

**ПРОЕКТИРОВАНИЕ ФЕРМ МИНИМАЛЬНОЙ МАССЫ
МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОНЦЕПЦИЙ АППРОКСИМАЦИИ**

КАЛИНИН И. Н., НИКИШИН С. С.

Показывается возможность оптимизации многоэлементных конструкций методами математического программирования с использованием существующих концепций аппроксимации [1, 2] и оценивается эффективность такого подхода по целевой функции и вычислительным затратам. Исследуются упругие, статически неопределимые ферменные конструкции, находящиеся под действием нескольких независимых систем статических нагрузок при ограничениях по напряженному состоянию, перемещениям узлов и геометрическим ограничениям на варьируемые переменные. Геометрическая структура конструкций считается неизменной, в качестве параметров проектирования взяты площади поперечных сечений стержней.

1. Математически задача ставится следующим образом. Требуется определить площади поперечных сечений стержней x_i^* ($i=1, n$) из условий минимума массы конструкции

$$W(x^*) = \min_x \rho \sum_{i=1}^n l_i x_i$$

при ограничениях по прочности в стержнях, по перемещениям во всех неопорных узлах и на пределы изменения переменных

$$\begin{aligned} &[(\sigma_{ik}(x) - [\sigma]_i^+) / [\sigma]_i^+] \leq 0, \quad [(\sigma_{ik}(x) - [\sigma]_i^-) / [\sigma]_i^-] \leq 0 \quad (i=\overline{1, n}, k=\overline{1, p}) \\ &[(u_{jh}(x) - [u]_j^+) / [u]_j^+] \leq 0, \quad [(u_{jh}(x) - [u]_j^-) / [u]_j^-] \leq 0 \quad (j=\overline{1, m}, k=\overline{1, p}) \\ &a_i \leq x_i \leq b_i \quad (i=\overline{1, n}). \end{aligned}$$

Здесь W — масса фермы, ρ — плотность материала, l_i — длина i -го стержня, σ_{ik} — напряжение в i -м стержне под действием k -го варианта нагрузки, $[\sigma]_i^+$ и $[\sigma]_i^-$ — допускаемые напряжения соответственно на растяжение и сжатие, u_{jh} — перемещение по j -й степени свободы под действием k -го варианта нагрузки, $[u]_j^+$ и $[u]_j^-$ — допускаемые перемещения j -й степени свободы соответственно в положительном и отрицательном направлениях координатных осей, m — общее число степеней свободы, p — число независимых систем нагрузок, действующих на конструкцию, a_i и b_i — нижний и верхний пределы изменения переменной с номером i .

Рассмотрим один из наиболее часто используемых способов аппроксимации функций ограничений. Каждое из ограничений по прочности и по перемещениям представляется в виде [1, 3–5]:

$$f_{ik}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{E_{ij}^k(x)}{x_i} - f_j^{*k} \leq 0 \quad (1)$$

где j — номер ограничения, f_j^{*k} — предельное значение для напряжений или перемещений в ограничении с номером j .

Функции $E_{ij}^k(x)$ для конструкций типа ферм могут быть получены следующим образом. Согласно теореме Ветти, для линейно-деформируемых упругих систем [1, 3–5] перемещения узлов ферм могут быть представлены в виде

$$u_{jh} = \sum_{i=1}^n \frac{P_{ih} P_{ij} l_i}{E_i x_i} \quad (j=\overline{1, m}, k=\overline{1, p})$$

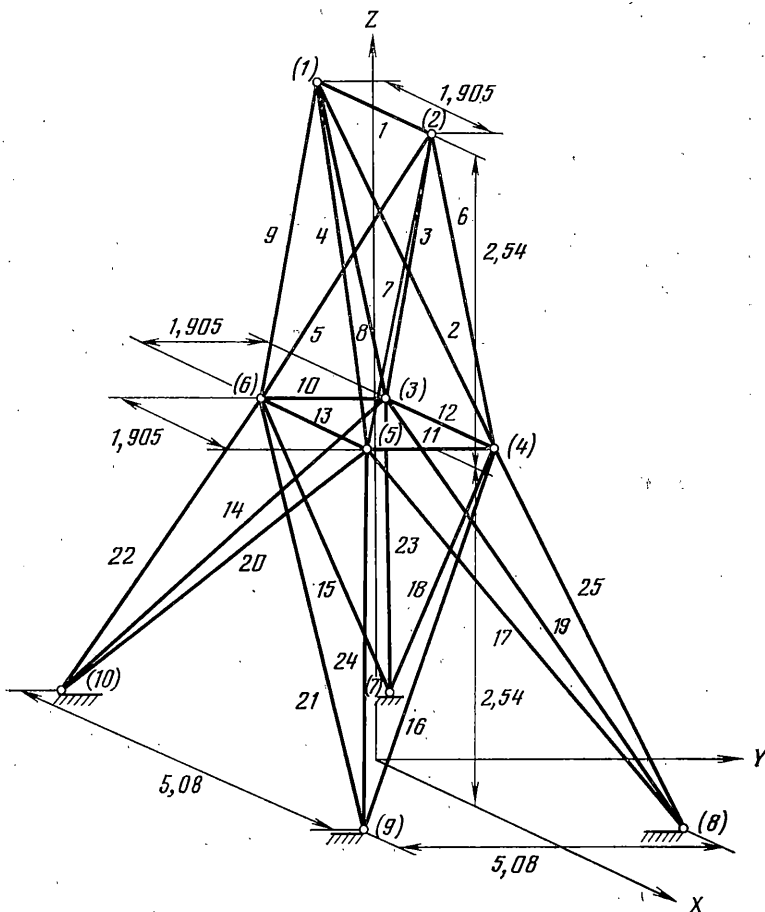
где P_{ih} и P_{ij} — внутренние усилия в i -м стержне соответственно от k -го варианта нагружения и от единичной силы, приложенной в направлении j -го перемещения в соответствующем узле, E_i — модуль упругости i -го стержня. Напряжения записываются в виде

