МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1987

УДК 531.55:521.2

К ИССЛЕДОВАНИЮ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В АТМОСФЕРЕ ПРИ ДЕЙСТВИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

ЛОХОВ Г. М., ПОДЗОРОВ С. И.

На основе сочетания асимптотических и численных методов построен комбинированный алгоритм исследования динамики относительного движения неуправляемого твердого тела в атмосфере при действии возмущений, позволяющий примерно на порядок сократить время счета по сравнению со сквозным численным интегрированием. С помощью асимптотических уравнений пространственного относительного движения твердого тела в атмосфере при действии возмущений построены быстрые алгоритмы расчета, которые могут быть применены для ускоренного анализа в рамках систем автоматизированного проектирования.

Среди задач динамики полета неуправляемого твердого тела в атмосфере интерес представляет исследование влияния относительного движения на траекторию полета центра масс при действии возмущений. Возможность эффективного исследования подобных задач в значительной степени определяется построением соответствующей математической модели. В [1] введено понятие оптимальной имитационной модели в смысле минимальной трудоемкости математического моделирования на ЭВМ жестких нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений динамики полета твердого тела в атмосфере и указано, что создание оптимальной модели должно проводиться в тесной связи с выбором наилучших с точки зрения минимальных вычислительных затрат ускоренных алгоритмов численного интегрирования или с разработкой комбинированного метода, основанного на сочетании экономичных численных методов с быстрыми алгоритмами интегрирования упрощенных уравнений, обработанных предварительно с помощью асимптотических методов быстрых вращений или колебаний.

В настоящее время для задач динамики полета твердых тел в атмосфере разработан ряд алгоритмов решения, позволяющих ускорить вычислительный процесс благодаря использованию асимптотических методов [2–5] и построенных при следующих основных предположениях: твердое тело является идеальным телом вращения, его центр масс лежит на продольной оси симметрии, а главные оси инерции параллельны осям аэродинамической симметрии; для тел с асимметриями относительное движение рассматривается в предположении, что оно не влияет на известное плоское движение центра масс [2] или в предположении медленности относительного движения [3]; характер относительного движения является неизменным на всем расчетном участке (например, в [4] относительное движение считается колебательным с амплитудой не более 1 рад); возмущения, вызвавшие относительное движение, могут действовать только в начальный момент, а на всем расчетном участке они отсутствуют; подъемная сила в уравнениях движения центра масс может не учитываться [5].

Необходимость изменения изложенных предположений вызвана спецификой действия возмущений, представляющих собой повторяющиеся кратковременные моменты, и повышенными требованиями к точности определения координат точек падения твердого тела на поверхность планеты. Условия на геометрию твердого тела предполагаются выполненными, остальные предположения заменяются следующими: характер относительного движения на протяжении расчетного участка произвольным образом меняется, например, внешние возмущения могут вызвать сначала вращательное движение, а затем колебательное или наоборот; возмущения могут действовать на всем расчетном участке с определенной временной логикой; подъемную силу необходимо учитывать; для невращающегося тела как движение центра масс, так и относительное движение могут считаться плоскими, причем относительное движение совершается в плоскости траектории полета центра масс. В этом случае наиболее удобно применение асимптотических методов и возможен эффективный учет подъемной силы.

1. Для плоской задачи систему уравнений движения твердого тела в атмосфере можно записать в общепринятом виде [5]: [1]

$$r^{\cdot}=V\sin\theta,\quad \varphi^{\cdot}=-V/r\cos\theta$$

$$\theta^{\cdot}=-(V/r-\mu/r^2V)\cos\theta-(\rho V/2m)S[c_y(\alpha)-c_{\tau h}\sin\alpha]$$

$$V^{\cdot}=-(\mu/r^2)\sin\theta-(\rho V^2/2m)[c_x(\alpha)+c_{\tau h}\cos\alpha] \qquad (1.1)$$

$$\Theta^{\cdot\cdot}+(\rho V/2J_z)Sl^2m_z^{\omega}(\alpha)\Theta^{\cdot}+(\rho v^2/2J_z)Slm_z(\alpha)=M^*/J_z$$

где $\rho=\rho(H)$ — плотность атмосферы, $r=R_0+H$ — расстояние от центра планеты до центра масс твердого тела, $\alpha=\pi/2+\vartheta-\theta-\varphi$ — угол атаки, M^* — возмущающий момент, $c_{\tau h}$ — высотная поправка к аэродинамическому коэффициенту c_τ, m, J_z, S, l — массовая, инерционная и размерные характеристики твердого тела.

