МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1987

УДК 539.3

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЭФФЕКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЕТЧАТЫХ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИНОК ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

КАЛАМКАРОВ А. Л.

Рассматриваются тонкие упругие сетчатые оболочки и пластинки, образованные несколькими семействами секций, площади сечений которых весьма малы по сравнению с площадями, заключенными между соседними секциями. Такого рода сетчатые конструкции широко используются в различных областях техники, причем, как правило, из конструкционных или технологических соображений сетку изготовляют периодической. В случаях, когда секции расположены достаточно густо, оказался эффективным подход к исследованию таких конструкций, основанный на континуальной расчетной модели [1]: сетка моделируется непрерывной оболочкой, описываемой соотношениями упругости некоторого специального вида.

В данной работе предлагается другой подход к получению соотношений упругости континуальной модели сетчатых оболочек и пластинок периодической структуры, основанный на методе осреднения процессов в периодических средах [2, 3]. В явном виде получены формулы для главных членов эффективных характеристик периодических сетчатых оболочек и пластинок произвольной конструкции с эллиптическим сечением секций. В качестве примера приводятся соотношения упругости для прямоугольной, ромбической сетчатой оболочки и сетки, образованной равносторонними треугольниками, с эллиптическим или круглым сечением секций. Полученные соотношения применимы также для сплошных неоднородных оболочек с высокомодульным сетчатым каркасом периодической структуры. Метод осреднения применялся ранее при вычислении эффективных характеристик двух- и трехмерных периодических каркасов [2, 4].

1. Рассмотрим неоднородную оболочку периодической структуры, обладающую ячейкой периодичности Ω_δ, которая в ортогональной системе безразмерных координат $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$ [5] задается неравенствами $\{-{}^1/_2\delta h_1<\alpha_1<{}^1/_2\delta h_1,\ -{}^1/_2\delta h_2<\alpha_2<{}^1/_2\delta h_2,\ -{}^1/_2\delta<\gamma<{}^1/_2\delta\}$. Безразмерный малый параметр δ определяет толщину оболочки, h_1, h_2 — отношения тангенциальных размеров ячейки к толщине.

Введем координаты $y_1=\alpha_1/(\delta h_1)$, $y_2=\alpha_2/(\delta h_2)$, $z=\gamma/\delta$. Следуя постановке задачи, считаем, что коэффициенты упругости a_{ijmn} (y_1, y_2, z) — периодические по y_1, y_2 функции с ячейкой периодичности Ω: $\{y_1, y_2, z\in(-{}^1/_2, {}^1/_2)\}$.

На основе общей схемы осреднения процессов в периодических средах [2, 3] можно осреднить пространственную статическую задачу теории упругости для неоднородной оболочки периодической структуры и показать, что для главных членов разложения по δ компонент вектора перемещений и напряжений справедливы следующие соотношения (по повторяющимся индексам производится суммирование):

$$u_1=u(\alpha_1, \alpha_2)-\gamma(\partial w/\partial\alpha_1)/A_1 \tag{1.1}$$

$$u_2=v(\alpha_1, \alpha_2)-\gamma(\partial w/\partial\alpha_2)/A_2, \quad u_3=w(\alpha_1, \alpha_2)$$

$$\sigma_{ij}=b_{ij}^{\lambda\mu}\varepsilon_{\lambda\mu}+\delta c_{ij}^{\lambda\mu}\tau_{\lambda\mu} \tag{1.2}$$

$$(i, j, m, n=1, 2, 3;\ \lambda, \mu, \beta, \theta=1, 2)$$

где $A_1(\alpha_1, \alpha_2)$, $A_2(\alpha_1, \alpha_2)$ — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности $(\gamma=0)$, $\varepsilon_{11}=\varepsilon_1$, $\varepsilon_{22}=\varepsilon_2$, $\varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}=\omega/2$ — относительные удлинения и сдвиг срединной поверхности, $\tau_{11}=\varkappa_1$, $\tau_{22}=\varkappa_2$, $\tau_{12}=\tau_{21}=\tau$ — деформации изгиба и кручения срединной поверхности, выражающиеся через функции u, v, w с помощью известных соотношений [5]. Коэффициенты, входящие в (1.2), определяются формулами

