МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1987

УДК 539.3

ОБОБЩЕННЫЙ ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП РЕЙССНЕРА В НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СОСТАВНЫХ ТЕЛ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К ТЕОРИИ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК

ПАЙМУШИН В. Н.

Для нелинейных задач механики деформирования пространственных составных тел, формулируемых в контактной постановке, построена вариационная формула смешанного типа, относящаяся к классу обобщенных вариационных формул принципа Рейсснера. Показана возможность ее применения для построения уточненных вариантов нелинейной теории многослойных оболочек, базирующейся на использовании статико-кинематической дискретно-структурной модели.

1. Обобщенная вариационная формула Рейсснера для контактных задач нелинейной теории упругости составных тел. Рассмотрим составное тело, состоящее из N элементов с объемами $V_{(n)}$ и находящееся в равновесии под действием системы заданных поверхностных сил $P_{(n)}$, приложенных в точках некоторых участков $S^p_{(n)}$ граничных поверхностей $S_{(n)}$ и отнесенных к единице площади, а также объемных сил $\mathbf{F}_{(n)}$, отнесенных к единице объема. Следуя [1, 2], разделим тело на N элементов, через $S^q_{(nk)}$ обозначим поверхность сопряжения n-го элемента с k-ым элементом и в соответствии с контактной формулировкой задачи на $S^q_{(nk)}=S^q_{(kn)}$ введем в рассмотрение неизвестные реактивные усилия взаимодействия $\mathbf{q}_{(nk)}$. Между вектором усилий $\mathbf{q}_{(nk)}$, действующим на n-ый элемент со стороны k-го элемента, и вектором $\mathbf{q}_{(nk)}$, действующим на k-ый элемент со стороны n-го элемента, согласно третьему закону Ньютона имеет место зависимость $\mathbf{q}_{(nk)}=-\mathbf{q}_{(kn)}$, причем $\mathbf{q}_{(nn)}=0$ $(n=\overline{1, N}$ и $\mathbf{q}_{(nk)}=\mathbf{q}_{(kn)}=0$, если отсутствует связь между n-ым и k-ым элементами. При контактной формулировке задачи условия равновесия элементов описываются уравнениями (здесь и в дальнейшем предполагается, что пространство $V_{(n)}$ каждого n-го элемента параметризовано криволинейными координатами $x^{\alpha}_{(n)}$ $(n=1, 2, 3)$ с радиусом-вектором до деформации $\rho_{(n)}=\rho_{(n)}(x^{\alpha}_{(n)})$, деформации и перемещения считаются конечными, основные обозначения приняты из [2]):

$$\overset{(n)}{\nabla}_{\alpha}(\overset{\alpha\beta}{\sigma}_{(n)}\overset{(n)*}{\rho_{\beta}})+\mathbf{F}_{(n)}=0 \quad (x^{\alpha}_{(n)}\in V_{(n)}), \quad \overset{(n)*}{\rho_{\beta}}=\overset{(n)}{\rho_{\beta}}+\overset{(n)}{\nabla}_{\beta}\mathbf{U}^{(n)} \tag{1.1}$$

при статических граничных условиях на $S^p_{(n)}$ и $S^q_{(nk)}$:

$$\overset{\alpha\beta}{\sigma}_{(n)}\overset{(n)*}{\rho_{\beta}}\overset{(n)}{\nu_{\alpha}}-\mathbf{P}_{(n)}=0 \quad (x^{\alpha}_{(n)}\in S^p_{(n)}) \tag{1.2}$$

$$\overset{\alpha\beta}{\sigma}_{(n)}\overset{(n)*}{\rho_{\beta}}\overset{(n)}{\nu_{\alpha}}-\mathbf{q}_{(nk)}=0 \quad (x^{\alpha}_{(n)}\in S^q_{(nk)}) \tag{1.3}$$

и геометрических граничных условиях

$$\mathbf{U}^{(n)}=\mathbf{U}^{(n)s}(x^{\alpha}_{(n)}\in S^u_{(n)}) \tag{1.4}$$

формулируемых на участках $S^u_{(n)}\in S_{(n)}$, где заданы векторы перемещений

$\mathbf{U}^{(n)s}$. Условия (1.3) эквивалентны статическим условиям стыковки элементов, формулируемых при традиционной постановке задач в виде

$$\overset{\alpha\beta}{\sigma}_{(n)}\overset{(n)*}{\rho_\beta}\overset{(n)}{\nu_\alpha}=-\overset{\alpha\beta}{\sigma}_{(k)}\overset{(k)*}{\rho_\beta}\overset{(k)}{\nu_\alpha}\ (\overset{\alpha}{x}_{(n)}\in\overset{q}{S}_{(nk)},\ \overset{\alpha}{x}_{(k)}\in\overset{q}{S}_{(kn)}),$$

причем входящие в (1.3) неизвестные контактные усилия $\mathbf{q}_{(nk)}$ определяются при решении задач исходя из кинематических условий стыковки элементов

$$\mathbf{U}^{(n)}=\mathbf{U}^{(k)}\quad(\overset{\alpha}{x}_{(n)}\in S^q_{(nk)},\ \overset{\alpha}{x}_{(k)}\in S^q_{(kn)}) \tag{1.5}$$

Компоненты тензора напряжений $\overset{\alpha\beta}{\sigma}_{(n)}$, действующие на координатных площадках $\overset{\alpha}{x}_{(n)}=\mathrm{const}$ в деформированном объеме $V_{(n)*}$ и отнесенные к единице координатных поверхностей $\overset{\alpha}{x}_{(n)}=\mathrm{const}$ в недеформированном объеме $V_{(n)}$, связаны с компонентами тензора деформаций $\overset{(n)}{\eta}_{\alpha\beta}$ при помощи уравнений состояния

$$\overset{(n)}{\theta}_{\alpha\beta}=\partial\Phi_{(n)}/\partial\overset{\alpha\beta}{\sigma}_{(n)}-\overset{(n)}{\eta}_{\alpha\beta} \tag{1.6}$$

в которых $\Phi_{(n)}=\Phi_{(n)}(\overset{\alpha\beta}{\sigma}_{(n)})$ — дополнительная работа деформации n-го элемента, выраженная через напряжения $\overset{\alpha\beta}{\sigma}_{(n)}$, а для $\overset{(n)}{\eta}_{\alpha\beta}$ при конечных перемещениях имеют место кинематические соотношения

$$2\eta^{(n)}_{\alpha\beta}=g^{(n)*}_{\alpha\beta}-g^{(n)}_{\alpha\beta}=\nabla^{(n)}_\alpha\mathbf{U}^{(n)}\rho^{(n)}_\beta+\nabla^{(n)}_\beta\mathbf{U}^{(n)}\rho^{(n)}_\alpha+\nabla^{(n)}_\alpha\mathbf{U}^{(n)}\nabla^{(n)}_\beta\mathbf{U}^{(n)} \tag{1.7}$$

Здесь $\overset{(n)*}{g_{\alpha\beta}}=\overset{(n)}{\rho_\alpha}\overset{(n)*}{\rho_\beta}$, $\overset{(n)}{g_{\alpha\beta}}=\overset{(n)}{\rho_\alpha}\overset{(n)}{\rho_\beta}$ — метрические тензоры деформированных и недеформированных пространств; $\nabla^{(n)}_\alpha$ — символ ковариантного дифференцирования по метрике $g^{(n)}_{\alpha\beta}$.