$$\sigma_{ik} = \sum_{r=1}^n \frac{1}{l_r E_r x_r} \left(E_i l_r P_{rh} \sum_{j=1}^m A_{ij} P_{rj} \right) \quad (i=\overline{1, n}, k=\overline{1, p})$$

где $A = [A_{ij}]$ — матрица косинусов углов наклона продольной оси стержней в общей системе координат.

Таким образом, функции $E_{ij}^k(x)$ для ограничений по перемещениям и напряжениям в выражении (1) имеют соответственно вид

$$E_{ij}^k = \frac{P_{ih} P_{ij} l_i}{E_i}, \quad E_{r_i}^k = \frac{E_i l_r P_{rh}}{E_r l_i} \sum_{j=1}^m A_{ij} P_{rj}$$



Фиг. 1

Для линейно-упругих систем с фиксированной геометрией и нагрузкой, независимой от параметров проектирования, описанный способ аппроксимации представляет собой аппроксимацию первого порядка перемещений и напряжений в обратных переменных $1/x_i$ [3–5].

Для статически определимых систем [3, 4] коэффициенты E_{ij}^k , E_{ri}^k являются постоянными, а для статически неопределимых конструкций они зависят от варьируемых переменных и поэтому необходимо уточнение их значений в процессе оптимизации.

Очевидно, что при численном расчете конструкций методом конечных элементов величины P_{ij} , P_{ir} , необходимые для построения аппроксимирующих функций, определяются за один расчет конструкции. Именно за счет этого достигается эффективность по вычислительным затратам подходов, использующих описанный способ аппроксимации функций ограничений.

2. Вычислительный алгоритм поиска оптимальных параметров строился следующим образом. В начальной точке поиска выполнялся полный расчет конструкции и определялись значения E_{ij}^k , E_{ri}^k . При фиксированных E_{ij}^k , E_{ri}^k с использованием ограничений вида (1) осуществлялся поиск оптимальных параметров одним из вариантов комбинированного алгоритма прямого поиска в рамках метода внешних штрафных функций для учета ограничений [6, 7], позволяющим использовать специфику рассматриваемых задач для сокращения объема вычислений. В полученной точке снова проводился полный расчет и повторялся процесс оптимизации при вновь полученных значениях E_{ij}^k , E_{ri}^k и так далее до обеспечения сходимости процесса.

В качестве примеров были выбраны конструкции, по которым в литературе имеется обширный сравнительный материал.

Ферма из 25 стержней (фиг. 1) рассматривалась в трех вариантах. В таблице приведены значения расчетных нагрузок. Через N_i обозначается номер случая нагружения, N_n – номер узла, N_b – количество стержней в ферме, N_v – номер варианта исходных данных, числовые значения нагрузки даны в кН.

В первом варианте ($N_v=1$) исходные данные следующие: $E=6,895 \cdot 10^4$ МПа, $\rho=2,717 \cdot 10^3$ кг/м³, $[\sigma]^+=276,0$ МПа, $[u]^\pm=\pm 0,889 \cdot 10^{-2}$ м, $a_i=0,0645 \cdot 10^{-4}$ м². Число переменных редуцировано до восьми. Стержни распределены по группам жесткости следующим образом: 1; 3, 4, 6, 9; 2, 5, 7, 8; 12, 13; 10, 11; 18, 19, 20, 21; 14, 15, 16, 17;

