МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1987

УДК 531.55:521.2

ОДНООСНАЯ МАГНИТНАЯ ОРИЕНТАЦИЯ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ

САЗОНОВ В. В.

Рассматривается движение относительно центра масс осесимметричного искусственного спутника Земли с постоянным магнитом. Предполагается, что механический момент, действующий на спутник со стороны геомагнитного поля, велик и уравнения движения содержат большой параметр. С помощью теорем существования периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром [1] исследованы периодические движения оси симметрии спутника, в которых эта ось составляет малый угол с вектором напряженности геомагнитного поля. Такие движения можно использовать для реализации режима одноосной магнитной ориентации спутника. Полученные результаты позволяют дать исчерпывающую интерпретацию результатам численных расчетов [2] [1].

1. Рассмотрим искусственный спутник Земли, представляющий собой осесимметричное твердое тело с постоянным магнитом. Полагаем, что орбита спутника круговая и неизменна в абсолютном пространстве, дипольный момент магнита параллелен оси симметрии спутника.

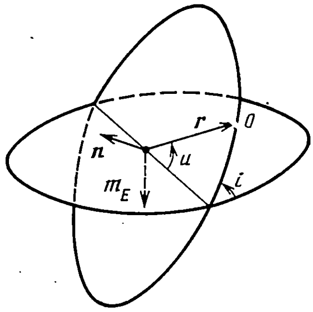
Для записи уравнений движения спутника относительно центра масс введем три правые декартовы системы координат: систему $Ox_1x_2x_3$, образованную главными центральными осями инерции спутника, орбитальную систему координат $OX_1X_2X_3$ и систему координат $OZ_1Z_2Z_3$, связанную с вектором напряженности $\mathbf{H}$ магнитного поля Земли в точке O. Ось Ox_1 совпадает с осью симметрии спутника, оси OX_3 и OX_1 направлены соответственно по нормали и трансверсали к его орбите, орты $\mathbf{e}_j$ осей OZ_j ($j=1, 2, 3$) имеют вид ($\mathbf{n}$ — орт оси OX_2):

$$\mathbf{e}_1=\mathbf{H}/|\mathbf{H}|,\quad \mathbf{e}_3=\mathbf{e}_1\times\mathbf{n}/|\mathbf{e}_1\times\mathbf{n}|,\quad \mathbf{e}_2=\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1 \qquad (1.1)$$

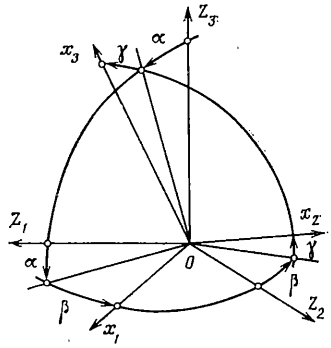
Чтобы окончательно определить систему $OZ_1Z_2Z_3$, необходимо задаться какой-либо моделью геомагнитного поля. В качестве такой модели примем поле диполя, расположенного в центре Земли и неподвижного в абсолютном пространстве. Введем обозначения: $\mathbf{m}_E$ — магнитный момент Земли, $m_E=|\mathbf{m}_E|$, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки O относительно центра Земли (фиг. 1), $r=|\mathbf{r}|=\text{const}$, $i\in(0, \pi)$ — угол между векторами $\mathbf{m}_E$ и $(-\mathbf{n})$, u — угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{n}\times\mathbf{m}_E$; способ отсчета этого угла выберем так, чтобы он был линейной возрастающей функцией времени. Если $\mathbf{m}_E$ совпадает с осью вращения Земли, то u — аргумент широты спутника, i — наклонение его орбиты. В рамках принятой модели в орбитальной системе координат $\mathbf{H}=m_Er^{-3}(\sin i\cos u,\ \cos i,\ -2\sin i\sin u)$. Здесь использована система физических единиц СГСМ. Приведенное выражение для $\mathbf{H}$ и формулы (1.1) позволяют задать ориентацию системы $OZ_1Z_2Z_3$ относительно системы $OX_1X_2X_3$. Положение системы $Ox_1x_2x_3$ по отношению к системе $OZ_1Z_2Z_3$ определим при помощи углов α, β и γ (фиг. 2). Углы α и β указывают направление оси Ox_1, угол γ задает поворот спутника вокруг этой оси.