Введем в рассмотрение функционал следующего вида:

$$R=\sum_{n=1}^{N}\Big\{\iiint\limits_{S^{P}_{(n)}}\mathbf{P}_n\mathbf{U}^{(n)}\,dS_{(n)}+\iiint\limits_{V_{(n)}}\mathbf{F}_{(n)}\mathbf{U}^{(n)}\,dV_{(n)}-$$

$$-\iiint\limits_{V_{(n)}}[\sigma^{\alpha\beta}_{(n)}\eta^{(n)}_{\alpha\beta}-\Phi_{(n)}(\sigma^{\alpha\beta}_{(n)})]\,dV_{(n)}+\iint\limits_{S^u_{(n)}}(\mathbf{U}^{(n)}-\mathbf{U}^{(n)s})\,\sigma^{\alpha\beta}_{(n)}\rho^{(n)*}_\beta\nu^{(n)}_\alpha\,dS_{(n)}+$$

$$+\sum_k\iint\limits_{S^q_{(nk)}}\mathbf{q}_{(nk)}\mathbf{U}^{(n)}\,dS^q_{(nk)}\Big\} \tag{1.8}$$

который отличается от традиционного функционала Рейсснера, записываемого для составного тела, слагаемыми [2], учитывающими работу реактивных усилий $\mathbf{q}_{(nk)}$ на соответствующих перемещениях:

$$\sum_k\iint\limits_{S^q_{(nk)}}\mathbf{q}_{(nk)}\mathbf{U}^{(n)}\,dS^q_{(nk)}$$

В предположении о том, что заданные внешние силы $\mathbf{F}_{(n)}$, $\mathbf{P}_{(n)}$ не зависят от деформаций, можно доказать следующую теорему:

Теорема. Среди перемещений, не нарушающих геометрических связей (1.4), (1.5), наложенных на тело в точках поверхностей $S^u_{(n)}$ и $S^q_{(nk)}$ реактивных усилий взаимодействия, приложенных в точках $S^q_{(nk)}$, и всевозможных напряжений в состоянии равновесия имеют место только те перемещения $\mathbf{U}^{(n)}$, усилия $\mathbf{q}_{(nk)}$ и напряжения $\overset{\alpha\beta}{\sigma}_{(n)}$, для которых функционал (1.8) имеет стационарное значение.

Для доказательства этой теоремы проварьируем (1.8) по функциональным аргументам $\eta^{(n)}_{\alpha\beta}$, $\sigma^{\alpha\beta}_{(n)}$, $\mathbf{U}^{(n)}$, $\mathbf{q}_{(nk)}$:

$$\delta R = \sum_{n=1}^{N} \Big\{ \iint\limits_{S^p_{(n)}} \mathbf{P}_{(n)} \delta \mathbf{U}^{(n)} \, dS_{(n)} + \iiint\limits_{V_{(n)}} \Big[\mathbf{F}_{(n)} \delta \mathbf{U}^{(n)} - \sigma^{\alpha\beta}_{(n)} \delta \eta^{(n)}_{\alpha\beta} +$$

$$+ \left(\frac{\partial \Phi_{(n)}}{\partial \sigma^{\alpha\beta}_{(n)}} - \eta^{(n)}_{\alpha\beta} \right) \delta \sigma^{\alpha 3}_{(n)} \Big] dV_{(n)} + \iint\limits_{S^u_{(n)}} [(\mathbf{U}^{(n)} - \mathbf{U}^{(n)s}) \delta \mathbf{X}^{(n)}_n + \mathbf{X}^{(n)}_n \delta \mathbf{U}^{(n)}] \, dS_{(n)} +$$

$$+ \iint\limits_{S^q_{(nk)}} \mathbf{q}_{(nk)} \delta \mathbf{U}^{(n)} \, dS^q_{(nk)} \Big\} + \sum_{n,k} \iint\limits_{S^q_{(nk)}} (\mathbf{U}^{(n)} - \mathbf{U}^{(k)}) \delta \mathbf{q}_{(nk)} \, dS^q_{(nk)} \qquad (1.9)$$

где $\mathbf{X}^{(n)}_n = \sigma^{\alpha\beta}_{(n)} \rho^{(n)*}_\beta \nu^{(n)}_\alpha$. Внося сюда вместо $\delta\eta^{(n)}_{\alpha\beta}$ правую часть кинематических соотношений (1.7), после традиционных преобразований находим

$$\delta R = \sum_{n=1}^{N} \Big\{ \iint\limits_{S^p_{(n)}} (\mathbf{P}_{(n)} - \mathbf{X}^{(n)}_n) \delta \mathbf{U}^{(n)} \, dS_{(n)} + \iint\limits_{S^u_{(n)}} (\mathbf{U}^{(n)} - \mathbf{U}^{(n)s}) \delta \mathbf{X}^{(n)}_n \, dS_{(n)} +$$

$$+ \sum_k \iint\limits_{S^q_{(nk)}} (\mathbf{q}_{(nk)} - \mathbf{X}^{(n)}_n) \delta \mathbf{U}^{(n)} \, dS^q_{(nk)} + \iiint\limits_{V_{(n)}} \Big\{ \left(\frac{\partial \Phi_{(n)}}{\partial \sigma^{\alpha\beta}_{(n)}} - \eta^{(n)}_{\alpha\beta} \right) \delta \sigma^{\alpha\beta}_{(n)} +$$

$$+ [\nabla^{(n)}_\alpha (\sigma^{\alpha\beta}_{(n)} \rho^{(n)*}_\beta) + \mathbf{F}_{(n)}] \delta \mathbf{U}^{(n)} \Big\} \Big\} + \sum_{n,k} \iint\limits_{S^q_{(nk)}} (\mathbf{U}^{(n)} - \mathbf{U}^{(k)}) \delta \mathbf{q}_{(nk)} \, dS^q_{(nk)} = 0 \quad (1.10)$$

откуда следует, что $\delta R = 0$ при выполнении уравнений равновесия (1.1), статических граничных условий (1.2), (1.3), уравнений состояния (1.6), кинематических граничных условий (1.4) и кинематических условий стыковки (1.5).

Обратно, в силу независимости вариаций перемещений и напряжений внутри и на границах элементов, а также реакций взаимодействия между ними, из вариационного уравнения $\delta R = 0$ следуют уравнения равновесия (1.1), статические граничные условия (1.2), уравнения состояния (1.6), статические условия сопряжения элементов в виде статических граничных условий (1.3), кинематические граничные условия (1.4) и кинематические условия сопряжения (1.5). Следовательно, условие $\delta R = 0$ является вариационной формулировкой задачи (1.1)–(1.6) при дополнительных условиях (1.7). Все эти соотношения при применении прямых методов для решения задач с использованием уравнения $\delta R = 0$ в форме (1.9) или (1.10) удовлетворяются с одинаковой степенью точности и при этом требуется построение координатных функций как для трехмерных неизвестных $U^{(n)}_\alpha = \mathbf{U}^{(n)} \rho^{(n)}_\alpha$, $\sigma^{\alpha\beta}_{(n)}$, так и для двумерных неизвестных $q^{\alpha}_{(nk)} = \mathbf{q}_{(nk)} \rho^{\alpha}_{(n)*}$, но без предварительного удовлетворения кинематическим и статическим условиям сопряжения элементов тела.

Рассмотрим ряд частных случаев. Пусть для всех элементов тела выполнены уравнения состояния (1.6) и геометрические граничные условия (1.4) на $S^{(n)}_u$. В этом случае из условия $\delta R = 0$ следует вариационное уравнение обобщенного вариационного принципа Лагранжа, полученное в [2].

Пусть на $S^q_{(nk)}$ выполнены кинематические условия сопряжения (1.5). В этом случае функционал (1.8) сводится к традиционному функционалу Рейсснера, записываемому для составного тела, и из условия его стационарности вместо (1.3) следуют статические условия стыковки элементов.