$$b_{ij}^{\lambda\mu}=h_\theta^{-1}a_{ijm\theta}\partial U_m^{\lambda\mu}/\partial\xi_\theta+a_{ijm3}\partial U_m^{\lambda\mu}/\partial z+a_{ij\lambda\mu} \tag{1.3}$$

$$c_{ij}^{\lambda\mu}=h_\theta^{-1}a_{ijm\theta}\partial V_m^{\lambda\mu}/\partial\xi_\theta+a_{ijm3}\partial V_m^{\lambda\mu}/\partial z+za_{ij\lambda\mu} \tag{1.4}$$

где $U_m^{\lambda\mu}(\xi_1, \xi_2, z)$, $V_m^{\lambda\mu}(\xi_1, \xi_2, z)$ — периодические по переменным $\xi_1=A_1y_1$, $\xi_2=A_2y_2$ (с периодами A_1, A_2 соответственно) решения следующих локальных задач на ячейке периодичности:

$$h_\beta^{-1}\partial b_{i\beta}^{\lambda\mu}/\partial\xi_\beta+\partial b_{i3}^{\lambda\mu}/\partial z=0, \quad b_{i3}^{\lambda\mu}|_{z=\pm 1/2}=0 \tag{1.5}$$

$$h_\beta^{-1}\partial c_{i\beta}^{\lambda\mu}/\partial\xi_\beta+\partial c_{i3}^{\lambda\mu}/\partial z=0, \quad c_{i3}^{\lambda\mu}|_{z=\pm 1/2}=0 \tag{1.6}$$

В случае разрывных функций $a_{ijmn}(y_1, y_2, z)$ к задачам (1.5), (1.6) добавляются условия непрерывности на поверхностях разрыва ($\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности разрыва):

$$[U_m^{\lambda\mu}]=0, \quad [n_\beta b_{i\beta}^{\lambda\mu}/h_\beta+n_3b_{i3}^{\lambda\mu}]=0 \tag{1.7}$$
$$[V_m^{\lambda\mu}]=0, \quad [n_\beta c_{i\beta}^{\lambda\mu}/h_\beta+n_3c_{i3}^{\lambda\mu}]=0$$

Введем операцию осреднения по ячейке Ω: $\langle f\rangle=\int\limits_\Omega f\,dy_1\,dy_2\,dz$. Пользуясь принятыми в [1] обозначениями для усилий и моментов, из (1.2) получим (по β не суммировать):

$$N_\beta=\delta\langle b_{\beta\beta}^{\lambda\mu}\rangle\varepsilon_{\lambda\mu}+\delta^2\langle c_{\beta\beta}^{\lambda\mu}\rangle\tau_{\lambda\mu}, \quad S=\delta\langle b_{12}^{\lambda\mu}\rangle\varepsilon_{\lambda\mu}+\delta^2\langle c_{12}^{\lambda\mu}\rangle\tau_{\lambda\mu}$$
$$M_\beta=\delta^2\langle zb_{\beta\beta}^{\lambda\mu}\rangle\varepsilon_{\lambda\mu}+\delta^3\langle zc_{\beta\beta}^{\lambda\mu}\rangle\tau_{\lambda\mu} \tag{1.8}$$
$$H=\delta^2\langle zb_{12}^{\lambda\mu}\rangle\varepsilon_{\lambda\mu}+\delta^3\langle zc_{12}^{\lambda\mu}\rangle\tau_{\lambda\mu}$$

Формулы (1.8) представляют собой соотношения упругости для осредненной оболочки, а коэффициенты, входящие в них — ее эффективные характеристики. В частном случае однородной изотропной оболочки формулы (1.8) сводятся к известным соотношениям упругости теории тонких оболочек [5]. Отметим, что, решая уравнения равновесия с учетом (1.8), можно найти функции u, v, w, определяющие по формулам (1.1), (1.2) главные члены вектора перемещений и напряжения в произвольной точке оболочки.