N_l	N_n	P_x	P_y	P_z
$N_b = 25, N_v = 1$				
1	1; 2	44,5	-4,45; 0	-22,25
2	3; 4	0	-2,225	0
	1; 2	±89	0	-22,25
$N_b = 25, N_v = 2$				
1	1; 2	-44,482	0; 4,4482	-22,241
2	5; 6	0	2,2241	0
	1; 2	±88,964	0	-22,241
$N_b = 25, N_v = 3$				
1	1; 2	4,45; 0	44,5	-22,25
	3; 6	2,225	0	0
2	1; 2	0; -4,45	44,5	-22,25
	4; 5	-2,225	0	0
3	1; 2	4,45; 0	-44,5	-22,25
	3; 6	22,25; 2,225	0	0
4	1; 2	0; -44,5	-44,5	-22,25
	4; 5	-2,25	0	0
5	1; 2	0	±89,0	-22,25
6	1; 2	0	∓89,0	-22,25
$N_b = 72$				
1	1	22,5	22,5	-22,5
2	1; 2; 3; 4	0	0	-22,25

22, 23, 24, 25. Для каждой группы жесткости установлены свои допускаемые напряжения на сжатие (МПа): -242,0; -79,8; -119,5; -242,0; -242,0; -46,6; -48,0; -76,3.

Для данной постановки в работах [8, 9] получены проекты с массами 246,26 и 242,75 кг. Число перерасчетов конструкции при этом равно 10 и 7 соответственно. В настоящей работе из начальной точки $x_i = 645,0 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ($i=1,25$) за 10 прямых расчетов найдено решение фермы массой 243,13 кг.

Кроме того, проводился следующий эксперимент. Произвольно формировалось десять различных начальных точек поиска ($0,01 \text{ м}^2 \leq x_i \leq 0,08 \text{ м}^2$), из которых выполнялся процесс оптимизации без какого-либо изменения значений управляющих параметров алгоритмов.

Массы проектов получились в пределах 237,25÷250,37 кг при числе пересчетов конструкции от 3 до 23. Лучший результат по массе равен 237,25 кг; площади поперечных сечений элементов в этом случае 4,465; 17,854; 10,099; 0,0645; 0,0645; 5,943; 6,016; 24,306 (10^{-4} м^2).

Для второго варианта ($N_b=2$) конструкции использовались следующие исходные данные: $E=6,895 \cdot 10^4$ МПа, $\rho=2,715 \cdot 10^3$ кг/м³, $[\sigma] = \pm 275,8$ МПа, $[u] = \pm 0,889 \cdot 10^{-2}$ м, $a_i = 0,0645 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$.

В таблице приводятся две расчетные системы нагрузок, число переменных проектирования - 25, ограничения на напряжения, перемещения и снизу на величины варьируемых параметров.

В результате решения после 7 пересчетов конструкции получен проект с массой в 244,57 кг. Приводимые в [10] характеристики оптимального проекта по нескольким литературным источникам для разного числа переменных проектирования находятся в пределах 242,44-264,54 кг при числе итераций от 6 до 16.

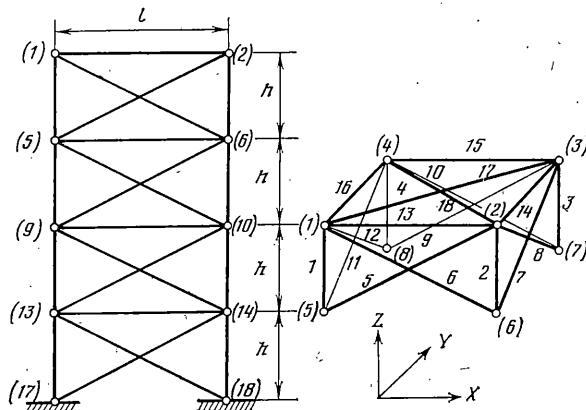
В третьем варианте ($N_v=3$, $E=6,898 \cdot 10^4$ МПа, $\rho=2,71 \cdot 10^3$ кг/м³, $[\sigma] = \pm 275,9$ МПа, $[u] = \pm 0,889 \cdot 10^{-2}$ м, $a_i = 0,645 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$) на конструкцию действовало шесть независимых расчетных систем нагрузок (таблица). Из начальной точки $x_i = 645 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ($i=1,25$) после 18 пересчетов получен проект с массой 251,03 кг.

Исследовалась ферма, состоящая из 72 стержней (фиг. 2), при следующих данных: $E=6,895 \cdot 10^4$ МПа, $\rho=2,717 \cdot 10^3$ кг/м³, $[\sigma] = \pm 172,4$ МПа, $a_i = 0,645 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, $l = l_1 = 3,048$ м, $h_j = 1,524$ м ($j=1,4$), ограничения на перемещения узлов 1-4 в направлениях $x, y: [u] = \pm 0,635 \cdot 10^{-2}$ м. В таблице рассматриваются две независимые расчетные нагрузки.