Для приложений представляет интерес вариационное уравнение

$$\delta R = \sum_{n=1}^{N} \Big[\iint\limits_{S^p_{(n)}} \mathbf{P}_{(n)} \delta \mathbf{U}^{(n)} \, dS_{(n)} + \iiint\limits_{V_{(n)}} (\mathbf{F}_{(n)} \delta \mathbf{U}^{(n)} - \sigma^{\alpha\beta}_{(n)} \delta \eta^{(n)}_{\alpha\beta} + \theta^{(n)}_{\beta 3} \delta \sigma^{\beta 3}_{(n)}) \, dV_{(n)} +$$

$$+\iint\limits_{S^q_{(nk)}} \mathbf{q}_{(nk)}\,\delta\mathbf{U}^{(n)}\,dS^q_{(nk)}\Big] + \sum_{n,\,k}\iint\limits_{S^q_{(nk)}} (\mathbf{U}^{(n)} - \mathbf{U}^{(k)})\,\delta\mathbf{q}_{(nk)}\,dS^q_{(nk)} = 0 \qquad (1.11)$$

следующее из (1.9) при предварительном удовлетворении кинематическим граничным условиям (1.4) и трем уравнениям состояния $\theta^{(n)}_{ij} = \partial\Phi_{(n)}/\partial\overset{ij}{\sigma}_{(n)} - \eta^{(n)}_{ij} \equiv 0$. В данном уравнении из шести компонент тензора напряжений к варьированию допущены лишь напряжения $\overset{13}{\sigma}_{(n)}$, $\overset{23}{\sigma}_{(n)}$ и $\overset{33}{\sigma}_{(n)}$. Вариационное уравнение такого типа, получающееся из (1.11) при предварительном удовлетворении кинематическим условиям стыковки (1.5), успешно используется в [3] при построении двумерных соотношений механики деформирования многослойных оболочек в рамках обобщенной модели типа Тимошенко, привлекаемой ко всему пакету слоев.

2. Контактная постановка задачи механики многослойных оболочек по статико-кинематической дискретно-структурной модели. Рассмотрим многослойную оболочку с объемом $V = \sum V_{(n)}$, состоящую из N слоев, которая ограничена линейчатой поверхностью бокового граничного среза S и двумя граничными поверхностями $S_{(0)}$, $S_{(N)}$, называемыми нижней и верхней лицевыми поверхностями. Предполагаем, что пространство V параметризовано криволинейными координатами x^i $(i=1, 2)$ на срединной поверхности σ одного из слоев, заданной уравнением $\mathbf{r}=\mathbf{r}(x^i)$, и расстоянием z, отсчитываемым от σ по направлению единичной нормали $\mathbf{m}$ к σ. Будем считать, что поверхность S образована движением вектора $z\mathbf{m}$ вдоль контура Γ, ограничивающего поверхность σ, а оболочка является тонкой и выполняются условия $a^{(n)}_{ik} \approx a_{ik}$, $b^{(n)}_{ik} \approx b_{ik}$, $\delta_i^k - z b_i^k \approx \delta_i^k$. Здесь $a_{ik} = \mathbf{r}_i\mathbf{r}_k$, $b_{ik} = -\mathbf{m}_k\mathbf{r}_i$ — первый и второй метрические тензоры на σ; $a^{(n)}_{ik}$, $b^{(n)}_{ik}$ — такие же тензоры на срединной поверхности $\sigma_{(n)}$ n-го слоя $(n=\overline{1, N})$; $\mathbf{r}_i$ — базисные векторы на σ; δ_i^k — символы Кронекера.

Обзор библиографии по механике многослойных оболочек имеется в [4, 5]. В расчетной практике в настоящее время широко используется кинематическая дискретно-структурная модель многослойной оболочки, развитая в [6, 7], в соответствии с которой для каждого слоя оболочки принимается линейный закон изменения вектора перемещений $\mathbf{U}^{(n)}$ по толщине

$$\mathbf{U}^{(n)} = \mathbf{v}^{(n)} + z_{(n)}\boldsymbol{\gamma}^{(n)}, \quad -h_{(n)} \leqslant z_{(n)} \leqslant h_{(n)} \qquad (2.1)$$

Здесь $z_{(n)}$ — поперечная координата, отсчитываемая от срединной поверхности $\sigma_{(n)}$ в направлении $\mathbf{m}$; $2h_{(n)}$ — толщина n-го слоя; $\mathbf{v}^{(n)}$, $\boldsymbol{\gamma}^{(n)}$ — векторы перемещений точек $\sigma_{(n)}$ и поворотов элемента, нормального к $\sigma_{(n)}$. При конечных перемещениях модели (2.1) соответствуют следующие выражения для компонент тензора деформации каждого слоя оболочки

$$\eta^{(n)}_{ik} = \overset{z}{\varepsilon}{}^{(n)}_{ik} = \varepsilon^{(n)}_{ik} + z_{(n)}\chi^{(n)}_{ik}, \qquad 2\eta^{(n)}_{i3} = 2\overset{z}{\varepsilon}{}^{(n)}_{i3} = 2\varepsilon^{(n)}_{i3} + z_{(n)}\chi^{(n)}_{i3}, \qquad \eta^{(n)}_{33} = \varepsilon^{(n)}_3$$

$$2\varepsilon^{(n)}_{ik} = \mathbf{r}_i\mathbf{v}^{(n)}_k + \mathbf{r}_k\mathbf{v}^{(n)}_i + \mathbf{v}^{(n)}_i\mathbf{v}^{(n)}_k, \quad 2\chi^{(n)}_{ik} = \mathbf{r}^{(n)*}_i\boldsymbol{\gamma}^{(n)}_k + \mathbf{r}^{(n)*}_k\boldsymbol{\gamma}^{(n)}_i + \mathbf{m}_i\mathbf{v}^{(n)}_k + \mathbf{m}_k\mathbf{v}^{(n)}_i, \qquad (2.2)$$

$$2\varepsilon^{(n)}_{i3} = \mathbf{m}\mathbf{v}^{(n)}_i + \mathbf{r}^{(n)*}_i\boldsymbol{\gamma}^{(n)}$$

$$\chi^{(n)}_{i3} = \mathbf{m}\boldsymbol{\gamma}^{(n)}_i + (\mathbf{m}_i + \boldsymbol{\gamma}^{(n)}_i)\,\boldsymbol{\gamma}^{(n)}, \qquad 2\varepsilon^{(n)}_3 = (2\mathbf{m} + \boldsymbol{\gamma}^{(n)})\,\boldsymbol{\gamma}^{(n)}$$

$$\mathbf{m}_i = \partial_i\mathbf{m}, \qquad \mathbf{v}^{(n)}_i = \partial_i\mathbf{v}^{(n)}, \qquad \boldsymbol{\gamma}^{(n)}_i = \partial_i\boldsymbol{\gamma}^{(n)}, \qquad \mathbf{r}^{(n)*}_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}^{(n)}_i \qquad (2.3)$$

Если в слоях оболочки считаются выполненными соотношения (1.6) при $\alpha, \beta = 1, 2$, то в соответствии с (1.11) требуется построение аппроксимирующих функций для $\overset{\beta3}{\sigma}_{(n)}$. В рассматриваемом случае, оставаясь в рамках точности выбранной модели (2.1), очевидно, следует ограничиться линейным законом изменения напряжений $\overset{3\beta}{\sigma}_{(n)}$ в пределах толщины слоя

$$\overset{\beta3}{\sigma}_{(n)} = \overset{\beta3}{f}_{(n)} + z_{(n)}\overset{\beta3}{\tau}_{(n)}, \qquad -h_{(n)} \leqslant z_{(n)} \leqslant h_{(n)} \qquad (2.4)$$

$$\overset{\beta3}{f}_{(n)} = \overset{\beta3}{f}_{(n)}(x^i), \qquad \overset{\beta3}{\tau}_{(n)} = \overset{\beta3}{\tau}_{(n)}(x^i)$$

В рамках принятой статико-кинематической дискретно-структурной модели (2.1), (2.4) могут быть построены два варианта статических соотношений, описывающих механику деформирования многослойных оболочек.