Решение задачи исследования влияния относительного движения на траекторию полета твердого тела в атмосфере при действии возмущений в такой постановке должно осуществляться с помощью комбинированного метода, использующего как различные асимптотические методы, так и численные решения уравнений движения на различных участках траектории.

2. Приложения асимптотических регулярных методов к задачам динамики полета твердого тела в атмосфере при отсутствии внешних возмущающихся моментов (что соответствует $M^*=0$ в системе (1.1)) достаточно подробно изложены в [2—5] [2]. Рассмотрим поэтому случай наличия возмущающего момента. Примем, что на участке действия возмущений относительное движение представляет собой колебания по углу атаки α с достаточно малой амплитудой, и принципиально применима асимптотика быстрых колебаний. Исследуемые возмущения имеют вид кратковременных (длительности τ^0) прямоугольных импульсов момента силы с большой амплитудой. Однако, как будет видно из дальнейшего, при построении асимптотических приближений удобно принять момент постоянным (непрекращающимся), а построенные приближения использовать лишь на интервале времени $(t_0,\ t_0+\tau^0)$.

Примем, ввиду малости угла атаки, что аэродинамические коэффициенты можно приблизить следующими выражениями:

$$c_x(\alpha)+c_{\tau h}\cos\alpha=c_{x0}+k\alpha^2,\quad c_y(\alpha)-c_{\tau h}\sin\alpha=c_y^{\alpha}\alpha$$

$$m_z(\alpha)=m_z^{\alpha}\alpha,\quad m_z^{\omega}(\alpha)=m_0^{\omega}+m_2^{\omega}\alpha^2 \qquad (2.1)$$

Здесь высотная поправка $c_{\tau h}$ включена в соответствующие коэффициенты. Следуя [5], введем малый параметр ε, предполагая, что тело обладает большим запасом статической устойчивости, т. е. статический аэродинамический момент можно представить в виде $^1/_2\rho V^2Slm_z(\alpha)=J_z\omega^2\alpha/\varepsilon^2$. Тогда, введя новую независимую переменную $\tau=t/\varepsilon$, приведем уравнение относительного движения тела к виду:

$$d^2\alpha/d\tau^2+{}^1/_2\varepsilon(\rho V/J_z)Sl^2m_{z1}^{\omega}(\alpha)\,d\alpha/d\tau+\omega^2\alpha=M+O(\varepsilon^2)$$

$$m_{z1}^{\omega}(\alpha)=m_0^{\omega}+J_zc_y^{\alpha}/ml^2+(m_2^{\omega}-{}^1/_2c_{\tau h}J_z/ml^2)\alpha^2,\quad M=\varepsilon^2M^* \qquad (2.2)$$

Важно подчеркнуть, что $M=O$ (1), так как амплитуда возникающего момента M^* предполагается большой.

Для построения асимптотических приближений введем новые переменные c и ψ:

$$\alpha=c\cos\psi+M/\omega^2,\quad d\alpha/d\tau=-\omega c\sin\psi \qquad (2.3)$$

Видно, что функция α из (2.3) представляет собой решение уравнения (2.2) при $\varepsilon=0$. Как обычно, предполагая, что выражение (2.3) оста-

[1] *Лохов Г. М., Подзоров С. И.* Численное исследование динамики полета твердого тела в атмосфере. М., 1982.— 53 с. Деп. в ВИНИТИ 12.07.82; № 3690—82.

[2] *Дзыра Б. И.* Применение асимптотических методов к некоторым классам нелинейных дифференциальных уравнений. Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук. Киев: Ин-т матем. АН УССР. 1971.

ется справедливым при $0<\varepsilon\ll 1$, построим второе асимптотическое приближение для системы (1.1):

$$
\begin{gathered}
V=V_2-\varepsilon P_1(\rho/\omega_2)V_2^2kc_2(^1/_4 c_2\sin 2\psi+2M\sin\psi/\omega_2^2)\\
\theta=\theta_2+\varepsilon P_1(\rho/\omega_2)V_2c_y^\alpha c_2\sin\psi\\
c=c_2+\varepsilon\{^1/_4(c_2\rho V_2/\omega_2)[M_1m_0^\omega-P_1c_{x0}+\\
+M_2(^1/_4c_2^2\cos 2\psi+M^2/\omega_2^4)-g_V\sin\theta_2]\sin 2\psi-\\
-^2/_3MM_2\rho V_2c_2^2\sin^3\psi/\omega_2^3-(M\rho V_2/\omega_2^3)[(g_V\sin\theta_2+\\
+P_1(c_{x0}+kM^2/\omega_2^4))\sin\psi+P_1(^1/_2M\sin 2\psi/\omega_2^2+\\
+^1/_4c_2^2(^1/_3\sin 3\psi+3\sin\psi))]\}\\
P_1=^1/_2S/m,\ M_1=^1/_2Sl^2/J_z,\ M_2=M_1m_2^\omega-P_1k\\
g_V=(\mu/(rV_2^2)+\beta)/\rho,\ \omega_2=\omega(V_2),\ d\rho/dr=-2\beta\rho
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