За счет симметрии число независимых переменных редуцировано до 16: первые четыре группы жесткости состоят из стержней: 1, 2, 3, 4; 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12; 13, 14, 15, 16; 17, 18; последующие группы получаются циклическим повторением номеров стержней с увеличением на 18.

Так же как и для предыдущей задачи, для проверки надежности алгоритмов оптимизации производился поиск из десяти различных случайных начальных точек поиска ($0,01 \text{ м}^2 \leq x_i \leq 0,08 \text{ м}^2$) без изменения значений управляющих параметров.

Были получены проекты с массами в пределах 172,74-186,89 кг (в девяти точках масса не превышала значения 177,18 кг) при числе пересчетов конструкции от 3 до 27.



Фиг. 2

Лучший проект имеет характеристики: массу 172,74 кг, число пересчетов 27, значения варьируемых переменных: 1,021; 3,608; 2,757; 2,520; 3,206; 3,743; 0,645; 0,645; 8,857; 3,145; 0,645; 0,645; 14,509; 3,168; 0,645; 0,645 (10^{-4} м^2).

Для сравнения укажем, что методами критериев оптимальности получен проект с массой 172,66 кг после десяти пересчетов конструкции.

С целью увеличения размерности задачи путем избавления от симметрии была заменена вторая расчетная нагрузка на следующую (соответственно в первых четырех узлах): $P_{1z} = -8,9 \text{ кН}$, $P_{2z} = -17,8 \text{ кН}$, $P_{3z} = -26,7 \text{ кН}$, $P_{4z} = -35,6 \text{ кН}$. Размерность вектора искомых переменных увеличивалась до 72.

Из начальной точки поиска $x_i = 645 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ($i = \overline{1,72}$) после 16 пересчетов конструкции получен проект с массой 153,01 кг. Отметим, что с помощью других алгоритмов, не использующих концепций аппроксимации и применяющих специальный подбор начальной точки поиска, был получен лучший проект массой 146,51 кг, но при значительно больших затратах.

Предпринималась попытка определения оптимальных параметров фермы из 200 стержней [10], однако несмотря на многочисленные вариации начальных точек поиска, достиг результатов, опубликованных ранее в литературе, с удовлетворительной точностью не удалось. Специально проведенные эксперименты по повышению надежности работы используемого алгоритма безусловной оптимизации (подбор управляющих параметров, включение процедур случайного поиска в схему алгоритма и т. д.) позволяют с высокой степенью вероятности утверждать, что неудача в решении этой задачи предопределяется самой схемой линеаризации задачи и итерационного уточнения.

Таким образом, использование концепций аппроксимации в рамках применения методов математического программирования позволяет создать эффективные по числу обращений к полному расчету конструкции алгоритмы оптимизации. При этом наблюдается высокая надежность по начальным точкам поиска (в отличие от алгоритмов критериев оптимальности) и, в большинстве случаев, точности решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хот Н. С., Берке Л., Венкайя В. Б. Сравнение алгоритмов условий оптимальности, используемых при проектировании конструкций минимального веса.— Ракет. техн. и космонавтика, 1979, т. 17, № 2, с. 69—80.
2. Шмит Л. А. м.л., Фарши Б. Некоторые концепции аппроксимации для синтеза конструкций.— Ракетн. техн. и космонавтика, 1974, т. 12, № 5, с. 145—155.
3. Fleury C., Geradin M. Optimality criteria and mathematical programming in Structural Weight optimization.— Comp. and Struct., 1978, v. 8, No. 4, p. 7—17.
4. Fleury C. An efficient optimality criteria approach to the minimum weight design of elastis structures.— Comp. and Struct., 1980, v. 11, No. 3, p. 163—173.
5. Sander G., Fleury C. A Mixed method in structural optimization.— Internat. J. Numer. Methods of Eng., 1978, v. 13, No. 2, p. 385—404.
6. Калинин И. Н. Проектирование оптимальных оболочек методом прямого поиска.— Прикл. механика, 1982, т. 18, № 1, с. 36—42.
7. Калинин И. Н., Ленкин И. Б. Оптимизация оболочек кусочно-постоянной толщины при ограничениях по прочности.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 6, с. 89—94.
8. Доббс М. В., Нельсон Р. Б. Применение критериев оптимальности к автоматическому проектированию конструкций.— Ракетн. техн. и космонавтика, 1976, т. 14, № 10, с. 113—122.
9. Venkaaya V. B. Design of optimum structures.— Comp. and Struct., 1971, v. 1, No. 1—2, p. 265—309.
10. Хог Э., Арора Я. Прикладное оптимальное проектирование. М.: Мир, 1983. 479 с.