Первый из них, рассматриваемый в данном разделе, соответствует контактной постановке задачи, согласно которой на поверхностях сопряжения слоев $\sum_{(n)} (n=\overline{1, N-1})$ введем в рассмотрение контактные усилия взаимодействия. Пусть $\mathbf{q}_{(n, n+1)}=\mathbf{q}_{(n)}$ $(n=\overline{1, N-1})$ — вектор таких контактных усилий, действующих на n-ый слой со стороны $n+1$-го слоя, причем $\mathbf{q}_{(n+1, n)}=-\mathbf{q}_{(n)}$; $\mathbf{P}_{(0)}$, $\mathbf{P}_{(N)}$ — векторы заданных контурных усилий и моментов, отнесенных к единице длины контурной линии Γ и σ и приведенных к деформированным срединным поверхностям $\sigma_{(n)}*$ слоев. Если ввести в рассмотрение векторы внутренних усилий и моментов

$$\mathbf{R}^{i}_{(n)}=T^{ik}_{(n)}\mathbf{r}^{(n)*}_{k}+M^{ik}_{(n)}(\mathbf{m}_k+\boldsymbol{\gamma}^{(n)}_k)+N^{i}_{(n)}(\mathbf{m}+\boldsymbol{\gamma}^{(n)})$$

$$\mathbf{M}^{i}_{(n)}=M^{ik}_{(n)}\mathbf{r}^{(n)*}_{k}+M^{i3}_{(n)}(\mathbf{m}+\boldsymbol{\gamma}^{(n)}) \tag{2.5}$$

$$\mathbf{Q}_{(n)}=N^{i}_{(n)}\mathbf{r}_i^{(n)*}+M^{i3}_{(n)}(\mathbf{m}_i+\boldsymbol{\gamma}_i^{(n)})+N^{3}_{(n)}(\mathbf{m}+\boldsymbol{\gamma}^{(n)})$$

переходя от напряжений $\sigma^{\alpha\beta}_{(n)}$ к усилиям и моментам согласно формулам

$$T^{ik}_{(n)}=\int\limits_{-h_{(n)}}^{h_{(n)}}\sigma^{ik}_{(n)}\,dz_{(n)},\qquad M^{ik}_{(n)}=\int\limits_{-h_{(n)}}^{h_{(n)}}\sigma^{ik}_{(n)}z_{(n)}\,dz_{(n)} \tag{2.6}$$

$$N^{i}_{(n)}=\int\limits_{-h_{(n)}}^{h_{(n)}}\sigma^{i3}_{(n)}\,dz_{(n)}=2h_{(n)}f^{i3}_{(n)},\qquad M^{i3}_{(n)}=\int\limits_{-h_{(n)}}^{h_{(n)}}\sigma^{i3}_{(n)}z_{(n)}\,dz_{(n)}=$$
$$=\frac{2h^{3}_{(n)}}{3}\tau^{i3}_{(n)},\qquad N^{3}_{(n)}=\int\limits_{-h_{(n)}}^{h_{(n)}}\sigma^{33}_{(n)}\,dz_{(n)}=2h_{(n)}f^{33}_{(n)} \tag{2.7}$$

то для рассматриваемой системы вариационное уравнение (1.11) при принятых обозначениях может быть приведено к виду

$$\delta R=\sum_{n=1}^{N}\Big[\int\limits_{\Gamma}(\mathbf{R}^{s}_{(n)}\,\delta\mathbf{v}^{(n)}+\mathbf{G}^{s}_{(n)}\,\delta\boldsymbol{\gamma}^{(n)})\,d\Gamma+\iint\limits_{\sigma}(\mathbf{X}_{(n)}\,\delta\mathbf{v}^{(n)}+$$
$$+\mathbf{M}_{(n)}\,\delta\boldsymbol{\gamma}^{(n)}-\mathbf{R}^{i}_{(n)}\,\nabla_i\delta\mathbf{v}^{(n)}-\mathbf{M}^{i}_{(n)}\,\nabla_i\delta\boldsymbol{\gamma}^{(n)}-\mathbf{Q}_{(n)}\,\delta\boldsymbol{\gamma}^{(n)}+$$
$$+\lambda^{(n)}_{\beta3}\delta f^{\beta3}_{(n)}+\Lambda^{(n)}_{\beta3}\,\delta\tau^{\beta3}_{(n)})\,d\sigma\Big]+\delta I_p=0 \tag{2.8}$$

$$\delta I_p=\iint\limits_{\sigma}\Big[\mathbf{q}_{(1)}\,\delta\mathbf{v}^{(1)}-\mathbf{q}_{(N-1)}\,\delta\mathbf{v}^{(N)}+\sum_{n=2}^{N-1}(\mathbf{q}_{(n)}-\mathbf{q}_{(n-1)})\,\delta\mathbf{v}^{(n)}+$$
$$+\mathbf{q}_{(1)}h_{(1)}\,\delta\boldsymbol{\gamma}^{(1)}+\mathbf{q}_{(N-1)}h_{(N)}\,\delta\boldsymbol{\gamma}^{(N)}+\sum_{n=2}^{N-1}(\mathbf{q}_{(n)}+\mathbf{q}_{(n-1)})\,h_{(n)}\,\delta\boldsymbol{\gamma}^{(n)}+$$
$$+\sum_{n=1}^{N-1}\boldsymbol{\psi}_{(n)}\,\delta\mathbf{q}_{(n)}\Big]\,d\sigma \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{\psi}_{(n)}=\mathbf{v}^{(n)}-\mathbf{v}^{(n+1)}+h_{(n)}\boldsymbol{\gamma}^{(n)}+h_{(n+1)}\boldsymbol{\gamma}^{(n+1)} \tag{2.10}$$

$$\mathbf{X}_{(1)}=\int\limits_{-h_{(1)}}^{h_{(1)}}\mathbf{F}_{(1)}\,dz_{(1)}+\mathbf{P}_{(0)},\qquad \mathbf{X}_{(N)}=\int\limits_{-h_{(N)}}^{h_{(N)}}\mathbf{F}_{(N)}\,dz_{(N)}+\mathbf{P}_{(N)},$$

$$\mathbf{X}_{(n)}=\int\limits_{-h_{(n)}}^{h_{(n)}}\mathbf{F}_{(n)}\,dz_{(n)}\quad (n=\overline{2,N-1})\qquad \mathbf{M}_{(1)}=\int\limits_{-h_{(1)}}^{h_{(1)}}\mathbf{F}_{(1)}z_{(1)}\,dz_{(1)}-\mathbf{P}_{(0)}\mathbf{h}_{(1)},$$

$$\mathbf{M}_{(N)}=\int\limits_{-h_{(n)}}^{h_{(n)}}\mathbf{F}_{(N)}z_{(N)}\,dz_{(N)}+\mathbf{P}_{(N)}h_{(N)},\qquad \mathbf{M}_{(n)}=\int\limits_{-h_{(n)}}^{h_{(n)}}\mathbf{F}_{(n)}z_{(n)}\,dz_{(n)}\quad (n=\overline{2,N-1})$$

$$\lambda_{\beta3}^{(n)}=\int\limits_{-h_{(n)}}^{h_{(n)}}\theta_{\beta3}^{(n)}\,dz_{(n)},\qquad \Lambda_{\beta3}^{(n)}=\int\limits_{-h_{(n)}}^{h_{(n)}}\theta_{\beta3}^{(n)}z_{(n)}\,dz_{(n)}\tag{2.11}$$