Переменные φ, r, V_2, θ_2, c_2 определяются из решения следующих дифференциальных уравнений:

$$
\begin{gathered}
d\varphi/d\tau=-\varepsilon(V_2/r)\cos\theta_2,\quad dr/d\tau=\varepsilon V_2\sin\theta_2\\
dV_2/d\tau=-\varepsilon(\mu/r^2)\sin\theta_2-\varepsilon P_1\rho V_2^2[c_{x0}+k(^1/_2c_2^2+M^2/\omega_2^4)]\\
d\theta_2/d\tau=\varepsilon(V_2/r-\mu/(r^2V_2))\cos\theta_2+\varepsilon P_1\rho V_2c_y^\alpha M/\omega_2^2\\
dc_2/d\tau=-^1/_2\varepsilon c_2\{\rho V_2M_1[m_0^\omega+m_2^\omega(M^2/\omega_2^4+^1/_4c_2^2)]-\\
-[\beta V_2+\mu/(r^2V_2)]\sin\theta_2-P_1\rho V_2[c_{x0}+k(M^2/\omega_2^4+^1/_4c_2^2)+\\
+2M^2P_1kV_2/\omega_2^4\}
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

Величина ψ определяется квадратурой

$$
\psi=\psi_0+\int_{\tau_0}^{\tau}\omega_2(t)\,dt \tag{2.6}
$$

Построенное асимптотическое приближение позволяет найти φ, r, V, θ, c с точностью $O(\varepsilon^2)$, а ψ — с точностью $O(\varepsilon)$ на интервале времени τ порядка ε^{-1}. Величины α и $d\alpha/d\tau$ определяются соотношениями (2.3) с точностью $O(\varepsilon)$.

Определим начальные значения c и ψ, предполагая, что в начальный момент $\alpha=0$, $d\alpha/d\tau>0$. Тогда из (2.3) следует $c_0\cos\psi_0=-M/\omega^2$, $c_0\sin\psi_0=-(d\alpha/d\tau)/\omega$. Отсюда видно, что $\cos\psi_0<0$, $\sin\psi_0<0$ (считаем $M>0$). Поэтому $c_0=[M^2/\omega^2+(d\alpha/d\tau)^2]\omega$, $\psi_0=\operatorname{arctg}(\omega(d\alpha/d\tau)/M)+\pi$. Начальные значения V_2, θ_2, c_2 найдем, решая относительно них уравнения (2.4) с точностью $O(\varepsilon^2)$.

Проинтегрировав уравнения (2.5) на интервале действия возмущения (τ_0, $\tau_0+\tau^0/\varepsilon$) с использованием соотношений (2.3), (2.4), (2.6) найдем параметры движения центра масс и относительного движения в момент окончания очередного импульса. Движение тела в промежутке между двумя соседними возмущениями также анализируется с помощью асимптотических разложений, построенных при $M^*=0$. На интервале действия следующего возмущения вновь используются уравнения (2.4)—(2.6) и т. д.

Итак, построена методика асимптотического расчета движения тела при периодическом действии импульсных возмущений. Периодичность действия возмущений составляет nT, где T — период колебаний тела. Разумеется, методика будет применима, только если, несмотря на «раскачку» возмущающим моментом, тело будет совершать относительно центра масс колебательное движение с малой амплитудой, обеспечивающей достаточную точность (2.1). При нарушении этого условия алгоритм исследования полета тела в атмосфере должен использовать другие асимптотические приближения или осуществлять численное интегрирование исходных уравнений движения (1.1). Последнее необходимо на переходных участках траектории, где происходит изменение характера относительного движения. В этом случае асимптотики неприменимы [4]. Поскольку численное решение системы (1.1) является наиболее трудоемким этапом исследования в смысле затрат машинного времени, большое значение имеет выбор наиболее экономичного численного метода интегрирования системы (1.1).