Для записи уравнений движения будут использоваться косинус угла между осями Ox_1 и OX_3 и проекции абсолютной угловой скорости системы $OZ_1Z_2Z_3$ на оси Резаля, получающиеся из осей Ox_1, Ox_2, Ox_3 при $\gamma=0$. Эти

[1] См. также: *Сарычев В. А., Сазонов В. В., Овчинников М. Ю.* Периодические колебания спутника относительно центра масс под действием магнитного момента.— Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, 1982. № 182. (Результаты этой работы изложены в обзоре [3]).



Фиг. 1



Фиг. 2

величины обозначим соответственно h и $\omega_0\varphi_j$ ($j=1, 2, 3$), где ω_0 — угловая скорость орбитального движения. Имеют место соотношения [3]:

$$h=-(2\sin i\sin u\cos\alpha/N+\cos u\sin\alpha/N_1)\cos\beta+2\cos i\sin u\sin\beta/(NN_1),$$

$$\varphi_1=(\Phi_1\cos\alpha-\Phi_3\sin\alpha)\cos\beta+\Phi_2\sin\beta$$

$$\varphi_2=-(\Phi_1\cos\alpha-\Phi_3\sin\alpha)\sin\beta+\Phi_2\cos\beta,$$

$$\varphi_3=\Phi_1\sin\alpha+\Phi_3\cos\alpha$$

$$N=\sqrt{1+3\sin^2 i\sin^2 u},\quad N_1=\sqrt{1+3\sin^2 u}$$

$$\Phi_1=\frac{3\cos i(1+\sin^2 u)}{NN_1^2},\qquad \Phi_2=\frac{3\sin i(1+\sin^2 u)}{NN_1},\qquad \Phi_3=-\frac{3\sin 2i\sin 2u}{4N^2N_1}$$

Вращательное движение рассматриваемого спутника под действием магнитного и гравитационного моментов можно описать уравнениями Лагранжа второго рода с функцией Лагранжа

$$L={}^1/_2\lambda(\alpha'\sin\beta+\gamma'+\varphi_1)^2+{}^1/_2(\alpha'\cos\beta+\varphi_2)^2+$$
$$+{}^1/_2(\beta'+\varphi_3)^2+{}^3/_2(1-\lambda)h^2+\mu^2N\cos\alpha\cos\beta$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по u, эта величина считается независимой переменной: $\lambda=A/C$, $\mu^2=m_cm_E/C\omega_0^2r^3$, где A — осевой, C — экваториальный главные центральные моменты инерции спутника, m_c — дипольный момент магнита спутника. Полагаем, что $\mu\gg 1$, т. е. действующий на спутник магнитный момент велик.

Функция Лагранжа не содержит γ. Исключив эту переменную из анализа методом Рауса, придем к уравнениям

$$\frac{d}{du}\frac{\partial R}{\partial\alpha'}-\frac{\partial R}{\partial\alpha}=0,\qquad \frac{d}{du}\frac{\partial R}{\partial\beta'}-\frac{\partial R}{\partial\beta}=0 \tag{1.2}$$

$$R={}^1/_2(\alpha'^2\cos^2\beta+\beta'^2)+\alpha'(p_\gamma\sin\beta+\varphi_2\cos\beta)+\beta'\varphi_3-{}^1/_2p_\gamma^2/\lambda+$$
$$+p_\gamma\varphi_1+{}^1/_2(\varphi_2^2+\varphi_3^2)+{}^3/_2(1-\lambda)h^2+\mu^2N\cos\alpha\cos\beta$$
$$p_\gamma=\partial L/\partial\gamma'=\lambda(\alpha'\sin\beta+\gamma'+\varphi_1)=\mathrm{const}$$

Постоянная p_γ/λ представляет собой проекцию абсолютной угловой скорости спутника на его ось симметрии Ox_1. Уравнения (1.2) описывают движение этой оси относительно системы координат $OZ_1Z_2Z_3$. Эти уравнения не учитывают суточного вращения Земли и справедливы только на коротком интервале времени — не более нескольких часов. Достоинством этих уравнений является то, что независимая переменная u входит в них периодически с периодом π (в силу π-периодичности по u функций h^2, Φ_1, Φ_2 и Φ_3). Если период обращения спутника по орбите $2\pi/\omega_0\leqslant 100$ мин, то устойчивые π-периодические решения уравнений (1.2) могут служить хорошим приближением истинных движений спутника на интервалах времени порядка орбитального периода. Построив такие решения для различных значений i, можно получить представление об установившихся движениях спутника на интервале времени порядка суток.