Проведя далее в (2.8) традиционные преобразования, с учетом (2.10) приходим к вариационному уравнению в форме метода Бубнова (n_k — ковариантные компоненты вектора единичной нормали n к линии Γ, лежащей в касательной к σ плоскости):

$$\delta R=\sum_{n=1}^{N}\Big\{\int\limits_{\Gamma}[(\mathbf{R}_{(n)}^{s}-\mathbf{R}_{(n)}^{k}n_k)\,\delta\mathbf{v}^{(n)}+(\mathbf{G}_{(n)}^{s}-\mathbf{M}_{(n)}^{k}n_k)\,\delta\boldsymbol{\gamma}^{(n)}]\,d\Gamma+$$

$$+\iint\limits_{\sigma}(\mathbf{T}_{(n)}\,\delta\mathbf{v}^{(n)}+\mathbf{L}_{(n)}\,\delta\boldsymbol{\gamma}^{(n)}+\lambda_{\beta3}^{(n)}\,\delta f_{(n)}^{\beta3}+\Lambda_{\beta3}^{(n)}\,\delta\tau_{(n)}^{\beta3}]\,d\sigma\Big\}+$$

$$+\sum_{n=1}^{N-1}\iint\limits_{\sigma}\boldsymbol{\psi}_{(n)}\,\delta\mathbf{q}_{(n)}\,d\sigma=0\tag{2.12}$$

Из данного уравнения в силу произвольности вариаций $\delta\mathbf{v}^{(n)}$, $\delta\boldsymbol{\gamma}^{(n)}$, $\delta\mathbf{q}_{(n)}$, $\delta f_{(n)}^{\beta3}$, $\delta\tau_{(n)}^{\beta3}$ следуют векторные уравнения равновесия слоев оболочки, а также статические граничные условия на Γ кинематические условия сопряжения слоев, служащие для определения реактивных усилий взаимодействия, и двумерные уравнения

$$\mathbf{T}_{(1)}=\nabla_i\mathbf{R}_{(1)}^{i}+\mathbf{X}_{(1)}+\mathbf{q}_{(1)}=0,\qquad \mathbf{T}_{(N)}=\nabla_i\mathbf{R}_{(N)}^{i}+\mathbf{X}_{(N)}-\mathbf{q}_{(N-1)}=0$$

$$\mathbf{T}_{(n)}=\nabla_i\mathbf{R}_{(n)}^{i}+\mathbf{X}_{(n)}+\mathbf{q}_{(n)}-\mathbf{q}_{(n-1)}=0\qquad (n=\overline{2,N-1})$$

$$\mathbf{L}_{(n)}=\nabla_i\mathbf{M}_{(n)}^{i}+\mathbf{M}_{(n)}-\mathbf{Q}_{(n)}+(\mathbf{q}_{(n)}+\mathbf{q}_{(n-1)})\,h_{(n)}=0\qquad (n=\overline{2,N-1})\tag{2.13}$$

$$\mathbf{L}_{(1)}=\nabla_i\mathbf{M}_{(1)}^{i}+\mathbf{M}_{(1)}-\mathbf{Q}_{(1)}+\mathbf{q}_{(1)}h_{(1)}=0$$

$$\mathbf{L}_{(N)}=\nabla_i\mathbf{M}_{(N)}^{i}+\mathbf{M}_{(N)}-\mathbf{Q}_{(N)}+\mathbf{q}_{(N-1)}h_{(N)}=0$$

$$\mathbf{R}_{(n)}^{i}n_i=\mathbf{R}_{(n)}^{s},\qquad \delta\mathbf{v}^{(n)}\neq 0;\qquad \mathbf{M}_{(n)}^{i}n_i=\mathbf{G}_{(n)}^{s},\qquad \delta\boldsymbol{\gamma}^{(n)}\neq 0\tag{2.14}$$

$$\boldsymbol{\psi}_{(n)}=\mathbf{v}^{(n)}-\mathbf{v}^{(n+1)}+h_{(n)}\boldsymbol{\gamma}^{(n)}+h_{(n+1)}\boldsymbol{\gamma}^{(n+1)}=0\quad (n=\overline{1,N-1})\tag{2.15}$$

$$\lambda_{\beta3}^{(n)}=0,\qquad \Lambda_{\beta3}^{(n)}=0\tag{2.16}$$

Двумерные уравнения (2.16) при конкретизации физических соотношений $\theta_{\beta 3}^{(n)} = \partial\Phi_{(n)}/\partial\sigma_{(n)}^{\beta 3} - \eta_{\beta 3}^{(n)}$ в соответствии с формулами (2.11) позволяют установить зависимости вида

$$
\begin{aligned}
f_{(n)}^{\beta 3} &= f_{(n)}^{\beta 3}\left(\varepsilon_{ik}^{(n)}, \chi_{ik}^{(n)}, 2\varepsilon_{i3}^{(n)}, \chi_{i3}^{(n)}, \varepsilon_{3}^{(n)}\right) \\
\tau_{(n)}^{\beta 3} &= \tau_{(n)}^{\beta 3}\left(\varepsilon_{ik}^{(n)}, \chi_{ik}^{(n)}, 2\varepsilon_{i3}^{(n)}, \chi_{i3}^{(n)}, \varepsilon_{3}^{(n)}\right)
\end{aligned}
\qquad (2.17)
$$

Уравнения (2.13) в скалярной форме доставляют $(6\times N)$ дифференциальных уравнений равновесия с общим порядком, равным $(12\times N)$. При этом на контуре Γ для каждого слоя в зависимости от способа его закрепления ставится по шесть граничных условий (статических, кинематических или смешанных), следующих из (2.14).

Уравнения (2.15) в скалярной форме доставляют $[3\times(N-1)]$ алгебраических уравнений, которым должны быть подчинены решения уравнений (2.13), найденных при соответствующих граничных условиях из (2.14).

Уравнения (2.8), (2.12) служат для решения задач механики многослойных оболочек прямыми методами вариационного исчисления. При их применении координатные функции должны быть построены как для неизвестных функций перемещений $\mathbf{v}^{(n)}$ и поворотов $\boldsymbol{\gamma}^{(n)}$, так и для компонент векторов $q_{(n)}$. Через эти функции, входящие в (2.8), (2.12) величины $\overset{i3}{f}_{(n)}$, $\overset{i3}{\tau}_{(n)}$, $\overset{33}{f'}_{(n)}$ предварительно исключаются при помощи зависимостей (2.17) за счет удовлетворения уравнениям (2.16).