3. Для целей построения алгоритмов, сочетающих асимптотические и численные методы, получим оценку величины ошибки асимптотического разложения для системы с вращающейся фазой общего вида: $d\mathbf{x}/dt=\varepsilon\mathbf{X}(\mathbf{x},\ \psi)$, $d\psi/dt=\omega(x)+\varepsilon Y(x,\ \psi)$. В общем случае аналитическая оценка ошибки асимптотического метода требует знания константы Липшица для правых частей $\mathbf{X}(\mathbf{x},\ \psi)$. Но в случае, когда порядок погрешности асимптотических приближений для медленных и быстрых переменных один и тот же ($\omega=\mathrm{const}$), можно построить численную процедуру оценки ошибки асимптотики. Пусть $\mathbf{x}_n$, ψ_n – n-е асимптотическое приближение $\mathbf{x}$, ψ. Тогда можно записать

$$\mathbf{x}_n=\mathbf{x}+\delta\mathbf{x},\quad \psi_n=\psi+\delta\psi \tag{3.1}$$

Очевидно, что $\|\delta\mathbf{x}\|=O(\varepsilon^n)$, $|\delta\psi|=O(\varepsilon^n)$ согласно сделанной выше оговорке. Рассмотрим величину $\mathbf{E}$, определяемую уравнением

$$d\mathbf{E}/dt=d\mathbf{x}_n/dt-\varepsilon\mathbf{X}(\mathbf{x}_n,\ \psi_n) \tag{3.2}$$

Можно считать, что $d\mathbf{E}/dt$ – невязка исходной системы уравнений при подстановке в нее функций $\mathbf{x}_n$, ψ_n. Подставив (3.1) в (3.2), получим

$$d\mathbf{E}/dt=d\mathbf{x}/dt+d\delta\mathbf{x}/dt-\varepsilon\mathbf{X}(\mathbf{x},\ \psi)+\varepsilon(\partial\mathbf{X}/\partial\mathbf{x}\delta\mathbf{x}+\partial\mathbf{X}/\partial\psi\delta\psi)+\ldots$$

Считая $\|\partial\mathbf{X}/\partial\mathbf{x}\|$, $\|\partial\mathbf{X}/\partial\psi\|=O(1)$ и учитывая, что $\|\delta\mathbf{x}\|$ и $|\delta\psi|$ одного порядка, получим $d\mathbf{E}/dt=d\delta\mathbf{x}/dt+\varepsilon O(\delta\mathbf{x})$, т. е. $\mathbf{E}=\delta\mathbf{x}+\varepsilon\int_0^t O(\delta\mathbf{x})\,dt$ (примем $\delta\mathbf{x}|_{t=0}=0$), откуда следует, что $\mathbf{E}=\delta\mathbf{x}+O(\delta\mathbf{x})O(\varepsilon t)$. Отсюда видно, что $\mathbf{E}$ будет хорошей оценкой $\delta\mathbf{x}$, пока t не станет порядка ε^{-1}. Но и асимптотический метод справедлив только до $t=O(\varepsilon^{-1})$. Поэтому в пределах применимости асимптотического метода $\mathbf{E}$ является хорошей оценкой для $\delta\mathbf{x}$. Вычисление $\mathbf{E}$ сводится к квадратуре:

$$\mathbf{E}=\mathbf{x}_n(t)-\mathbf{x}_n(0)-\varepsilon\int_0^t \mathbf{X}[\mathbf{x}_n(t),\ \psi_n(t)]\,dt \tag{3.3}$$

где $\mathbf{x}_n$, ψ_n – известные функции t.

Некоторая трудность при вычислении интеграла в (3.3) может быть вызвана тем, что подынтегральная функция зависит от быстрой переменной ψ, т. е. быстро меняется со временем. Однако, в силу периодичности $\mathbf{X}$ по ψ, эта зависимость, как правило, выражается в осцилляциях $\mathbf{X}$, а для интегрирования сильно осциллирующих функций разработаны соответствующие методы.

4. Остановимся теперь на задаче исследования движения тела по окончании участка возмущений. Для случая плоского движения идеального тела вращения в [7] предлагается алгоритм решения, позволяющий получить экономию машинного времени в 4—5 раз по сравнению с прямым численным интегрированием соответствующих уравнений движения. Рассмотрим пути дальнейшего повышения быстродействия предложенного алгоритма.

Движение тела, в общем случае, распадается на 3 участка, определяемых характером относительного движения: участок быстрых вращений, переходной участок и участок быстрых колебаний. На первом и третьем участках используются соответствующие асимптотики; на втором — производится прямое численное решение уравнений движения тела в атмосфере.

Для обеспечения заданной точности вычислений достаточно использовать второе асимптотическое приближение[3]. Однако для увеличения

---

[3] *Левенков М. А., Лохов Г. М., Милков В. Е., Подзоров С. И.* Развитие асимптотического метода исследования уравнений динамики твердого тела в атмосфере. М., 1984.– 45 с. Деп. в ВИНИТИ 20.04.84; № 2529–84.