Дальше доказывается существование π-периодических решений системы (1.2) $\alpha(u,\mu)$, $\beta(u,\mu)$, определенных для значений μ из некоторого неограниченного множества $I_\mu \subset (0, +\infty)$ и удовлетворяющих при $\mu \to +\infty$, $\mu \in I_\mu$ условиям $\alpha(u, \mu) \to 0$, $\beta(u, \mu) \to 0$, $\alpha'(u, \mu) \to 0$, $\beta'(u, \mu) \to 0$. Исследуется зависимость этих решений от параметров i и p_γ. Движения спутника, описываемые такими решениями, можно использовать для реализации режима одноосной магнитной ориентации [2, 3].

2. Построение периодических решений системы (1.2) начнем с одного важного частного случая. Если в (1.2) $p_\gamma=0$, $i=\pi/2$ и при некотором u_0 решение этой системы удовлетворяет соотношениям $\beta'=\sin\beta=0$, то оно будет удовлетворять им при любом u. Такое решение описывает движение оси Ox_1 в плоскости орбиты и определяется уравнением

$$\alpha''+\mu^2 N_1 \sin\alpha = \frac{3(1-\lambda)}{N_1^2}\left(\frac{1-5\sin^2 u}{2}\sin 2\alpha + \sin 2u \cos 2\alpha\right) + \frac{6\sin 2u}{N_1^4} \tag{2.1}$$

которое является частным случаем дифференциального уравнения второго порядка с большим параметром, изучавшегося в [1]. Сформулируем доказанную в [1] теорему. Рассмотрим T-периодическое по t уравнение

$$x^{\cdot\cdot}+\mu^2 F(t, x) = f(t, x, x^{\cdot}) \tag{2.2}$$

где точка означает дифференцирование по t, μ — положительный параметр. Пусть уравнение $F(t, x)=0$ имеет T-периодический корень $x=\varphi(t)$. Будем искать T-периодические решения уравнения (2.2), определенные при достаточно большом μ и близкие к $\varphi(t)$. Полагаем, что функции $F(t, x)$, $f(t, x, x^{\cdot})$ и $\varphi(t)$ достаточно гладко зависят от своих аргументов и $p(t)=\partial F(t, x)/\partial x|_{x=\varphi(t)}>0$ $(0\leqslant t\leqslant T)$. Положим

$$a = -\frac{1}{4b}\int_0^T \frac{\partial f(t, x, x^{\cdot})}{\partial x^{\cdot}}\bigg|_{\substack{x=\varphi(t)\\ x^{\cdot}=\varphi^{\cdot}(t)}} dt, \qquad b = \frac{1}{2}\int_0^T p^{1/2}(t)\,dt$$

$$\varepsilon_0 = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 ab}$$

Для произвольного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ рассмотрим неограниченное множество $I(\varepsilon)=\{\mu\colon \mu\geqslant 0,\ \operatorname{sh}^2 ab+\sin^2 \mu b \geqslant \varepsilon^2\}$, которое при $a\neq 0$ и $0<\varepsilon<|\operatorname{sh} ab|$ совпадает с интервалом $[0, +\infty)$, а при $a=0$ состоит из бесконечного числа непересекающихся отрезков длины $(\pi-2\arcsin\varepsilon)/b$.

Теорема 1 [1]. Для любого $\varepsilon\in(0, \varepsilon_0)$ существуют такие положительные числа M, C_1 и C_2, что при $\mu\geqslant M$, $\mu\in I(\varepsilon)$ уравнение (2.2) имеет единственное T-периодическое решение $x_*(t, \mu)$, удовлетворяющее неравенствам $|x_*(t, \mu)-\varphi(t)|\leqslant C_1\mu^{-2}$, $|x_*^{\cdot}(t, \mu)-\varphi^{\cdot}(t)|\leqslant C_2\mu^{-1}$ $(0\leqslant t\leqslant T)$.