Приведенные соотношения применимы для решения задач механики тонких многослойных оболочек в контактной постановке, вообще говоря, при конечных перемещениях и деформациях. При малых деформациях статические соотношения построенной теории могут быть несколько упрощены. Для проведения таких упрощений наряду с представлениями

$$
\begin{aligned}
&\overset{i}{\mathbf{P}}_{(n)} = \sigma^{ik}\overset{(n)*}{\boldsymbol{\rho}_k} + \overset{i3}{\sigma}_{(n)}\overset{(n)*}{\boldsymbol{\rho}_3}, \qquad \overset{3}{\mathbf{P}}_{(n)} = \overset{i3}{\sigma}_{(n)}\overset{(n)*}{\boldsymbol{\rho}_i} + \overset{33}{\sigma}_{(n)}\overset{(n)*}{\boldsymbol{\rho}_3} \\
&\overset{(n)*}{\boldsymbol{\rho}_k} = \overset{(n)*}{\mathbf{r}_k} + z_{(n)}(\mathbf{m}_k + \overset{(n)}{\boldsymbol{\gamma}_k}), \qquad \overset{(n)*}{\boldsymbol{\rho}_3} = \mathbf{m} + \boldsymbol{\gamma}^{(n)}
\end{aligned}
\qquad (2.18)
$$

следствием которых являются формулы (2.5), введем в рассмотрение компоненты тензора напряжений относительно базисных векторов $\mathbf{r}_i^{(n)*}$ на $\sigma_{(n)*}$ и векторов единичных нормалей $\mathbf{m}^{(n)*}$ к $\sigma_{(n)*}$, представляя векторы напряжений $\overset{i}{\mathbf{P}}_{(n)}$, $\overset{3}{\mathbf{P}}_{(n)}$ в виде разложений

$$
\overset{i}{P}_{(n)} = \overset{ik}{\sigma}_{(n)*}\overset{(n)*}{\mathbf{r}_k} + \overset{i3}{\sigma}_{(n)*}\mathbf{m}^{(n)*}, \qquad \overset{3}{\mathbf{P}}_{(n)} = \overset{3i}{\sigma}_{(n)*}\overset{(n)*}{\mathbf{r}_i} + \overset{33}{\sigma}_{(n)*}\mathbf{m}^{(n)*},
$$

а вместо векторов $\boldsymbol{\gamma}^{(n)}$, следуя [8], введем новые неизвестные векторы $\boldsymbol{\varphi}^{(n)}$ согласно равенствам $\mathbf{m}+\boldsymbol{\gamma}^{(n)} = \mathbf{m}^{(n)*} + \boldsymbol{\varphi}^{(n)}$. Между компонентами напряжений $\overset{\alpha\beta}{\sigma}_{(n)}$ и $\overset{\alpha\beta}{\sigma}_{(n)*}$ легко устанавливаются зависимости

$$
\begin{aligned}
\sigma_{(n)*}^{ij} &= \sigma_{(n)}^{i3}\varphi_{(n)*}^{i} + \sigma_{(n)}^{ik}\left[\delta_k^{\ j} - z_{(n)}b_k^{(n)*j} + z_{(n)}\left(\nabla_k^{(n)*}\varphi_{(n)*}^{j} - \overset{*}{\varphi}_{(n)}b_k^{(n)*j}\right)\right] \\
\sigma_{(n)*}^{i3} &= \sigma_{(n)}^{i3}\left(1 + \overset{*}{\varphi}_{(n)}\right) + \sigma_{(n)}^{i3}z_{(n)}\left(\partial_k\overset{*}{\varphi}_{(n)} + b_k^{(n)*j}\varphi_j^{(n)*}\right) \\
\sigma_{(n)*}^{3i} &= \sigma_{(n)}^{33}\varphi_{(n)*}^{i} + \sigma_{(n)}^{k3}\left[\delta_k^{\ i} - z_{(n)}b_k^{(n)*i} + z_{(n)}\left(\nabla_k^{(n)*}\varphi_{(n)*}^{i} - \overset{*}{\varphi}_{(n)}b_k^{(n)*i}\right)\right] \\
\sigma_{(n)*}^{33} &= \sigma_{(n)}^{33}\left(1 + \overset{*}{\varphi}_{(n)}\right) + \sigma_{(n)}^{k3}z_{(n)}\left(\partial_k\overset{*}{\varphi}_{(n)} + b_k^{(n)*i}\varphi_i^{(n)*}\right)
\end{aligned}
\qquad (2.19)
$$

в которых [8] $\overset{(n)*}{\varphi_i} = 2\overset{(n)}{\varepsilon_{i3}}$, $\overset{i}{\varphi}_{(n)*} = 2\overset{i3}{\varepsilon}_{(n)}$ — ковариантные и контравариантные компоненты вектора поперечных сдвигов на уровне $z_{(n)}=0$; $\overset{*}{\varphi}_{(n)} \approx \overset{(n)}{\varepsilon_3}$ — поперечное обжатие слоя при малых и средних деформациях поперечных сдвигов: $b_k^{(n)*i}$ —

смешанные компоненты второго метрического тензора деформированной срединной поверхности $\sigma_{(n)*}$; $\nabla_k^{(n)*}$ — символы ковариантного дифференцирования по метрике $a_{ik}^{(n)*}=\mathbf{r}_i^{(n)*}\mathbf{r}_k^{(n)*}$. Из анализа приведенных зависимостей (2.19) следует, что будут иметь место приближенные равенства

$$\overset{ik}{\sigma}_{(n)*}\approx\overset{ik}{\sigma}_{(n)},\qquad \overset{i3}{\sigma}_{(n)*}\approx\overset{3i}{\sigma}_{(n)*}\approx\overset{i3}{\sigma}_{(n)},\qquad \overset{33}{\sigma}_{(n)*}\approx\overset{33}{\sigma}_{(n)} \tag{2.20}$$

если после деформации оболочка остается в классе тонких оболочек, т. е. выполняются приближенные условия $\delta_i^k-z_{(n)}b_i^{(n)*k}\approx\delta_i^k$, поперечные деформации при значительных показателях их изменяемости по координатам x^i являются малыми и удовлетворяют оценкам (по i не суммировать):

$$\overset{*}{\varphi}_{(n)}\sim\varepsilon,\quad \overset{i}{\varphi}_{(n)*}\sqrt{a_{ii}^{(n)*}}\sim\varepsilon,\quad \varphi_i^{(n)*}\sqrt{a_{(n)}^{ii}}\sim\varepsilon,\quad h_{(n)}/\lambda_i^{(n)}\sim\varepsilon.$$

Здесь ε — некоторая малая величина, которой можно пренебречь по сравнению с единицей; $\lambda_i^{(n)}$ — масштабы изменения величин $\overset{*}{\varphi}_{(n)}$, $\overset{i}{\varphi}_{(n)*}$, $\varphi_i^{(n)*}$ по координатам x^i.

С учетом (2.20) вместо (2.18) справедливыми оказываются разложения

$$\mathbf{P}_{(n)}^i\approx\sigma_{(n)}^{ik}\mathbf{r}_k^{(n)*}+\sigma_{(n)}^{i3}\mathbf{m}^{(n)*},\qquad \mathbf{P}_{(n)}^3\approx\sigma_{(n)}^{i3}\mathbf{r}_i^{(n)*}+\sigma_{(n)}^{33}\mathbf{m}^{(n)*},$$

при помощи которых в случае малых деформаций вместо (2.5) приходим к формулам

$$\mathbf{R}_{(n)}^i\approx T_{(n)}^{ik}\mathbf{r}_k^{(n)*}+N_{(n)}^i\mathbf{m}^{(n)*},\qquad \mathbf{M}_{(n)}^i\approx M_{(n)}^{ik}\mathbf{r}_k^{(n)*}+M_{(n)}^{i3}\mathbf{m}^{(n)*}$$

$$\mathbf{Q}_{(n)}\approx N_{(n)}^i\mathbf{r}_i^{(n)*}+N_{(n)}^3\mathbf{m}^{(n)*}$$

служащим для скалярного представления уравнений (2.8), (2.12), (2.13) и граничных условий (2.14).