быстродействия методики представляется целесообразным использовать для вычислений на участках быстрых вращений и колебаний более высокое приближение асимптотического метода.

Наиболее трудоемким и практически определяющим быстродействие является этап расчета переходного участка, т. к. приходится использовать шаг интегрирования на 2 порядка меньший, чем на других участках. Это объясняется не только жесткостью системы уравнений движения, но и тем, что расчет переходного участка начинается, когда относительное движение еще является быстрым вращением. Момент «выключения» асимптотики быстрых вращений определяется достигнутой величиной ошибки этой асимптотики, превосходящей допустимые границы раньше, чем асимптотика становится неприменимой, т. е. когда движение перестает быть быстрым вращением. Поэтому же длину переходного участка можно уменьшить, если использовать более высокие приближения асимптотики быстрых вращений.

5. При исследовании движения тела необходимо определять характер его относительного движения, в зависимости от которого выбирается то или иное асимптотическое приближение (или осуществляется численное интегрирование (1.1)). Это можно осуществить, используя интеграл энергии для уравнения относительно движения. В зависимости от величины энергии относительного движения, определяющей его характер, выделяются следующие 4 случая: *1* относительное движение является быстрым вращением; *2* относительное движение является медленным вращением (вращение полагается медленным не только в случае малости его угловой скорости, но и в том случае, если оно является существенно неравномерным); *3* относительное движение является колебательным с большой амплитудой (в этом случае асимптотика быстрых колебаний неприменима; на основании численных проверок амплитуду следует считать большой, если она превосходит α_{max}=0,5–1,0); *4* быстрые колебания.

Изложим схему предлагаемого комбинированного метода исследования динамики твердого тела в атмосфере. Примем, что возмущения начинают действовать на твердое тело с момента достижения им высоты H_V. В этот момент начинается численное интегрирование системы уравнений (1.1) на интервале $(t_0,\ t_0+\tau^0)$ действия возмущений. Затем по величине энергии относительного движения определяется, какой из четырех выделенных его типов реализуется. В зависимости от этого возможны следующие три варианта разветвления метода:

1. При реализации случая *1* происходит переход в блок асимптотики быстрых вращений на время действия возмущений. Каждые последующие возмущения должны ускорять вращение, т. к. они действуют через целое число периодов. Асимптотический расчет в этом блоке осуществляется с постоянной оценкой ошибки асимптотики по формулам типа (3.3). Как только ошибка превысит некоторый допустимый предел, происходит возврат в блок численного интегрирования уравнений (1.1), определяется момент перехода вращательного движения в колебательное — по первому прохождению $\alpha^{\bullet}$ через 0. Далее при каждом прохождении $\alpha^{\bullet}$ через 0, т. е. при достижении α максимального значения, амплитуда колебаний по углу атаки сравнивается с α_{max} и при $|\alpha|<\alpha_{max}$ происходит переход в блок асимптотики быстрых колебаний. Асимптотический расчет ведется до момента затухания колебаний.

2. При реализации случаев *2* или *3* счет продолжается по уравнениям (1.1). После каждого возмущения определяется характер относительного движения тела. Выход из блока интегрирования (1.1) происходит только после реализации в процессе счета случая *1*). Если этого не происходит, то счет по (1.1) продолжается до окончания действия всех возмущений. Если и после этого не реализовались случаи *1* и *4*, продолжается расчет уравнений (1.1) до перехода относительного движения в колебательное с амплитудой меньше α_{max}, после чего происходит переход в блок асимптотики быстрых колебаний, где счет ведется до момента затухания колебаний. При реализации после окончания действия последнего возмущения

случая *3* нет необходимости определять момент перехода вращения в колебания, т. к. движение с самого начала является колебательным. При реализации случая *4* происходит переход к асимптотике быстрых колебаний, но без действия возмущений.

3. При реализации случая *4* происходит переход к блоку асимптотики быстрых колебаний при действии возмущений. После действия каждого возмущения определяется характер относительного движения тела. При реализации случая *1* происходит переход в блок асимптотики быстрых вращений, после чего счет выполняется согласно второму варианту. В случаях *2* или *3* счет выполняется согласно второму варианту. Если же опять реализуется случай *4*, то счет продолжается с использованием асимптотики быстрых колебаний.

Применение изложенного универсального метода позволяет примерно на порядок сократить время счета по сравнению со «сквозным» численным интегрированием уравнений (1.1). Время счета в итоге определяется той долей расчетного участка, на которой ведется непосредственное численное интегрирование исходных уравнений. Поэтому при уменьшении высоты начала возмущений скорость счета, при прочих равных условиях, увеличивается вследствие сокращения или даже отсутствия участков вращения и колебаний с большой амплитудой.

