МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1987

УДК 531.383

ВЛИЯНИЕ СДВИГОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ В СИСТЕМЕ ДВУХ ГИРОСКОПОВ ЛАГРАНЖА НА РЕЗОНАНСНЫЕ ЧАСТОТЫ

БОЛГРАБСКАЯ И. А.

Система твердых тел используется при рассмотрении движения космических аппаратов [1, 2], моделировании роботов и манипуляторов [3], различных навигационных и стабилизирующих устройств и приборов [4, 5]. Такой подход применялся и при изучении систем с распределенными параметрами, например, изгибных колебаний упругого стержня, моделируемого системой твердых тел, связанных универсальными упругими шарнирами [6]. При изучении необходимых условий устойчивости равномерных вращений системы связанных тел в [7] были найдены резонансные частоты, в окрестности которых при появлении дебаланса в системе возникают интервалы неустойчивости. При этом оказалось, что частоты эти существуют при определенных соотношениях между экваториальными и осевыми моментами инерции тел, входящих в систему. Такая же ситуация отмечалась в [8], где принималось обычное положение из теории изгиба, в соответствии с которым не учитываются деформации сдвига бесконечно малых элементов вала при изгибе. Поэтому представляет интерес исследовать движение упругих объектов, учитывая не только деформацию изгиба, но и деформацию сдвига. В качестве первого приближения решения этой задачи в публикуемой работе предлагается представить исходный объект в виде системы двух гироскопов Лагранжа, связанных обобщенным упругим универсальным шарниром. Записаны уравнения движения такой системы по инерции (т. е. в отсутствие внешних сил и моментов) и проанализированы необходимые условия устойчивости равномерных вращений системы твердых тел как одного целого вокруг оси неподвижной в пространстве. Найдены резонансные частоты. Дана оценка влияния массового дебаланса одного из гироскопов на возникновение зон неустойчивости в окрестности резонансных частот.

1. Введем неподвижную систему координат $C\xi\eta\zeta$, ось $C\zeta$ которой имеет направление вектора скорости центра масс системы тел. Свяжем с каждым телом S_i систему координат $C_i\xi_i\eta_i\zeta_i$ ($i=1, 2$), оси которой являются главными осями инерции тела. Определим положение системы координат, связанной с телом S_1, по отношению к неподвижной системе координат углами Крылова ψ, θ, φ; а взаимное положение тел S_1 и S_2 — двумя ортогональными поворотами на углы α_1, α_2 (фиг. 1). Оси координат $C_1\xi_2\eta_2\zeta_2$ параллельны соответствующим осям системы $C_2\xi_2\eta_2\zeta_2$.

Рассмотрим движение по инерции свободной системы [7] двух гироскопов Лагранжа, связанных упругим обобщенным универсальным шарниром.

Назовем упругим обобщенным универсальным шарниром шарнир, допускающий два ортогональных поворота тела S_2 относительно S_1 вокруг осей $O\eta_1$ и $O\xi_2$ и сдвиг тела S_2 относительно S_1 в плоскости $O\eta_1\xi_2$. Внутренние силы при малых угловых и сдвиговых перемещениях определяются силовой функцией

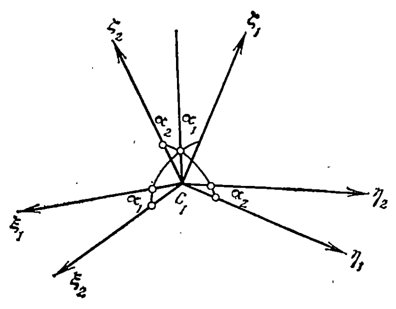
$$U=-{}^1/{}_2k^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)-{}^1/{}_2\varkappa^2(x^2+y^2)+\ldots \tag{1.1}$$

в которой k^2, $\varkappa^2$ — коэффициенты жесткости, x, y — смещения вдоль осей $O\eta_1$, $O\xi_2$, многоточием обозначены члены более высокого порядка малости.