Замечание. Если $a=0$, то M, C_1 и $C_2 \to +\infty$ при $\varepsilon\to 0$. Если $a\neq 0$, то величины M, C_1 и C_2 можно выбрать не зависящими от ε (но тогда M, C_1 и $C_2\to+\infty$ при $a\to 0$). Полагая $\varepsilon<|\operatorname{sh} ab|$, найдем, что в таком случае решение $x_*(t, \mu)$ будет определено при любом $\mu\geqslant M$.

Уравнение (2.2) можно интерпретировать как уравнение вынужденных колебаний механической системы с одной степенью свободы в случае, когда собственная частота системы много больше внешней. Величину $2a$ можно считать обобщенным коэффициентом трения этой системы для движения $x\approx\varphi(t)$. При некоторых значениях μ в системе возможен резонанс. Такие величины исключаются из анализа условием $\mu\in I(\varepsilon)$. Если $a\neq 0$, то, рассматривая достаточно большие значения μ, это условие можно опустить; при $a=0$ резонанс в системе может возникнуть на любом достаточно удаленном от нуля отрезке оси μ, длина которого больше π/b.

Применим теорему 1 к уравнению (2.1). Здесь $\varphi(t)\equiv 0$, $a=0$, $\varepsilon_0=1$:

$$b=\int_0^{\pi/2} N_1^{1/2}(u)\,du\approx 1{,}94, \qquad I(\varepsilon)=\{\mu : \mu\geqslant 0, |\sin\mu b|\geqslant\varepsilon\}$$

Для любого $\varepsilon\in(0, 1)$ существуют такие положительные числа M, C_1 и C_2, что при $\mu\geqslant M$, $\mu\in I(\varepsilon)$ уравнение (2.1) имеет единственное π-периодическое решение $\alpha_*(u, \mu)$, допускающее оценки $|\alpha_*(u, \mu)|\leqslant C_1\mu^{-2}$, $|\alpha_*'(u, \mu)|\leqslant C_2\mu^{-1}$ $(0\leqslant u\leqslant\pi)$.

В силу единственности такого решения и инвариантности уравнения (2.1) относительно преобразования $u\to -u$, $\alpha\to-\alpha$ решение $\alpha_*(u, \mu)$ нечетно и задается краевыми условиями $\alpha(0)=\alpha(\pi/2)=0$. Результаты численного исследования такой краевой задачи для уравнения (2.1) при $\lambda=1$ описаны в [2], при $\lambda=0{,}5$ — в [3]. Как оказалось, рассматриваемая задача имеет решения, удовлетворяющие при $\mu\geqslant 3$ и $|\sin\mu b|\geqslant 0{,}2$ условию $\alpha=O(\mu^{-2})$. В окрестности точек $\mu=\pi k/b$ ($k=2, 3, \ldots$) на оси μ эти решения ветвятся и переходят в решения, имеющие большую (~ 1) амплитуду и ярко выраженную доминирующую гармонику с частотой $2k$, т. е. наблюдаются резонансы между орбитальным движением спутника и его собственными колебаниями в магнитном поле. Теорема 1 находится в полном согласии с расчетами [2, 3].

3. Существование π-периодических решений системы (1.2) при произвольных i и p_γ также следует из результатов [1]. Приведем теорему. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$A_0(q)q^{\cdot\cdot}+\mu^2\partial\Pi(q)/\partial q=f(t, q, q^{\cdot}) \tag{3.1}$$

Здесь точка означает дифференцирование по t; q и $f\in R^n$, $\Pi\in R^1$, $A_0(q)$ — симметричная положительно-определенная матрица порядка n, μ — положительный параметр; f периодически зависит от t с периодом T. Функции, входящие в (3.1), будем считать достаточно гладкими и предположим, что $\partial\Pi(q)/\partial q|_{q=0}=0$ и матрица $\partial^2\Pi(q)/\partial q^2|_{q=0}$ положительно определена. Исследуем вопрос о существовании T-периодических решений системы (3.1) $q(t, \mu)$, определенных для значений μ из некоторого неограниченного множества $I_\mu\subset(0, +\infty)$ и удовлетворяющих при $\mu\to+\infty$, $\mu\in I_\mu$ условиям $q(t, \mu)\to 0$, $q^{\cdot}(t, \mu)\to 0$. В случае $n=1$ этот вопрос решается теоремой 1.