2. Рассмотрим сетчатую оболочку или пластинку периодической структуры, образованную семействами параллельных секций $B_1^\delta, B_2^\delta, \ldots, B_l^\delta$. Обозначим $B^\delta=\left(\bigcup\limits_{i=1}^{l}B_i^\delta\right)\cap\Omega_\delta$, B_i и B — образы B_i^δ и B^δ в системе координат (y_1, y_2, z). Будем считать, что секции изготовлены из изотропного однородного материала с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν. Тогда в точках, принадлежащих области B, имеем [3]:

$$a_{ijmn}=E\{[2\nu/(1-2\nu)]\delta_{ij}\delta_{mn}+\delta_{im}\delta_{jn}+\delta_{in}\delta_{jm}\}/[2(1+\nu)] \tag{2.1}$$

В лежащих вне области B точках $a_{ijmn}=0$. Для определения эффективных характеристик, входящих в (1.8), необходимо решить локальные задачи (1.3)—(1.7), что связано с затруднениями даже при $l=2$. Вместе с тем объем секций, образующих сетку, весьма мал по сравнению с объемом ячейки периодичности. Это обстоятельство дает возможность применить принцип расщепления осредненного оператора [2], из которого в приложении к рассматриваемой задаче следует, что главные члены эффективных характеристик по малому объему секций равны сумме значений этих характеристик, вычисленных по решениям локальных задач (1.3)—(1.7) на каждой из секций в отдельности. При этом оценка погрешности, полученная в [2], справедлива в рассматриваемом случае, поскольку локальные задачи для сетчатых оболочек аналогичны задачам для каркасов [2], использованным при ее доказательстве.

Для взятой в отдельности секции B_j из (1.5)–(1.7) следует

$$\frac{1}{h_\beta}\frac{\partial}{\partial \xi_\beta} b_{i\beta}^{\lambda\mu}+\frac{\partial}{\partial z} b_{i3}^{\lambda\mu}=0, \qquad \left(\frac{1}{h_\beta} n_\beta b_{i\beta}^{\lambda\mu}+n_3 b_{i3}^{\lambda\mu}\right)\Big|_{\partial B_j}=0 \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{h_\beta}\frac{\partial}{\partial \xi_\beta} c_{i\beta}^{\lambda\mu}+\frac{\partial}{\partial z} c_{i3}^{\lambda\mu}=0, \qquad \left(\frac{1}{h_\beta} n_\beta c_{i\beta}^{\lambda\mu}+n_3 c_{i3}^{\lambda\mu}\right)\Big|_{\partial B_j}=0 \tag{2.3}$$

Здесь $\mathbf{n}$ – вектор нормали к боковой поверхности секции ∂B_j. Задачи (2.2), (2.3) с учетом соотношений (1.3), (1.4), (2.1) сводятся к двум краевым задачам относительно функций $U_m^{\lambda\mu}(\xi_1, \xi_2, z)$, $V_m^{\lambda\mu}(\xi_1, \xi_2, z)$, периодических по ξ_1, ξ_2.

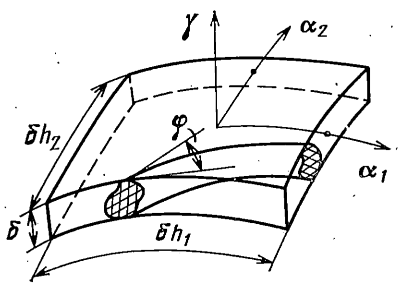
3. Рассмотрим задачи (2.2), (2.3) с учетом (1.3), (1.4), (2.1) для секции, представляющей собой искривленный цилиндр, образующий с координатной линией α_1 угол φ (фиг. 1). Первая локальная задача (1.3), (2.1), (2.2) решается точно для произвольного сечения секции и из формул (1.3) следует