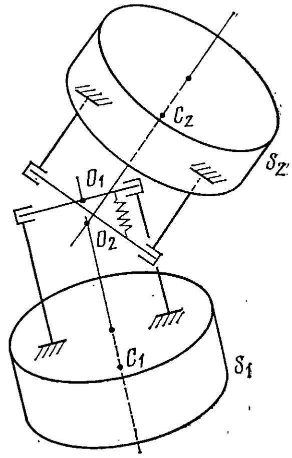
Система уравнений движения рассматриваемой связки твердых тел допускает решение [7]:

$$\psi^0=\theta^0=\alpha_1^0=\alpha_2^0=0,\ \psi^{\cdot 0}=\theta^{\cdot 0}=\alpha_1^{\cdot 0}=\alpha_2^{\cdot 0}=0,\ x^0=y^0=x^{\cdot 0}=y^{\cdot 0}=0,\ \varphi^{\cdot 0}=\omega \tag{1.2}$$

которое соответствует равномерному вращению связки тел как целого вокруг оси $C\zeta$. В окрестности такого движения кинетическая энергия раз-



Фиг. 1



Фиг. 2

лагается в ряд относительно возмущений ψ, θ, α_1, α_2, x, y, $\psi^\cdot$, $\theta^\cdot$, $\alpha_1^\cdot$, $\alpha_2^\cdot$, $x^\cdot$, $y^\cdot$, $\varphi'=\varphi-\omega$ следующим образом:

$$T={}^1/_2(A_1^*+A_2^*+2\mu)(\psi^{\cdot 2}+\theta^{\cdot 2})+(A_2^*+\mu)[(\psi^\cdot\sin\varphi+\theta^\cdot\cos\varphi)(\alpha_2^\cdot-\omega\alpha_1)+$$
$$+(\psi^\cdot\cos\varphi-\theta^\cdot\sin\varphi)(\alpha_1^\cdot+\omega\alpha_2)]+{}^1/_2A_2^*[(\alpha_1^\cdot+\omega\alpha_2)^2+(\alpha_2^\cdot-\omega\alpha_1)^2]+$$
$$+{}^1/_2M(x^{\cdot 2}+y^{\cdot 2}+\omega^2(x^2+y^2)+2\omega(x^\cdot y-xy^\cdot)]+(\nu_1+\nu_2)[(\psi^\cdot\cos\varphi+\theta^\cdot\sin\varphi)\times$$
$$\times(x^\cdot+\omega y)+(\psi^\cdot\sin\varphi-\theta^\cdot\cos\varphi)(\omega x-y^\cdot)]+\nu_2[(\alpha_1^\cdot+\omega\alpha_2)(\omega x-y^\cdot)+(\alpha_2^\cdot-$$
$$-\omega\alpha_1)(x^\cdot+\omega y)]+{}^1/_2(B_1+B_2)[\varphi^{\cdot 2}+2\omega\varphi^\cdot-2\omega\psi^\cdot\theta]+B_2\omega[\alpha_1(\psi^\cdot\sin\varphi+$$
$$+\theta^\cdot\cos\varphi)-\alpha_2(\psi^\cdot\cos\varphi-\theta^\cdot\sin\varphi)-\alpha_1^\cdot\alpha_2]-{}^1/_2B_2\omega^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)+\ldots \tag{1.3}$$

Здесь $M=m_1m_2/(m_1+m_2)$, $A_i^*=A_i+Mc_i^2$; A_i, B_i — соответственно экваториальный и осевой моменты инерции тела S_i $(i=1, 2)$; m_i — масса, $c_i=O_iC_i$, $\mu=Mc_1c_2$, $\nu_i=Mc_i$ (фиг. 2).

В случае одинаковых тел положим

$$B_1=B_2=B,\quad A_1=A_2=A,\quad c_1=c_2=c,\quad m_1=m_2=m \tag{1.4}$$

Используя соотношения (1.1), (1.3), (1.4) и лагранжиан системы $L=T-U$, запишем уравнения Лагранжа второго рода, линеаризованные в окрестности решения (1.2):