Построим множество I_μ. С этой целью рассмотрим T-периодическую систему

$$A_0(0)q^{\cdot\cdot}-B(t)q^{\cdot}+\mu^2\frac{\partial^2\Pi(q)}{\partial q^2}\bigg|_{q=0}q=0, \quad B(t)=\frac{\partial f(t, q, q^{\cdot})}{\partial q^{\cdot}}\bigg|_{q=q^{\cdot}=0} \tag{3.2}$$

Так как матрицы $A_0(0)$ и $\partial^2\Pi(q)/\partial q^2|_{q=0}$ симметричны и положительно определены, то соответствующие им квадратичные формы можно одновременно привести к каноническому виду. Иными словами, существует невырожденная матрица S порядка n, такая, что

$$S^{\mathrm{T}}A_0(0)S=E_n, \qquad S^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2\Pi(q)}{\partial q^2}\bigg|_{q=0}S=\mathrm{diag}(\omega_1^2E_{n_1}, \ldots, \omega_r^2E_{n_r}) \tag{3.3}$$

Здесь E_k — единичная матрица порядка k, $n_j>0$ ($j=1, 2, \ldots, r$), $n_1+\ldots+n_r=n$, $0<\omega_1<\omega_2<\ldots<\omega_r$. Сделав в (3.2) замену переменной $q\to Sq$, далее будем считать, что матрицы $A_0(0)$ и $\partial^2\Pi(q)/\partial q^2|_{q=0}$ в этой системе совпадают с правыми частями соответствующих формул (3.3).

Матрицу $B(t)$ представим в блочной форме: $B(t)=(B_{jk}(t))_{j,k=1}^{r}$, где блок $B_{jk}(t)$ имеет размеры $n_j\times n_k$. Решим начальные задачи $Y_j^{\cdot}={}^1/_2B_{jj}(t)\times Y_j$, $Y_j(0)=E_{n_j}$ и введем матрицы $H_j=T^{-1}\operatorname{Ln}Y_j(T)$ ($j=1, \ldots, r$).

Будем считать, что все H_j действительны. Выбор действительных $\operatorname{Ln}Y_j(T)$ всегда возможен, если уравнение (3.1) описывает механическую систему, допускающую функцию Лагранжа [1]. Именно такой системой является рассматриваемый спутник.

Введем определение. Пусть P — произвольная матрица порядка k с собственными числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Введем функцию

$$\Delta(k, P, \mu)=|\det[\operatorname{sh}{}^1/_2T(P+\mu E_k\sqrt{-1})]|=$$

$$=\left\{\prod_{j=1}^{r}[\operatorname{sh}^2({}^1/_2T\operatorname{Re}\lambda_j)+\sin^2{}^1/_2T(\mu+\operatorname{Im}\lambda_j)]\right\}^{1/2}$$

Для произвольного $\varepsilon>0$ рассмотрим множество $I(\varepsilon)=\{\mu:\ \mu\geqslant 0,\ \Delta(n_j, H_j, \mu\omega_j)\geqslant\varepsilon\ (j=1,\ldots,r)\}$.

Можно указать такое $\varepsilon_0>0$, что при $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0)$ множество $I(\varepsilon)$ будет неограниченным [1].