$$b_{11}^{11}=EA_1^4c^4/A^4, \quad b_{11}^{12}=b_{12}^{11}=EA_1^3A_2c^3s/A^4$$

$$b_{11}^{22}=b_{22}^{11}=b_{12}^{12}=EA_1^2A_2^2c^2s^2/A^4 \tag{3.1}$$

$$b_{12}^{22}=b_{22}^{12}=EA_1A_2^3cs^3/A^4, \qquad b_{22}^{22}=EA_2^4s^4/A^4$$

$$c=\cos\varphi, \quad s=\sin\varphi, \quad A^2=A_1^2c^2+A_2^2s^2$$



Фиг. 1

Для получения аналитического решения второй локальной задачи (1.4), (2.1), (2.3) необходимо задать форму сечения рассматриваемой секции. В практически важном случае эллиптического сечения с эксцентриситетом e вторая локальная задача имеет точное аналитическое решение, и из формул (1.4) для функций $c_{\beta\theta}^{\lambda\mu}$ с индексами 1 и 2, входящих в (1.8) (функции $c_{3\beta}^{\lambda\mu}$ отличны от нуля, но после осреднения они обращаются в нуль и в соотношения (1.8) не входят), получим

$$c_{11}^{11}=DA_1^4c^2z[2A_2^4s^2(1-e^2)\Delta+c^2(1+\nu)]$$

$$c_{11}^{12}=c_{12}^{11}=DA_1^3A_2csz[A_2^2(A_2^2s^2-A_1^2c^2)(1-e^2)\Delta+c^2(1+\nu)]$$

$$c_{11}^{22}=c_{22}^{11}=DA_1^2A_2^2c^2s^2z[-2A_1^2A_2^2(1-e^2)\Delta+1+\nu]$$

$$c_{12}^{12}={}^1/_2DA_1^2A_2^2z[(A_1^2c^2-A_2^2s^2)^2(1-e^2)\Delta+2c^2s^2(1+\nu)] \tag{3.2}$$

$$c_{12}^{22}=c_{22}^{12}=DA_1A_2^3csz[A_1^2(A_1^2c^2-A_2^2s^2)(1-e^2)\Delta+s^2(1+\nu)]$$

$$c_{22}^{22}=DA_2^4s^2z[2A_1^4c^2(1-e^2)\Delta+s^2(1+\nu)]$$

$$D=E/[(1+\nu)A^4], \quad \Delta=[A^2+A_1^2A_2^2(1-e^2)]^{-1}$$

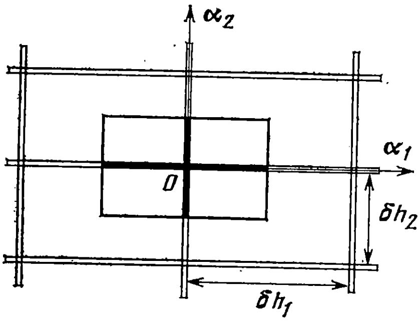
Отметим, что формулы для c_{11}^{11} при $\varphi=0$ и для c_{22}^{22} при $\varphi=\pi/2$ справедливы для любого сечения секции.

Для получения эффективных характеристик, входящих в соотношения упругости, необходимо осреднить функции (3.1), (3.2). Обозначим объем секции в исходной системе координат $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$ через δ^3V. Тогда для секции с эллиптическим сечением получим

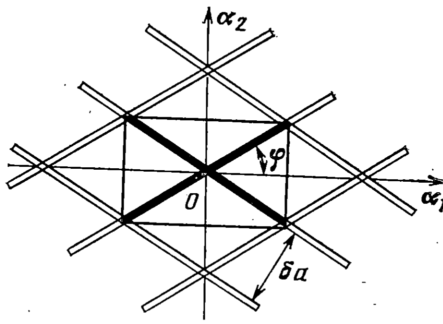
$$\langle b_{\beta\theta}^{\lambda\mu}\rangle=Vb_{\beta\theta}^{\lambda\mu}/(h_1h_2), \qquad \langle zb_{\beta\theta}^{\lambda\mu}\rangle=0 \tag{3.3}$$

$$\langle c_{\beta\theta}^{\lambda\mu}\rangle=0, \qquad \langle zc_{\beta\theta}^{\lambda\mu}\rangle=Vc_{\beta\theta}^{\lambda\mu}/(16h_1h_2z)$$

Отметим, что равенство нулю коэффициентов $\langle zb_{\beta\theta}^{\lambda\mu}\rangle$ и $\langle c_{\beta\theta}^{\lambda\mu}\rangle$ связано с симметрией эллиптического сечения секции относительно срединной поверхности. Для секций, не обладающих подобной симметрией, они отличны от нуля, что приводит к качественному изменению соотношений упругости, следующих из (1.8).