$$2A_0(\psi^{\cdot\cdot}\sin\varphi+\theta^{\cdot\cdot}\cos\varphi)+A_0(\alpha_2^{\cdot\cdot}-2\omega\alpha_1^\cdot-\omega^2\alpha_2)+2\nu(x^{\cdot\cdot}+2\omega y^\cdot-\omega^2x)+$$
$$+B\omega(\alpha_1^\cdot+\omega\alpha_2)+2B\omega(\psi^\cdot\cos\varphi-\theta^\cdot\sin\varphi)=0$$
$$2A_0(\psi^{\cdot\cdot}\cos\varphi-\theta^{\cdot\cdot}\sin\varphi)+A_0(\alpha_1^{\cdot\cdot}+2\omega\alpha_2^\cdot-\omega^2\alpha_1)-2\nu(y^{\cdot\cdot}-2\omega x^\cdot-\omega^2y)+$$
$$+B\omega(\alpha_1\omega-\alpha_2^\cdot)-2B\omega(\psi^\cdot\sin\varphi+\theta^\cdot\cos\varphi)=0$$
$$A_0(\psi^{\cdot\cdot}\cos\varphi-\theta^{\cdot\cdot}\sin\varphi)+(A+\mu)(\alpha_1^{\cdot\cdot}+2\omega\alpha_2^\cdot-\omega^2\alpha_1)-\nu(y^{\cdot\cdot}-$$
$$-2\omega x^\cdot-\omega^2y)-B\omega(\alpha_2^\cdot-\omega\alpha_1)-B\omega(\psi^\cdot\sin\varphi+\theta^\cdot\cos\varphi)+k^2\alpha_1=0$$
$$A_0(\psi^{\cdot\cdot}\sin\varphi+\theta^{\cdot\cdot}\cos\varphi)+(A+\mu)(\alpha_2^{\cdot\cdot}-2\omega\alpha_1^\cdot-\omega^2\alpha_2)+\nu(x^{\cdot\cdot}+$$
$$+2\omega y^\cdot-\omega^2x)+B\omega(\psi^\cdot\cos\varphi-\theta^\cdot\sin\varphi)+B\omega(\alpha_1^\cdot+\omega\alpha_2)+k^2\alpha_2=0 \tag{1.5}$$
$$M(x^{\cdot\cdot}-\omega^2x)+2\nu(\psi^{\cdot\cdot}\sin\varphi+\theta^{\cdot\cdot}\cos\varphi)+\nu(\alpha_2^{\cdot\cdot}-2\omega\alpha_1^\cdot-\omega^2\alpha_2)+2M\omega y^\cdot+\varkappa^2x=0.$$
$$M(y^{\cdot\cdot}-\omega^2y)-2\nu(\psi^{\cdot\cdot}\cos\varphi-\theta^{\cdot\cdot}\sin\varphi)-\nu(\alpha_1^{\cdot\cdot}+2\omega\alpha_2^\cdot-\omega^2\alpha_1)-$$
$$-2M\omega x^\cdot+\varkappa^2y=0,\quad (B_1+B_2)\varphi^{\cdot\cdot}=0,\quad A_0=A_1+2\mu$$

Введем замену переменных по формулам

$$\psi^\cdot\sin\varphi+\theta^\cdot\cos\varphi=u,\quad \psi^\cdot\cos\varphi-\theta^\cdot\sin\varphi=v \tag{1.6}$$
$$u-iv=z_1,\quad \alpha_1+i\alpha_2=z_2,\quad y-ix=z_3$$

Преобразование (1.6) линейно и невырождено, поэтому устойчивость по новым переменным будет означать устойчивость и по старым переменным.

Система уравнений движения (1.5) в новых переменных может быть преобразована к виду

$$
\begin{gathered}
2A_0(iz_1^{\cdot}+\omega z_1)-2B\omega z_1+A_0(z_2^{\cdot\cdot}-2i\omega z_2^{\cdot}-\omega^2 z_2)+ \\
+B\omega(iz_2^{\cdot}+\omega z_2)-2\nu(z_3^{\cdot\cdot}-2i\omega z_3^{\cdot}-\omega^2 z_3)=0 \qquad (1.7) \\
A(z_2^{\cdot\cdot}-2i\omega z_2^{\cdot}-\omega^2 z_2)+B\omega(iz_2^{\cdot}+\omega z_2)+2k^2 z_2=0 \\
2\nu(iz_1^{\cdot}+\omega z_1)+\nu(z_2^{\cdot\cdot}-2i\omega z_2^{\cdot}-\omega^2 z_2)-M(z_3^{\cdot\cdot}-2i\omega z_3^{\cdot}-\omega^2 z_3)-\varkappa^2 z_3=0
\end{gathered}
$$

Аналогично записывается система уравнений для $\bar{z}_k$.

2. Исследуем необходимые условия устойчивости равномерных вращений. Разыскивая решение системы (1.7) в виде

$$z_1=Z_1e^{i\lambda t},\ z_2=Z_2e^{i\lambda t},\ z_3=Z_3e^{i\lambda t} \qquad (2.1)$$

приходим к характеристическому уравнению

$$f_1(\lambda)f_2(\lambda)=0 \qquad (2.2)$$

$$
\begin{gathered}
f_1(\lambda)=[-A_0\lambda+\omega(A_0-B)][M(\lambda^2-2\omega\lambda+\omega^2)-\varkappa^2]- \qquad (2.3) \\
-2\nu^2(\omega-\lambda)(\lambda^2-2\omega\lambda+\omega^2) \\
f_2(\lambda)=-A\lambda^2+\lambda\omega(2A-B)-\omega^2(A-B)+2k^2
\end{gathered}
$$

Необходимые условия устойчивости решения (1.2) будут выполнены в случае действительности корней уравнения (2.2). Покажем, что корни уравнений $f_1(\lambda)=0$, $f_2(\lambda)=0$ действительны при любых значениях ω.