В заключение данного раздела следует отметить, что полученные выше результаты, касающиеся построенных обобщенных вариационных формул и соотношений нелинейной теории многослойных оболочек связаны с результатами [9], посвященных разработке вариационных методов решения линейных задач механики слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев.

3. Уравнения теории многослойных оболочек. Возможность использования контактной постановки задач механики многослойных оболочек обсуждалась в [10]. Представляется, что она может быть рекомендована к использованию по крайней мере при расчете оболочек с разнотипными условиями контурного закрепления слоев по толщине пакета, характерными, например, для элементов изделий конструкционной оптики летательных аппаратов, а также при расчете многослойных оболочек с межслойными дефектами типа [9]. Трудоемкость ее реализации вполне очевидна, что обусловлено появлением большего по сравнению с [6, 7] количества неизвестных в разрешающих уравнениях задачи, хотя тем самым и предоставляется возможность удовлетворения большему числу граничных условий, более адекватно описывающих реальные условия закрепления оболочки.

Покажем, что в рамках статико-кинематической дискретно-структурной модели (2.1), (2.4) могут быть построены уравнения, эквивалентные по количеству неизвестных с уравнениями [6, 7] и следующие из приведенных в предыдущем разделе уравнений при предварительном удовлетворении статическим и кинематическим условиям стыковки слоев. С этой целью введем в рассмотрение $N+1$ вектор перемещений $\mathbf{u}^{(n)}$ $(n=\overline{0,N})$ точек лицевых поверхностей $S_{(0)}$, $S_{(N)}$ поверхностей сопряжения $\sum_{(n)}$ $(n=\overline{1,N})$, через которые при удовлетворении условиям (2.15) векторы $\mathbf{v}^{(n)}$, $\boldsymbol{\gamma}^{(n)}$ будут выражаться при помощи зависимостей

$$\mathbf{v}^{(n)}=(\mathbf{u}^{(n)}+\mathbf{u}^{(n-1)})/2,\qquad \boldsymbol{\gamma}^{(n)}=(\mathbf{u}^{(n)}-\mathbf{u}^{(n-1)})/2h_{(n)} \tag{3.1}$$

Подчиняя далее представления (2.4) статическим условиям стыковки

(1.2), (1.3) в силу $\nu_i^{(n)}=0$, $\nu_3^{(n)}=\pm 1$ имеющим вид

$$\mathbf{P}^3_{(n)}=\mathbf{q}_{(n)} \quad (z_{(n)}=h_{(n)}), \qquad \mathbf{P}^3_{(n)}=\mathbf{q}_{(n-1)} \quad (z_{(n)}=-h_{(n)}) \qquad (n=\overline{2,N-1})$$

$$\mathbf{P}^3_{(1)}=\mathbf{P}_{(0)} \quad (z_{(1)}=-h_{(1)}), \qquad \mathbf{P}^3_{(1)}=\mathbf{q}_{(1)} \quad (z_{(1)}=h_{(1)})$$

$$\mathbf{P}^3_{(N)}=\mathbf{P}_{(N)} \quad (z_{(N)}=h_{(N)}), \qquad \mathbf{P}^3_{(N)}=\mathbf{q}_{(N-1)} \quad (z_{(N)}=-h_{(N)})$$

для $f^{\beta 3}_{(n)}$, $\tau^{\beta 3}_{(n)}$ приходим к зависимостям

$$f^{\beta 3}_{(1)}=(q^{\beta}_{(1)}-P^{\beta}_{(0)})/2, \qquad \tau^{\beta 3}_{(1)}=(q^{\beta}_{(1)}+P^{\beta}_{(0)})/2h_{(1)}$$

$$f^{\beta 3}_{(n)}=(q^{\beta}_{(n)}+q^{\beta}_{(n-1)})/2, \qquad \tau^{\beta 3}_{(n)}=(q^{\beta}_{(n)}-q^{\beta}_{(n-1)})/2h_{(n)} \quad (n=\overline{2,N-1}) \tag{3.2}$$

$$f^{\beta 3}_{(N)}=(P^{\beta}_{(N)}+q^{\beta}_{(N-1)})/2, \qquad \tau^{\beta 3}_{(N)}=(P^{\beta}_{(N)}-q^{\beta}_{(N-1)})/2h_{(N)}$$

в которых $q^{\beta}_{(n)}$, $P^{\beta}_{(0)}$, $P^{\beta}_{(N)}$ — контравариантные компоненты векторов $\mathbf{q}_{(n)}$, $\mathbf{P}_{(0)}$, $\mathbf{P}_{(N)}$ относительно векторов взаимного базиса, вычисляемых на поверхностях $S_{(0)}$, $S_{(N)}$ и $\Sigma_{(n)}$. Так как при введении функций $\mathbf{u}^{(n)}$ выполняются тождества $\psi_{(n)}\equiv 0$, то при подстановке (3.1), (3.2) вариационное уравнение (2.12) преобразуется к виду

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\int_{\Gamma}\mathbf{Y}_{(n)}\,\delta\mathbf{u}^{(n)}\,d\Gamma+\int_{\sigma}\!\!\int\boldsymbol{\mu}_{(n)}\,\delta\mathbf{u}^{(n)}\,d\sigma\right)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1}\int_{\sigma}\!\!\int t^{(n)}_{\beta}\,\delta q^{\beta}_{(n)}\,d\sigma=0$$

из которого вытекают векторные уравнения равновесия, статические граничные условия на Г, а также $[3\times(N-1)]$ скалярных соотношений

$$\boldsymbol{\mu}_{(0)}=\mathbf{T}_{(1)}-\mathbf{L}_{(1)}/h_{(1)}=0, \qquad \boldsymbol{\mu}_{(N)}=\mathbf{T}_{(N)}+\mathbf{L}_{(N)}/h_{(N)}=0 \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{\mu}_{(n)}=\mathbf{T}_{(n)}+\mathbf{T}_{(n+1)}+\mathbf{L}_{(n)}/h_{(n)}-\mathbf{L}_{(n+1)}/h_{(n+1)}=0 \quad (n=\overline{1,N-1})$$

$$\mathbf{Y}_{(0)}=\mathbf{R}^{s}_{(1)}-\mathbf{G}^{s}_{(1)}/h_{(1)}-(\mathbf{R}^{k}_{(1)}-\mathbf{M}^{k}_{(1)}/h_{(1)})n_k=0, \qquad \delta\mathbf{u}^{(0)}\neq 0 \tag{3.4}$$

$$\mathbf{Y}_{(N)}=\mathbf{R}^{s}_{(N)}+\mathbf{G}^{s}_{(N)}/h_{(N)}-(\mathbf{R}^{k}_{(N)}+\mathbf{M}^{k}_{(N)}/h_{(N)})n_k=0, \qquad \delta\mathbf{u}^{(N)}\neq 0$$

$$\mathbf{Y}_{(n)}=\mathbf{R}^{s}_{(n)}+\mathbf{R}^{s}_{(n+1)}+\mathbf{G}^{s}_{(n)}/h_{(n)}-\mathbf{G}^{s}_{(n+1)}/h_{(n+1)}-(\mathbf{R}^{k}_{(n)}+\mathbf{R}^{k}_{(n+1)}+$$

$$+\mathbf{M}^{k}_{(n)}/h_{(n)}-\mathbf{M}^{k}_{(n+1)}/h_{(n+1)})n_k=0, \qquad \delta\mathbf{u}^{(n)}\neq 0 \qquad (n=\overline{1,N-1})$$

$$t^{(n)}_{\beta}=\lambda^{(n)}_{\beta 3}+\lambda^{(n+1)}_{\beta 3}+\Lambda^{(n)}_{\beta 3}/h_{(n)}-\Lambda^{(n+1)}_{\beta 3}/h_{(n+1)}=0 \tag{3.5}$$

Скалярные соотношения (3.5) при использовании (2.17) и (3.2) позволяют установить зависимости между компонентами $q^{\beta}_{(n)}$ векторов $\mathbf{q}_{(n)}$ и деформационными величинами $\varepsilon^{(n)}_{ik}$, $2\varepsilon^{(n)}_{i3}$, $\varepsilon^{(n)}_{3}$, $\chi^{(n)}_{i3}$, $\chi^{(n)}_{ik}$, выраженными через компоненты векторов $\mathbf{u}^{(n)}$ $(n=\overline{0,N})$ при помощи формул (3.1).