Построенный метод использовался для определения величины рассеивания точки приземления тела в зависимости от характеристик возмущений. В качестве варьируемых параметров использовались величины H_V, M^*, τ^0, n.

При некоторых значениях варьируемых параметров величина рассеивания меняет знак. Причем значения параметров соответствуют изменению характера относительного движения тела: оно перестает быть колебательным и становится вращательным. Поэтому можно заключить, что механизм влияния относительного движения на движение центра масс различен для разных типов относительного движения: при колебательном движении основную роль играет подъемная сила, «поворачивающая» вектор скорости центра масс, а при вращательном — увеличение коэффициента сопротивления и, как следствие, — более резкое торможение в атмосфере и более крутой спуск.

6. Рассмотрим обобщение комбинированного метода на задачу о вращающемся вокруг продольной оси теле, когда относительное движение уже нельзя считать плоским. При этом, в отличие от плоского случая, принимается, что характер относительного движения не меняется и влиянием подъемной силы на траекторию центра масс можно пренебречь. Однако, по-прежнему, считается, что возмущения действуют на всем расчетном участке. Запишем уравнения движения твердого тела в атмосфере в этом случае, считая движение центра масс по-прежнему плоским [4] (принимается, что возмущающий момент направлен перпендикулярно к плоскости траектории):

$$
\begin{gathered}
d\varphi/dt=-(V/r)\cos\theta, \quad dr/dt=V\sin\theta \\
d\theta/dt=[V/r-\mu/(r^2V)]\cos\theta \\
dV/dt=(\mu/r^2)\sin\theta-P_1\rho V^2[c_x(\alpha)+c_{\tau h}\cos\alpha] \\
dG/dt=-[M_1 l\rho V m_z^{\omega}-Y\cos\alpha/(mV\sin\alpha)]\times \\
\times(G-R\cos\alpha)+YR\sin\alpha/(mV) \\
dR/dt=M^*\sin\gamma\sin\alpha \\
d^2\alpha/dt^2+(G-R\cos\alpha)(R-G\cos\alpha)/\sin^3\alpha+[M_1 l\rho V m_z^{\omega}- \\
-\partial Y/\partial\alpha/(mV)]d\alpha/dt+M_1\rho V^2 m_z(\alpha)=M^*\cos\gamma \\
d\gamma/dt=(G-R\cos\alpha)/\sin^2\alpha
\end{gathered}
\tag{6.1}
$$

где γ — угол крена, G и R — проекции вектора кинетического момента на направление вектора скорости и продольную ось тела, $Y={}^1/_2\rho V^2 S[c_y(\alpha)-c_{\tau h}\sin\alpha]$ — подъемная сила, $m_x^{\omega_x}$ принят равным нулю.

Рассмотрим вначале, следуя [4], построение асимптотических приближений для (6.1) при отсутствии внешних возмущений. Асимптотические приближения строятся в предположении, что параметры движения центра масс меняются медленно по сравнению с параметрами относительного движения и что демпфирование мало. Соответственно малый параметр ε приписывается производным величин r, V, θ, R, φ и демпфирующему члену в уравнении для α. При этом оказывается, что $dG/dt=O(\varepsilon)$, т. е. G также является медленной переменной.

Обозначим через $X_G(G, R, \ldots, \varphi, \alpha)$ и т. д. правые части уравнений для медленных переменных в (6.1). Будем считать, что движение происходит в плотных слоях атмосферы. Тогда относительное движение имеет характер колебаний по α с достаточно малой амплитудой, так что справедливы формулы (2.1) и правые части (6.1), а также асимптотические уравнения для медленных переменных можно представить в следующей форме:

$$X_G(G, \ldots, \varphi, \alpha)=X_{G1}(G, \ldots, \varphi)+X_{G2}(G, \ldots, \varphi)\alpha^2, \ldots$$

$$dG/dt=X_G(G, \ldots, \varphi, [{}^1/_2(\alpha_{\max}^2+\alpha_{\min}^2)]^{1/2}), \ldots \tag{6.2}$$