Введем в (2.3) замену $\omega-\lambda=\mu$, тогда выражения для f_1 и f_2 перепишутся следующим образом:

$$
\begin{gathered}
f_1=\mu^3(2MA_0-4\nu^2)-2B\omega\mu^2-2A_0\varkappa^2\mu+2B\omega\varkappa^2 \\
f_2=-A\mu^2+B\mu+2k^2
\end{gathered}
$$

Так как корни уравнения $f_2(\mu)=0$ действительны, остается показать, что действительны и корни уравнения $f_1(\mu)=0$, откуда и будет следовать выполнение необходимых условий устойчивости равномерных вращений при любых значениях ω. Представим уравнение $f_1(\mu)=0$ в виде

$$
\begin{gathered}
\mu^3-2\beta\omega\mu^2-2A_2\varkappa^2\mu+2\beta\omega\varkappa^2=0 \qquad (2.4) \\
\beta=B/(Am),\ A_2=A_0/A=1+mc^2/A>1,\ 2(mA_0-2\nu^2)=mA>0
\end{gathered}
$$

Число действительных корней уравнения $ax^3-bx^2+cx-d=0$ определяется [9] знаком его дискриминанта $d=a(4c^3-18lcd+27ad^2)+b^2(4bd-c^2)$. В случае $d<0$ уравнение (2.4) имеет три действительных корня. Для уравнения (2.4) имеем

$$
\begin{gathered}
d=-4r^3\varkappa^6+s^2\varkappa^4(27-18r-r^2)-4s^2\varkappa^2<0 \\
s=2\beta\omega,\ r=2A_2>2
\end{gathered}
$$

Таким образом, при любых скоростях ω необходимые условия устойчивости равномерных вращений двух одинаковых гироскопов Лагранжа, связанных упругим обобщенным универсальным шарниром, выполнены.

3. В [7] было введено понятие резонансных частот, которые определялись как корни уравнения $b_0(A,\ B,\ m,\ c,\ \omega^2,\ \varkappa^2,\ k^2)=0$, где b_0 — свободный член уравнения (2.2). В соответствии с этим определением находим

$$\omega_1^2=2k^2/(A-B),\ \omega_2^2=\varkappa^2(A+2\mu-B)/M/(A-B) \qquad (3.1)$$

Отметим, что значение частоты ω_1 совпадает с найденными в [7], но в случае обобщенного универсального шарнира, который в отличие от универсального шарнира учитывает и сдвиг элементов, появляется еще одна резонансная частота ω_2.

Покажем, что в окрестности этих частот при возникновении в системе дебаланса появляются интервалы неустойчивости. Пусть в системе двух тел, соединенных упругим обобщенным универсальным шарниром, первое тело является гироскопом Лагранжа, а второе представляет собой твердое тело с моментами инерции A, $A+\varepsilon$, B $(\varepsilon>0)$. Уравнения движения такой системы, линеаризованные в окрестности решения (1.2), имеют вид

$$\begin{aligned}
&(2A_0+\varepsilon)(u^{\cdot}-\omega v)+(2B+\varepsilon)\omega v+A_0(\alpha_2^{\cdot\cdot}-2\omega\alpha_1^{\cdot}-\omega^2\alpha_2)+\\
&\quad+B\omega(\alpha_1^{\cdot}+\omega\alpha_2)+2\nu(x^{\cdot\cdot}+2\omega y^{\cdot}-\omega^2 x)=0\\
&2A_0(v^{\cdot}+\omega u)+\omega(\varepsilon-2B)u+A_0(\alpha_1^{\cdot\cdot}+2\omega\alpha_2^{\cdot}-\omega^2\alpha_1)+\\
&\quad+B\omega(\omega\alpha_1-\alpha_2^{\cdot})-2\nu(y^{\cdot\cdot}-2\omega x^{\cdot}-\omega^3 y)=0\\
&A_0(v+\omega u)-B\omega u+(A+\mu)(\alpha_1^{\cdot\cdot}+2\omega\alpha_2^{\cdot}-\omega^2\alpha_1)-B\omega(\alpha_2^{\cdot}-\\
&\quad-\omega\alpha_1)+k^2\alpha_1-\nu(y^{\cdot\cdot}-2\omega x^{\cdot}-\omega^2 y)=0\\
&A_0(u^{\cdot}-\omega v)+B\omega v+(A+\mu)(\alpha_2^{\cdot\cdot}-2\omega\alpha_1^{\cdot}-\omega^2\alpha_2)+B\omega(\alpha_1^{\cdot}+\\
&\quad+\omega\alpha_2)+k^2\alpha_2+\nu(x^{\cdot\cdot}+2\omega y^{\cdot}-\omega^2 x)=0\\
&2\nu(u^{\cdot}-\omega v)+\nu(\alpha_2^{\cdot\cdot}-2\omega\alpha_1^{\cdot}-\omega^2\alpha_2)+M(x^{\cdot\cdot}+2\omega y^{\cdot}-\omega^2 x)+\varkappa^2 x=0\\
&2\nu(v^{\cdot}+\omega u)+\nu(\alpha_1^{\cdot\cdot}+2\omega\alpha_2^{\cdot}-\omega^2\alpha_1)-M(y^{\cdot\cdot}-2\omega x^{\cdot}-\omega^2 y)-\varkappa^2 y=0
\end{aligned}\tag{3.2}$$