Можно убедиться, что при подстановке в (3.3) левых частей уравнений (3.13) входящие в них векторы $\mathbf{q}_{(n)}$ взаимно сокращаются. Компоненты этих векторов в соответствии с (3.2) и (2.7) войдут при этом в уравнение равновесия (3.3) и граничные условия (3.4) через величины $N^{i}_{(n)}$, $M^{i3}_{(n)}$, $N^{3}_{(n)}$, причем они легко поддаются исключению из разрешающей системы уравнений при помощи отмеченных выше алгебраических зависимостей вида $q^{\beta}_{(n)}=q^{\beta}_{(n)}(\varepsilon^{(n)}_{ik},\chi^{(n)}_{ik},\varepsilon^{(n)}_{i3},\chi^{(n)}_{i3},\varepsilon^{(n)}_{3},d^{(n)}_{ik})$, в которых $d^{(n)}_{ik}$ — комплекс параметров, характеризующих жесткостные характеристики слоев и вычисляемых при конкретизации соотношений (1.6).

Проиллюстрируем сказанное для многослойной оболочки, слои которой выполнены из материалов, характеризующихся коэффициентами Пуассона $\nu_{(n)}$, модулями упругости $E_{(n)}$ и коэффициентами $\alpha_T^{(n)}$. При действии стационарного температурного поля $T_{(n)}=T_{(n)}(x^1, x^2, z_{(n)})$ соотношения закона Гука для n-го слоя оболочки в силу малой ее толщины с учетом (2.2) представим в виде

$$\sigma_{(n)}^{ik} = b_{(n)} [P_{(n)}^{iksm} (\varepsilon_{sm}^{(n)} + z_{(n)}\chi_{ik}^{(n)}) + \nu_{(n)}a^{ik}\varepsilon_3^{(n)} - (1+\nu_{(n)})\alpha_T^{(n)}a^{ik}T_{(n)}],$$
$$b_{(n)} = E_{(n)}/[(1+\nu_{(n)})(1-2\nu_{(n)})] \tag{3.6}$$

$$\overset{33}{\sigma}_{(n)}=b_{(n)}[(1-\nu_{(n)})\overset{(n)}{\varepsilon_3}+\nu_{(n)}a^{sm}(\overset{(n)}{\varepsilon_{sm}}+z_{(n)}\overset{(n)}{\chi_{sm}})-(1+\nu_{(n)})\overset{(n)}{\alpha_T}T_{(n)}],$$
$$\overset{i3}{\sigma}_{(n)}=G_{(n)}a^{is}(2\overset{(n)}{\varepsilon_{s3}}+z_{(n)}\overset{(n)}{\chi_{sm}}) \tag{3.7}$$
$$G_{(n)}=E_{(n)}/[2(1+\nu_{(n)})],\qquad \overset{iksm}{P_{(n)}}=\nu_{(n)}a^{sm}a^{ik}+(1-2\nu_{(n)})a^{si}a^{mk}$$

Для компонент тензора $\theta_{\beta3}{}^{(n)}$ можно получить выражения

$$\overset{(n)}{\theta_{s3}}=2\overset{(n)}{\varepsilon_{s3}}+z_{(n)}\overset{(n)}{\chi_{s3}}-a_{is}(\overset{i3}{f_{(n)}}+z_{(n)}\overset{i3}{\tau_{(n)}})/2G_{(n)}$$
$$\overset{(n)}{\theta_{33}}=\overset{(n)}{\varepsilon_3}-[(\overset{33}{f_{(n)}}+z_{(n)}\overset{33}{\tau_{(n)}})/b_{(n)}-\nu_{(n)}a^{sm}(\overset{(n)}{\varepsilon_{sm}}+z_{(n)}\overset{(n)}{\chi_{sm}})+ \tag{3.8}$$
$$+(1+\nu_{(n)})\overset{(n)}{\alpha_T}T_{(n)}]/(1-\nu_{(n)})$$

В первом варианте предлагаемой теории многослойных оболочек подстановка (3.8) в (2.11) в соответствии с уравнениями (2.16) приводит к расшифровке зависимостей (2.17), используемых совместно с (2.7) при установлении соотношений упругости для $\overset{i}{N}_{(n)}$, $\overset{i3}{M}_{(n)}$, $\overset{3}{N}_{(n)}$. Во втором варианте теории в (3.8) величины $f_{(n)}^{\beta3}$, $\tau_{(n)}^{\beta3}$ предварительно выражаются через $q_{(n)}^{\beta}$ с помощью зависимостей (3.2), затем по формулам (2.11) вычисляются величины $\lambda_{\beta3}^{(n)}$, $\Lambda_{\beta3}^{(n)}$. Внося затем эти величины в (3.5), приходим к уравнениям, решением которых $q_{(n)}^{\beta}$ выражаются через деформационные величины $\varepsilon_{ik}^{(n)}$, $\chi_{ik}^{(n)}$, $\varepsilon_{i3}^{(n)}$, $\chi_{i3}^{(n)}$, $\varepsilon_3^{(n)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Паймушин В. Н.* К вариационным методам решения нелинейных пространственных задач сопряжения деформируемых тел.– Докл. АН СССР, 1983, т. 273, № 5, с. 1083–1086.
2. *Паймушин В. Н.* Вариационные постановки задач механики составных тел кусочно-однородной структуры.– Прикл. механика, 1985, т. 21, № 1, с. 27–34.
3. *Григолюк Э. И., Куликов Г. М.* Расчет радиальных шин на основе обобщенной теории Тимошенко.– Изв. АН СССР. МТТ. 1984, № 4, с. 166–174.
4. *Григолюк Э. И., Коган Ф. А.* Современное состояние теории многослойных оболочек.– Прикл. механика, 1972, т. 8, № 6. с. 3–17.
5. *Дудченко А. А., Лурье С. А., Образцов И. Ф.* Анизотропные многослойные пластины и оболочки.– В кн.: Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНИТИ, 1983, т. 15, с. 3–68.
6. *Grigoliouk E. I., Chulkov P. P.* On the theory multilayer shells.– In: Contribution to the theory of aircraft structures. Delft. University Press. 1972, p. 171–183.
7. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
8. *Паймушин В. Н.* Новый вариант основных уравнений теории тонких оболочек типа Тимошенко при произвольных перемещениях.– В кн.: Материалы 2-й Всесоюз. научн.-техн. конф. «Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов», Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1984, т. 3, с. 13–18.
9. *Лазько В. А.* Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев. 1. Вариационный принцип теории упругих слоистых анизотропных систем при наличии зон неидеального контакта.– Механика композитных материалов, 1981, № 5, с. 832–836. 2. Обобщенные уравнения ортотропных слоистых оболочек при разрывных перемещениях на границе раздела.– Механика композитных материалов, 1982, № 1, с. 77–84.
10. *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 415 с.

Казань

Поступила в редакцию
4.IV.1985