Угол атаки может быть рассчитан по формулам

$$\alpha=[\alpha_{\min}^2+(\alpha_{\max}^2-\alpha_{\min}^2)\sin^2\psi]^{1/2} \tag{6.3}$$

$$d\psi/dt=\omega=g_r^{1/2}\equiv(M_1\rho V^2 m_z^\alpha+(G^2+R^2)/15+7GR/60)^{1/2}$$

$$\alpha_{\max}=[(2D/\pi+|G-R|+(4D(D/\pi+|G-R|))^{1/2})/\omega]^{1/2}$$

$$\alpha_{\min}=|G-R|/(\alpha_{\max}\omega)$$

Значение D определяется из уравнения

$$dD/dt+F_zD=0$$

$$F_z=M_1l\rho Vm_z^\omega({}^1/_2(\alpha_{\max}+\alpha_{\min}))-\partial Y({}^1/_2(\alpha_{\max}+$$
$$+\alpha_{\min}))/\partial\alpha/(mV)-(X_{G2}-X_{R2})\operatorname{sign}(G-R)/\omega-$$
$$-(\partial g_r/\partial GX_{G2}+\partial g_r/\partial RX_{R2}+\partial g_r/\partial VX_{V2})(\alpha_{\max}+\alpha_{\min})^2/(8g_r)$$

Начальное значение D определяется по начальной величине энергии относительного движения:

$$D_0={}^1/_2\pi(E_0/\omega_0-|G_0-R_0|) \tag{6.4}$$

$$E={}^1/_2[(d\alpha/dt)^2+(G-R)^2/\alpha^2+g_r\alpha^2]$$

При этом всегда считается $\alpha\neq0$. Равенство $\alpha=0$ может осуществиться только при $G=R$ в (6.3) и (6.4).

7. Реализация комбинированного метода для пространственного относительного движения твердого тела состоит в следующем. Предположим, что твердое тело вращается вокруг своей продольной оси с достаточно большой угловой скоростью (несколько об/с). Если возмущение действует только в начальный момент и отсутствует на расчетном участке, то можно применить соответствующие асимптотические методы. Однако при действии нескольких возмущений возникает трудность, связанная с тем, что на участке действия возмущения в некоторых уравнениях системы (6.1) присутствуют члены, зависящие от угла крена.

Угол крена является быстрой переменной, и осреднение (6.1) в этом случае весьма сложно. Однако время τ^0 и число возмущений обычно невелики, и поэтому можно интегрировать (6.1) на всех интервалах $(t_i, t_i+\tau^0)$ численно с достаточно малым шагом (t_i — момент начала i-го возмущения). На соответствующих участках можно использовать асимптотические уравнения.

В начальный момент (момент достижения H_V) имеем $\alpha=0$ и $G=R$. Поэтому в этот момент особенности в (6.1) не возникают, так как члены, содержащие α в знаменателе, при $G=R$ стремятся к конечному пределу при $\alpha\to 0$. В процессе действия импульса возникает довольно значительная разность $G-R$ так как величина R при немалых M изменяется гораздо быстрее G. Поэтому в дальнейшем $G\neq R$ и, как следует из (6.2), $\alpha_{\min}>0$. Поскольку $|\alpha|\geqslant\alpha_{\min}>0$, угол α не проходит через ноль, и особенности в (6.1) не возникают.

В результате численного интегрирования (6.1) на интервале $(t_i,\ t_i+\tau^0)$ в момент $t=t_i+\tau^0$ известны параметры движения центра масс и G, R, α, $d\alpha/dt$, γ. Для интегрирования асимптотических уравнений (6.2) начальные значения D, $\alpha_{\max}$, $\alpha_{\min}$ находятся из (6.3) и (6.4). Начальное значение фазы ψ_0 при $t=t_i+\tau^0$ определяется из (6.3):

$$\psi_0=\psi^*,\quad (\alpha\, d\alpha/dt)\,|_{t=t_i+\tau^0}>0,\quad \psi_0=\pi-\psi^*,\quad (\alpha\, d\alpha/dt)\,|_{t=t_i+\tau^0}<0,$$

$$\psi^*=\arcsin[\,(\alpha^2-\alpha^2_{\min})/(\alpha^2_{\max}-\alpha^2_{\min})\,]^{1/2}.$$

Поскольку периодичность действия возмущений определяется периодом колебаний по углу атаки α, то из (6.3) можно считать, что следующее возмущение действует в момент $\psi=2\pi$ и асимптотические уравнения необходимо интегрировать по фазе на интервале $(\psi_0,\ 2\pi)$. После интегрирования в момент $\psi=2\pi$ известны параметры движения центра масс, G, R, $|\alpha|=\alpha_{\min}$ и $d\alpha/dt=0$. Причем знак α определяется начальными условиями, так как на рассматриваемом участке он не меняется. Для интегрирования на интервале $(t_i,\ t_i+\tau^0)$ уравнений (6.1) необходимо знать еще значение угла крена γ. Для его вычисления построим специальный алгоритм с использованием асимптотических уравнений. Подставив (6.3) в уравнение

$$\gamma=\gamma_0+\int\limits_{\psi_0}^{2\pi}(G-R\cos\alpha(\psi))/(\omega\sin^2\alpha(\psi))\,d\psi$$