Разыскивая решение системы (3.2) в виде (2.1), получим характеристическое уравнение

$$b_5\lambda^{10}+b_4\lambda^8+b_3\lambda^6+b_2\lambda^4+b_1\lambda^2+b_0=0\tag{3.3}$$

в котором b_i $(i=\overline{0,5})$ — функции параметров системы и скорости вращения ω. Приведем лишь выражения для b_5 и b_0:

$$\begin{aligned}
&b_5=A(MA_0-2\nu^2)\{-A(MA_0-2\nu^2)+\varepsilon[M(A+\mu)-\nu^2]\}\\
&b_0=\omega^2(A-B)^2(\omega^2-\omega_1^2)(\omega_2^2-\omega^2)\{(A-B)^2(\omega^2-\omega_1^2)(\omega_2^2-\omega^2)+\\
&+\varepsilon[M\langle{}^1/_2\omega_1^2(A-B)-\omega^2(A-B+\mu)\rangle\langle-\omega_2^2(A-B)/(A_0-B)+\omega^2\rangle+\omega^4\nu^2]\}
\end{aligned}$$

Поскольку $(MA_0-2\nu^2)={}^1/_2Am>0$, то $b_5<0$ при достаточно малом ε, в то время как при

$$\omega_1^2<\omega^2<\omega_1^2+\delta_1,\qquad \omega_2^2<\omega^2<\omega_2^2+\delta_2\tag{3.4}$$

b_0 будет больше нуля. (В (3.4) $\delta_1(\varepsilon)\to0$, $\delta_2(\varepsilon)\to0$ при $\varepsilon\to0$). А это означает, что уравнение (3.3) относительно λ имеет сопряженные чисто мнимые корни. Следовательно, изучаемое равномерное вращение связки двух гироскопов Лагранжа, один из которых имеет динамический дебаланс, неустойчиво в окрестности резонансных частот ω_1^2, ω_2^2.

Таким образом, в модели упругого объекта, учитывающей кроме изгибных еще и сдвиговые деформации, в отличие от [7] появляется еще один интервал неустойчивости в окрестности резонансной частоты ω_2^2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белецкий В. В., Новикова Е. Т.* Об относительном движении связки двух тел на орбите. Космич. исслед., 1969, т. 7, № 3, с. 377–384.
2. *Сарычев В. А., Сазонов В. В.* Нутационные демпферы спутников с двойным вращением. Celest. Mech. 1977, т. 15, № 1, с. 75–98.
3. *Черноусько Ф. Л.* О движении твердого тела с упругими и диссипативными элементами. ПММ, 1978, т. 42, № 1, с. 34–42.
4. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
5. *Крементуло В. В.* О стабилизации положения равновесия твердого тела при помощи вращающихся масс. М.: Наука, 1977. 236 с.
6. *Болграбская И. А., Савченко А. Я.* Об одном методе исследования колебаний вращающихся осесимметричных упругих стержней.— Механика твердого тела, 1984, вып. 16, с. 68–77.
7. *Болграбская И. А., Савченко А. Я.* Устойчивость равномерных вращений свободной связки n гироскопов Лагранжа.— Мат. физика и нелинейн. механика, 1984, вып. 2(36), с. 9–14.
8. *Диментберг Ф. М.* Изгибные колебания вращающихся валов. М.: Изд-во АН СССР, 1958. 248 с.
9. *Савченко А. Я.* Устойчивость стационарных движений механических систем. Киев: Наук. думка, 1977. 160 с.

Донецк

Поступила в редакцию
13.XII.1984