Фиг. 2



Фиг. 3

Формулы (3.1)—(3.3) позволяют получить явные выражения для главных членов эффективных характеристик осредненной оболочки или пластинки в случае периодической сетки с произвольным сочетанием секций эллиптического сечения. Для этого надо по формулам (3.1)—(3.3) получить значения эффективных коэффициентов для каждой секции в отдельности и, пользуясь принципом расщепления осредненного оператора, их сложить.

4. Получим соотношения упругости в следующих практически интересных случаях.

1. Прямоугольная сетка. Сетка оболочки образована двумя взаимно перпендикулярными семействами секций эллиптического сечения с ячейкой периодичности, изображенной на фиг. 2. Первое семейство характеризуется параметрами E_1, ν_1, e_1; второе — E_2, ν_2, e_2. Площадь сечения секции первого семейства в системе координат $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$ есть $\delta^2 F_1$, второго — $\delta^2 F_2$. Очевидно, $F_\mu = {}^1/_4\pi(1-e_\mu^2)^{1/2}$. Расстояние между соседними секциями первого семейства есть δh_2, второго — δh_1. Отметим, что при определении геометрических характеристик сеток система координат $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$ формально считается декартовой.

Соотношения упругости (1.8) в этом случае имеют вид

$$N_1 = \delta E_1 F_1 \varepsilon_1 / h_2, \quad N_2 = \delta E_2 F_2 \varepsilon_2 / h_1, \quad S = 0$$

$$M_1 = \delta^3 E_1 F_1 \varkappa_1 / (16 h_2), \quad M_2 = \delta^3 E_2 F_2 \varkappa_2 / (16 h_1)$$

$$H = \frac{\delta^3}{16}\left[\frac{E_1}{1+\nu_1}\frac{F_1}{h_2}\frac{A_2^2(1-e_1^2)}{1+A_2^2(1-e_1^2)} + \frac{E_2}{1+\nu_2}\frac{F_2}{h_1}\frac{A_1^2(1-e_2^2)}{1+A_1^2(1-e_2^2)}\right]\tau$$

2. Ромбическая сетка. Сетка оболочки состоит из двух семейств параллельных между собой секций одинакового эллиптического сечения с эксцентриситетом e, площадью сечения $\delta^2 F$, $F = {}^1/_4\pi(1-e^2)^{1/2}$. Расстояние между соседними секциями каждого из семейств равно δa, угол между секциями разных семейств 2φ (фиг. 3). Секции изготовлены из одного материала. В этом случае имеем следующие определяющие соотношения:

$$N_1 = 2EFA_1^2c^2\delta(A_1^2c^2\varepsilon_1 + A_2^2s^2\varepsilon_2)/(aA^4)$$

$$N_2 = A_2^2s^2N_1/(A_1^2c^2), \quad S = 2EFA_1^2A_2^2c^2s^2\delta\omega/(aA^4)$$