получим искомую зависимость

$$\gamma=\gamma_0+\int\limits_{\psi_0}^{2\pi}\{G-R\cos[\alpha^2_{\min}+(\alpha^2_{\max}-\alpha^2_{\min})\sin^2\psi]^{1/2}\}/[\omega\sin^2\alpha(\psi)]\,d\psi \quad (7.1)$$

При интегрировании по ψ необходимо учитывать зависимость от ψ также и медленных переменных G, ω и т. д. (через зависимость их от времени). При интегрировании асимптотических уравнений (6.2) эта зависимость явно не известна, так как шаг интегрирования (6.2) принимается порядка периода колебаний α, т. е. по ψ порядка 2π. Поэтому для вычисления (7.1) необходимо задаться некоторой зависимостью медленных переменных от ψ. Можно показать, что для вычисления (7.1) с точностью $O(\varepsilon)$ достаточно приблизить медленные переменные линейной функцией ψ на интервале $(\psi_0,\ 2\pi)$ (подынтегральная функция почти везде меняется достаточно плавно). При приближении ψ к π и 2π подынтегральная функция в (7.1) начинает резко возрастать при обычно малом значении $\alpha_{\min}$. Действительно, при $\psi=\pi$, 2π подынтегральная функция есть большая величина:

$$(G-R\cos\alpha_{\min})/(\omega\sin^2\alpha_{\min})\approx(G-R+R\alpha^2_{\min}/2)/(\omega\alpha^2_{\min})=$$

$$=(\alpha_{\max}/\alpha_{\min})\,\mathrm{sign}\,(G-R)+{}^1/_2R/\omega=O(\alpha^{-1}_{\min}).$$

Чтобы не дробить шаг при приближении ψ к π и 2π, использовалась следующая процедура: на интервалах $(\psi_0,\ \pi-h_\gamma)$, $(\pi+h_\gamma,\ 2\pi-h_\gamma)$, где h_γ — шаг вычисления квадратуры, интеграл (7.1) брался численно. На интервалах $(\pi-h_\gamma,\ \pi+h_\gamma)$ и $(2\pi-h_\gamma,\ 2\pi)$ вычисления проводились аналитически с упрощением подынтегральной функции.

При вычислении интегралов медленные переменные принимались постоянными (благодаря малому времени пребывания α в окрестности $\alpha_{\min}$).

Начальные условия для решения уравнений (5.1) получены и можно проинтегрировать их на участке действия следующего возмущения, затем снова перейти к асимптотике и т. д. Таким образом, алгоритм асимптотического интегрирования системы уравнений (6.1) замкнут.

8. Основным результатом изложенного можно считать построение комбинированного метода исследования динамики полета твердого тела в атмосфере. Главной особенностью рассмотренных задач является наличие участков действия возмущений. Предложено видоизменение асимптотики быстрых колебаний, благодаря чему она становится применимой на этих участках. Для сопряжений различных асимптотик, используемых в предложенном методе, разработаны критерии перехода от одного алгоритма к другому. При некоторых дополнительных ограничениях предложенный метод обобщается на случай пространственного относительного движения тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лохов Г. М., Подзоров С. И.* К выбору кинематических параметров в уравнениях динамики твердого тела. В кн.: Аэрофизика и геокосмические исследования. М.: МФТИ, 1983, с. 99.
2. *Ярошевский В. А.* Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностроение, 1978, 168 с.
3. *Белоконов В. М., Белоконов И. В., Заболотнов Ю. М.* Ускоренный расчет траектории снижения в атмосфере неуправляемых КА с учетом их движения относительно центра масс.— Космич. исслед., 1983, т. 21, вып. 4, с. 512.
4. *Кузмак Г. Е.* Динамика неуправляемого движения КА при входе в атмосферу. М.: Наука, 1970. 347 с.
5. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
6. *Самойленко А. М.* Метод усреднения в системах с толчками.— Республ. межведомств. сб. «Матем. физика», Киев, 1971, вып. 9, с. 101.
7. *Лохов Г. М., Подзоров С. И.* Исследование влияния малых импульсных возмущений на траекторию полета твердого тела в атмосфере.— Труды VI научных чтений по космонавтике. Секц. «Прикл. небесн. мех. и управл. движением». М.: Наука, 1983, с. 189.
8. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 324 с.
9. *Лохов Г. М., Подзоров С. И.* Применение кватернионов в задачах динамики твердого тела в атмосфере.— Космич. исслед., 1984. т. 22, вып. 4, с. 626.

Москва

Поступила в редакцию 4.III.1985