения вариаций кратной частоты перейдем сначала к системе двойной размерности с симметрическими матрицами T, G, V [3]:

$$[T\omega^2+G\omega-V]Z=0 \tag{2.5}$$

$$T=\begin{Vmatrix} A & 0\\ 0 & A\end{Vmatrix},\quad G=\begin{Vmatrix} 0 & \Gamma\\ -\Gamma & 0\end{Vmatrix},\quad V=\begin{Vmatrix} C & 0\\ 0 & C\end{Vmatrix},\quad Z=(\operatorname{Re}X,\operatorname{Im}X)\equiv(X_1,X_2)$$

Затем от системы (2.5) еще раз перейдем к системе двойной размерности. В результате придем к задаче на собственные значения $Du=\omega Bu$ с симметрическими матрицами D и B, причем матрица B положительно определена [4]:

$$D=\begin{Vmatrix} 0 & V\\ V & -G\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix} V & 0\\ 0 & T\end{Vmatrix}$$

Это позволяет применить результаты [11, 12] для вычисления вариаций кратных собственных значений. Вариации $\delta\omega$ находятся из решения характеристического уравнения, которое удобно записать в виде

$$\det\|Z_i^T[-\delta T\omega^3-\omega^2\delta G+\omega\delta V]Z_j-\delta\omega Z_i^T[\omega^2T+V]Z_j\|=0 \tag{2.6}$$

Здесь Z_i, $i=1,\ 2,\dots,\ p$ — линейно независимые собственные векторы, отвечающие p-кратной частоте ω.

При данной вариации вектора параметров δh существует базис Z_1^*, $Z_2^*,\dots Z_p^*$, в котором симметрические матрицы $\|Z_i^T[-\delta T\omega^3-\delta G\omega^2+\omega\delta V]Z_j\|$ и $\|Z_i^T[\omega^2T+V]Z_j\|$ приводятся к диагональному виду. Поэтому из (2.6) найдем

$$\delta\omega_i=\frac{Z_i^{*T}[-\delta T\omega^3-\delta G\omega^2+\delta V\omega]Z_i^*}{Z_i^*[\omega^2T+V]Z_i^*}\qquad (i=1,2,\dots,p) \tag{2.7}$$

Если матрица δA положительно определена, то из (2.5) следует $\delta T>0$. Если при этом матрицы Γ и C не варьируются ($\delta G=0$, $\delta V=0$), то из (2.7) следует $\delta\omega_i<0$, $i=1,\ 2,\dots p$. Итак, при $\delta A>0$ все приращения кратной частоты отрицательны. Аналогично, если $\delta C>0$, $\delta A=\delta\Gamma=0$, то $\delta\omega_i>0$. Таким образом, качественные результаты о влиянии жесткостных и массовых характеристик на частоты колебаний гироскопической системы, доказанные выше для простых собственных значений ω, остаются справедливыми и в кратном случае.

Отметим, что локальные соотношения (1.7), (2.3), (2.4), (2.6), (2.7) позволяют сделать не только качественные, но и количественные оценки чувствительности частот колебаний гироскопических систем.

3. Пример. Рассмотрим уравнения малых колебаний одноосного гиростабилизатора с учетом упругой податливости его элементов [2], уравнения (3.7.1)

$$
\begin{gathered}
I\alpha^{\cdot\cdot}+H\beta^{\cdot}=K(\psi-\alpha), \quad I\beta^{\cdot\cdot}-H\alpha^{\cdot}=0 \\
\Psi\psi^{\cdot\cdot}=K(\alpha-\psi)+N(\theta-\psi), \quad \Theta\theta^{\cdot\cdot}=N(\psi-\theta)
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

Здесь I — экваториальный момент инерции ротора гироскопа; H — его собственный кинетический момент; α и ψ — соответственно углы поворота вокруг оси стабилизации ротора и кожуха гироскопа по отношению к основанию; β — малый угол отклонения кожуха гироскопа от его среднего положения; K — жесткость, соответствующая упругому смещению $\alpha-\psi$ ротора гироскопа относительно кожуха; Ψ — сумма моментов инерции внешнего кольца, стабилизируемого тела и ведомого колеса редуктора относительно оси стабилизации; θ — приведенный к оси стабилизации угол поворота ротора двигателя; N — жесткость редуктора, также отнесенная к оси стабилизации, и Θ — приведенный к оси стабилизации момент инерции ротора двигателя вместе с ведущим колесом редуктора [2]. Матрицы A, Γ и C из п. 2 имеют вид

$$
A=\begin{Vmatrix} I & & & 0 \\ & I & & \\ & & \Psi & \\ 0 & & & \Theta \end{Vmatrix}, \quad
\Gamma=\begin{Vmatrix} 0 & H & & 0 \\ -H & 0 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{Vmatrix}, \quad
C=\begin{Vmatrix} K & 0 & -K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K & 0 & K+N & -N \\ 0 & 0 & -N & N \end{Vmatrix}
$$

Таким образом, гироскопическая система (3.1) имеет размерность $m=4$, а вектор параметров проектирования имеет размерность $n=6$; $h=(I, \Psi, \Theta, H, K, N)$. Матрица A является положительно определенной при положительных значениях параметров I, Ψ, Θ, а матрица C — неотрицательной.