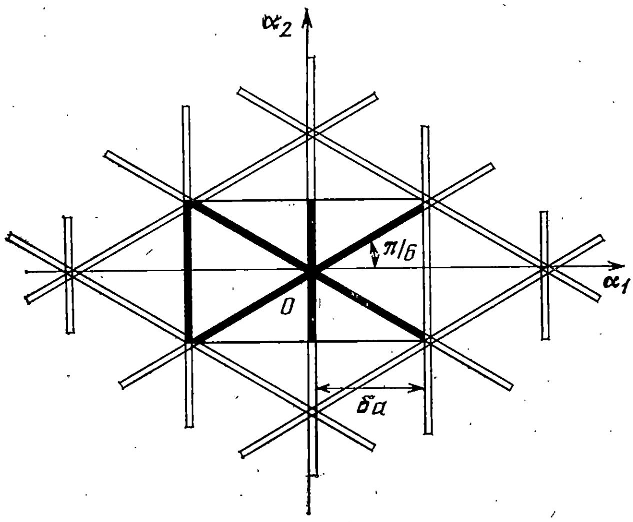
$$M_1 = CA_1^2c^2\{A_1^2[2A_2^4s^2(1-e^2)\Delta + c^2(1+\nu)]\varkappa_1 + {}+A_2^2s^2[-2A_1^2A_2^2(1-e^2)\Delta + 1+\nu]\varkappa_2\}$$

$$M_2 = CA_2^2s^2\{A_1^2c^2[-2A_1^2A_2^2(1-e^2)\Delta + 1+\nu]\varkappa_1 + {}+A_2^2[2A_1^4c^2(1-e^2)\Delta + s^2(1+\nu)]\varkappa_2\}$$

$$H = CA_1^2A_2^2[(A_1^2c^2 - A_2^2s^2)^2(1-e^2)\Delta + 2c^2s^2(1+\nu)]\tau$$

$$C = \delta^3EF/[8aA^4(1+\nu)], \quad \Delta = [A^2 + A_1^2A_2^2(1-e^2)]^{-1}$$

3. Сетка, образованная равносторонними треугольниками. Сетка обо-



Фиг. 4

лочки состоит из трех семейств параллельных между собой секций, образующих при пересечении равносторонние треугольники (фиг. 4). Сечения всех секций круглые с диаметром δ, т. е. $e=0$, $F={}^1/_4\pi$. Расстояние между соседними секциями каждого семейства δa. Секции изготовлены из одного материала. В этом случае из (1.8) получим

$$N_1={}^3/_{32}\pi E\delta A_1^2(3A_1^2\varepsilon_1+A_2^2\varepsilon_2)/(aA^4)$$

$$N_2={}^1/_{32}\pi E\delta[3A_1^2A_2^2\varepsilon_1+(8A^4+A_2^4)\varepsilon_2]/(aA^4)$$

$$S={}^3/_{32}\pi E\delta A_1^2A_2^2\omega/(aA^4)$$

$$M_1=3C_1A_1^2\{A_1^2[2A_2^4\Delta_1+3(1+\nu)]\varkappa_1+ +A_2^2[-2A_1^2A_2^2\Delta_1+1+\nu]\varkappa_2\}$$

$$M_2=C_1\{3A_1^2A_2^2[-2A_1^2A_2^2\Delta_1+1+\nu]\varkappa_1+ +[6A_1^4A_2^4\Delta_1+(A_2^4+8A^4)(1+\nu)]\varkappa_2\}$$

$$H=C_1A_1^2A_2^2\{(3A_1^2-A_2^2)^2\Delta_1+6(1+\nu)+ +8A^4A_2^{-2}(1+A_1^2)^{-1}\}\tau,\quad A^2={}^3/_4A_1^2+{}^1/_4A_2^2$$

$$C_1={}^1/_{512}\pi E\delta^3/[aA^4(1+\nu)],\quad \Delta_1=(A^2+A_1^2A_2^2)^{-1}$$

В случае сетчатых пластинок во всех формулах надо положить $A_1(\alpha_1, \alpha_2)\equiv1$, $A_2(\alpha_1, \alpha_2)\equiv1$. Полученные при этом выражения совпадают с известными соотношениями упругости для сеток аналогичной конструкции [1].

Автор благодарит В. З. Партона и Б. А. Кудрявцева за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пшеничнов Г. И.* Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок. М.: Наука, 1982. 352 с.
2. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
3. *Победря Б. Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
4. *Колпаков А. Г.* К определению усредненных характеристик упругих каркасов.— ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 969–977.
5. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.

Москва

Поступила в редакцию 26.V.1986