Теорема 2 [1]. Для любого $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0)$ существуют такие положительные числа M, C_1 и C_2, что при $\mu\geqslant M$, $\mu\in I(\varepsilon)$ система (3.1) имеет единственное T-периодическое решение $q_*(t,\ \mu)$, удовлетворяющее неравенствам ($\|\cdot\|$ евклидова норма):

$$\|q_*(t,\ \mu)\|\leqslant C_1\mu^{-2},\quad \|q_*^{\cdot}(t,\ \mu)\|\leqslant C_2\mu^{-1}\quad (0\leqslant t\leqslant T) \tag{3.4}$$

Механический смысл условия $\mu\in I(\varepsilon)$ состоит в следующем. Рассмотрим для уравнения (3.2) периодическую краевую задачу $q(0)=q(T)$, $q^{\cdot}(0)=q^{\cdot}(T)$. Можно доказать, что значения μ, при которых эта задача имеет нетривиальные решения, приближенно определяются уравнением $\prod\limits_{j=1}^{r}\Delta(n_j, H_j, \mu\omega_j)=0$. Точность здесь тем выше, чем больше μ. Таким образом, условие $\mu\in I(\varepsilon)$ исключает из анализа периодических решений системы (3.1) резонансы между медленными (с частотой $2\pi/T$) и быстрыми (с частотами $\mu\omega_1,\ldots,\mu\omega_r$) колебаниями.

Применим теорему 2 к уравнениям (1.2). Положив $q=(\alpha,\ \beta)^T$, $A_0(q)=\mathrm{diag}(\cos^2\beta,\ 1)$, $\Pi(q)=-\cos\alpha\cos\beta$, введя новую независимую переменную

$$t=\int\limits_0^u N^{1/2}(u)\,du$$

и определив нужным образом функцию $f(t,\ q,\ q^{\cdot})$, систему (1.2) можно привести к виду (3.1). В данном случае

$$T=T(i)=\int\limits_0^\pi N^{1/2}(u)\,du,\qquad A_0(0)=\left.\frac{\partial^2\Pi(q)}{\partial q^2}\right|_{q=0}=E_2$$

$$B(t)=\left\|\begin{matrix} g(t) & -p(t)\\ p(t) & g(t)\end{matrix}\right\|,\qquad g(t)=-{}^1/_2N'N^{-1/2},\qquad p(t)={}^1/_2N^{-1/2}(p_\gamma-2\Phi_1)$$

причем N, N' и Φ_1 должны быть выражены в функции t. Таким образом, $r=1$. Решение матричной начальной задачи $2Y^{\cdot}=B(t)Y$, $Y(0)=E_2$ дается формулами

$$Y(t)=N^{-1/4}\left\|\begin{matrix}\cos\psi & -\sin\psi\\ \sin\psi & \cos\psi\end{matrix}\right\|,\qquad \psi=\int\limits_0^t p(t)\,dt$$

Отсюда находим

$$H=\frac{1}{T}\,\mathrm{Ln}\,Y(T)=\left\|\begin{matrix}0 & -\nu\\ \nu & 0\end{matrix}\right\|,\qquad \nu=\frac{\pi p_\gamma}{2T}-\frac{2}{T}\int\limits_0^{\pi/2}\Phi_1(u)\,du$$

Множество $I(\varepsilon)$ имеет вид $I(\varepsilon)=\{\mu:\ \mu\geqslant 0,\ |\sin{}^1/_2T(\mu+\nu)\sin{}^1/_2T(\mu-\nu)|\geqslant\varepsilon\}$. Положим $\varepsilon_0={}^1/_2(1+|\cos\nu T|)$. При $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0)$ множество $I(\varepsilon)$ не пусто и не ограничено, при $0<\varepsilon\ll\varepsilon_0$ оно представляет собой интервал $[0,\ +\infty)$, из которого удалены малые окрестности точек $\mu=\pm\nu+2\pi k/T$ ($k=0,\ 1,\ 2,\ldots$). Согласно теореме 2, для любого $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0)$ существуют такие положительные числа M, C_1 и C_2, что при $\mu\geqslant M$, $\mu\in I(\varepsilon)$ система (3.1), выведенная из уравнений (1.2), имеет единственное T-периодическое решение $q_*(t,\ \mu)$, удовлетворяющее неравенствам (3.4).