Вектор градиента частот колебаний ω, согласно соотношению (2.4), принимает вид

$$
\begin{gathered}
\nabla\omega=D^{-1}(-\omega^3(\overline{X}^T M_1 X),\ -\omega^3(\overline{X}^T M_2 X),\ -\omega^3(\overline{X}^T M_3 X); \\
i\omega^2(\overline{X}^T M_4 X),\ \omega(\overline{X}^T M_5 X),\ \omega(\overline{X}^T M_6 X))
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

Здесь D — константа, $D=\omega^2(\overline{X}^T A X)+(\overline{X}^T C X)$, а $M_1, M_2, \ldots, M_6$ — матрицы, имеющие следующую структуру

$$
M_1=\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 1 & & 0 & \\ & 1 & & \\ \hline & & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{array}\right\Vert, \quad
M_2=\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 0 & & 0 & \\ & 0 & & \\ \hline & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{array}\right\Vert, \quad
M_3=\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 0 & & 0 & \\ & 0 & & \\ \hline & & 0 & \\ 0 & & & 1 \end{array}\right\Vert
$$

$$
M_4=\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & \\ -1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{array}\right\Vert, \quad
M_5=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad
M_6=\left\Vert\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ & -1 & 1 \end{array}\right\Vert.
$$

Матрицы M_1, M_2, M_3, M_5, M_6 неотрицательны. Приращение $\delta\omega$ найдем из (2.3), (2.4):

$$
\delta\omega=(\nabla\omega,\ \delta h), \quad \delta h=(\delta I,\ \delta\Psi,\ \delta\Theta,\ \delta H,\ \delta K,\ \delta N)
\tag{3.3}
$$

Расчеты проводились при следующих значениях параметров [2]: $H/I=200$ с$^{-1}$; $K/I=10^4$ с$^{-2}$; $K/\Psi=1600$ с$^{-2}$; $N/\Theta=6400$ с$^{-2}$; $\Theta/\Psi=0{,}2$; $I=10$ г·см·с^2.

Система (3.1) имеет три ненулевых частоты колебаний и одну нулевую. Расчет частот колебаний ω, соответствующих собственных векторов X и градиентов $\nabla\omega$ из (3.2) проводился с помощью ЭВМ. Результаты вычислений представлены ниже:

$\omega_1=32{,}067$; $\nabla\omega_1=(-0{,}331,\ -0{,}199,\ -0{,}282,\ 0{,}332\cdot10^{-2},\ 0{,}122\cdot10^{-3},\ 0{,}708\cdot10^{-5})$

$\omega_2=88{,}957$; $\nabla\omega_2=(-0{,}053,\ -0{,}155,\ -2{,}78,\ 0{,}443\cdot10^{-3},\ 0{,}114\cdot10^{-4},\ 0{,}536\cdot10^{-3})$

$\omega_3=224{,}36$; $\nabla\omega_3=(-20,\ -0{,}0128,\ -0{,}271\cdot10^{-3},\ 0{,}885\cdot10^{-1},\ 0{,}236\cdot10^{-3},$ $0{,}333\cdot10^{-6})$

Таким образом, например, приращение третьей частоты согласно (3.3) равно $\delta\omega_3=-20\delta I-0{,}0128\delta\Psi-0{,}271\cdot10^{-3}\delta\Theta+0{,}0885\delta H+0{,}236\cdot10^{-3}\delta K+$ $+0{,}333\cdot10^{-6}\delta N$.

Как и следовало ожидать, увеличение массовых характеристик I, Ψ, Θ способствует убыванию частот ω_1, ω_2 и ω_3, а увеличение жесткостных параметров K и N — их возрастанию. Отметим, что увеличение кинетического момента H (при данных значениях параметров) способствует возрастанию всех трех частот.

На частоту ω_3 наибольшее влияние оказывает параметр I, что согласуется с анализом, данным в [2]. На первую частоту ω_1 параметры I, Ψ и Θ влияют приблизительно в равной степени. Что же касается частоты ω_2, то на нее наибольшее влияние оказывает параметр Θ, а кинематический момент H заметно влияет на 3-ю частоту. Влияние параметров жесткости K и N сравнительно невелико. Наиболее существенно влияние параметра N на частоту ω_2.

Авторы благодарят А. Ю. Ишлинского и В. Ф. Журавлева за внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский А. Ю.* Механика гироскопических систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 482 с.
2. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
3. *Журавлев В. Ф.* Обобщение теоремы Релея на гироскопические системы.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 4, с. 606—610.
4. *Балинский А. И.* Поведение частот гироскопических систем.— В кн.: Математические методы и физико-механические поля. Киев: Наук. думка, 1978, вып. 7, с. 20, 21.
5. *Seyranian A. P.* Sensitivity analysis and optimization of aeroelastic stability.— Intern. J. Solids and Struct., 1982, v. 18, No. 9, p. 791—807.
6. *Pedersen P., Seyranian A. P.* Sensitivity analysis for problems of dynamic stability.— Intern. J. Solids and Struct., 1983, v. 19, No. 4, p. 315—335.
7. *Сейранян А. П., Шаранюк А. В.* Чувствительность и оптимизация критических параметров в задачах динамической устойчивости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 5, с. 174—183.
8. *Сейранян А. П., Шаранюк А. В.* Оптимизация флаттерных характеристик.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1984, т. 37, № 5, с. 38—51.
9. *Метелицын И. И.* Влияние изменения параметров линейных гироскопических систем на частоты колебаний и коэффициенты затухания.— Докл. АН СССР, 1963, т. 153, № 3, с. 540—542.
10. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1982. 269 с.
11. *Братусь А. С., Сейранян А. П.* Бимодальные решения в задачах оптимизации собственных значений.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 4, с. 546—554.
12. *Братусь А. С., Сейранян А. П.* Достаточные условия экстремума в задачах оптимизации собственных значений.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 4, с. 657—667.

Москва

Поступила в редакцию 24.X.1985