Так как эта система содержит параметры i и p_γ, то ее решение $q_*(t,\ \mu)$ и постоянные T, ν, C_1, C_2 и M также зависят от этих величин. Характер зависимости в некоторой степени поясняется следующим утверждением, доказательство которого незначительно отличается от доказательства теоремы 2. Введем множество $I^\circ(\varepsilon)=\{(i,\ p_\gamma,\ \mu):\ |i-{}^1/_2\pi|\leqslant\delta_1,\ |p_\gamma|\leqslant\delta_2,$

$\mu\geqslant 0$, $|\sin {}^1/_2T(\mu+\nu)\sin {}^1/_2T(\mu-\nu)|\geqslant\varepsilon\}$, где $0<\delta_1<{}^1/_2\pi$, $0<\delta_2$. Пусть $\varepsilon_0^*=$ $=\max {}^1/_2(1+|\cos\nu T|)$ $(|i-{}^1/_2\pi|\leqslant\delta_1$, $|p_\gamma|\leqslant\delta_2)$. Тогда при $\varepsilon\in(0, \varepsilon_0^*)$ множество $I^\circ(\varepsilon)$ не пусто и не ограничено. Для любого $\varepsilon\in(0, \varepsilon_0^*)$ существуют такие положительные числа M°, C_1° и C_2°, что при $(i, p_\gamma, \mu)\in I^\circ(\varepsilon)$, $\mu\geqslant M^\circ$ система (3.1), полученная из уравнений (1.2), имеет единственное $T(i)$-периодическое решение $q_*(t, i, p_\gamma, \mu)$, удовлетворяющее неравенствам $\|q_*(t, i, p_\gamma, \mu)\|\leqslant C_1^\circ\mu^{-2}$, $\|q_*^{\cdot}(t, i, p_\gamma, \mu)\|\leqslant C_2^\circ\mu^{-1}$ $(0\leqslant t\leqslant T(i))$. Если в какой-либо точке (i, p_γ, μ) существуют оба указанных решения, то они совпадают.

Система (1.2) инвариантна относительно преобразования $u\to-u$, $\alpha\to$ $\to-\alpha$, $\beta\to\beta$. Используя этот факт, можно доказать, что в решении $q_*(t, \mu)=(\alpha_*(t, \mu), \beta_*(t, \mu))^T$ первая компонента — нечетная, а вторая — четная функции t. Следовательно, $q_*(t, \mu)$ удовлетворяет краевым условиям $\alpha(0)=\beta^{\cdot}(0)=\alpha(T/2)=\beta^{\cdot}(T/2)=0$. Соответствующее периодическое решение системы (1.2) можно найти решая для этой системы краевую задачу $\alpha(0)=\beta'(0)=\alpha(\pi/2)=\beta'(\pi/2)=0$. Результаты численного исследования такой задачи описаны в [3]. Как оказалось, рассматриваемая задача имеет решения, удовлетворяющие при $\mu\geqslant 3$ и $|\sin {}^1/_2T(\mu+\nu)\sin {}^1/_2T(\mu-\nu)|\geqslant 0{,}2$ условию $q=O(\mu^{-2})$. В окрестности поверхностей $\mu=2\pi k/T\pm\nu$ $(k=2, 3,\ldots)$ в пространстве $R^3(i, p_\gamma, \mu)$ эти решения ветвятся и переходят в решения, имеющие большую амплитуду и доминирующую гармонику с частотой $2k$. Иными словами, наблюдаются резонансы между орбитальным движением спутника и его собственными колебаниями в магнитном поле. Результаты расчетов [3] служат хорошей иллюстрацией теоремы 2.

В заключение сделаем замечание о гладкости найденных решений. Как следует из доказательства теорем 1 и 2 в [1], все найденные решения дважды непрерывно дифференцируемы по независимой переменной и непрерывны по параметрам, хотя, по-видимому, на самом деле эти решения являются бесконечно дифференцируемыми функциями всей совокупности своих аргументов.

Автор благодарит В. А. Сарычева за полезные обсуждения при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сазонов В. В.* Периодические решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром.– ПММ, 1983, т. 47, вып. 5, с. 707–719.
2. *Хентов А. А.* Влияние магнитного и гравитационного полей Земли на колебания спутника вокруг своего центра масс.– Космич. исслед., 1967, т. 5, вып. 4, с. 554–572.
3. *Сарычев В. А., Овчинников М. Ю.* Магнитные системы ориентации искусственных спутников Земли.– В кн.: Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. М.: ВИНИТИ, 1985, т. 23. 103 с.

Москва

Поступила в редакцию
4.XI.1985