

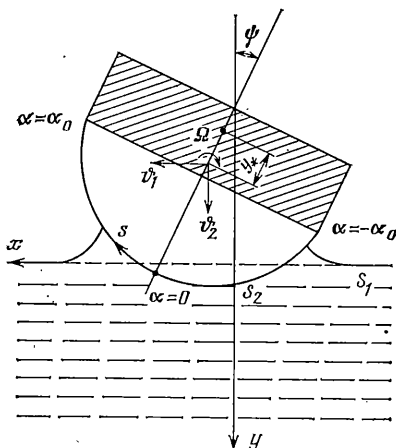
УДК 533.6.013.42

НАКЛОННЫЙ ВХОД ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В ЖИДКОСТЬ

ГОРШКОВ А. Г., ДРОБЫШЕВСКИЙ Н. И.

Задачам вертикального входа оболочек вращения в жидкость посвящено большое количество работ [1, 2]. Значительно менее изучен процесс несимметричного погружения оболочек в жидкость, причем большинство имеющихся результатов получено экспериментальным путем в основном для жестких тел.

В публикуемой работе рассматривается начальный этап процесса наклонного входа упругих тонкостенных бесконечно длинных цилиндрических оболочек, связанных с твердым телом, в полупространство, занятое идеальной сжимаемой жидкостью (фиг. 1). В процессе погружения образующая оболочки параллельна первоначально невозмущенной свободной поверхности жидкости. В момент касания



Фиг. 1

жидкости, вызванное таким погружением тела, будет плоским. Вязкостью, весомостью и изменением внутренней энергии частиц жидкости пренебрегаем.

1. Для описания поведения жидкости используются переменные Лагранжа, которые позволяют определить перемещения свободной поверхности жидкости и точно поставить граничное условие непосредственное на смоченной поверхности оболочки.

Движение жидкости рассматривается в неподвижной декартовой системе

координат xOy (фиг. 1). Начало системы координат выбирается в точке первого касания оболочки поверхности жидкости. Ось x направлена по первоначально невозмущенной горизонтальной поверхности жидкости перпендикулярно образующей оболочки, ось y — вертикально вниз, нормально к свободной поверхности жидкости.

В переменных Лагранжа уравнения, описывающие плоское движение жидкости, будут иметь вид [3]:

$$\frac{\partial u_1^\circ}{\partial t^\circ} = -\frac{1}{\rho^\circ} \frac{\partial p^\circ}{\partial x^\circ}, \quad \frac{\partial u_2^\circ}{\partial t^\circ} = -\frac{1}{\rho^\circ} \frac{\partial p^\circ}{\partial y^\circ}, \quad \frac{\partial x^\circ}{\partial t^\circ} = u_1^\circ$$

$$\frac{\partial y^\circ}{\partial t^\circ} = u_2^\circ, \quad \rho^\circ J = \text{const}, \quad p^\circ = p^\circ - 1 \quad (1.1)$$

$$u_1^\circ = u_1/c_0, \quad u_2^\circ = u_2/c_0, \quad x^\circ = x/R, \quad y^\circ = y/R$$

$$t^\circ = tc_0/R, \quad p^\circ = p/(\rho_0 c_0^2), \quad \rho^\circ = \rho/\rho_0$$

Здесь u_1, u_2 — составляющие скорости частиц жидкости в направлении осей x, y соответственно, ρ — плотность жидкости, p — давление в жидкости, $J = (x, y)/(x_0, y_0)$ — якобиан преобразования, x_0, y_0 — начальные коор-

динаты частиц жидкости, ρ_0 — плотность невозмущенной жидкости, c_0 — скорость звука в жидкости.

Для описания нестационарных колебаний оболочки используется один из вариантов геометрически нелинейных уравнений, учитывающих сдвиг и инерцию вращения поперечного сечения [4].

Положение точки оболочки будем определять гауссовой координатой α_1 срединной поверхности и координатой γ , направленной в сторону внешней нормали (плоское деформированное состояние). Система координат в процессе погружения движется вместе с твердым телом. Выбирая в качестве координаты α_1 , длину дуги окружности s от рассматриваемой точки до точки, лежащей на плоскости симметрии (фиг. 1), получим для параметров Ламе следующие выражения: $A_1=1$, $A_2=R$, где R — радиус срединной поверхности оболочки. Тогда уравнения движения цилиндрической оболочки при погружении в жидкость можно записать в форме

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 U^\circ}{\partial t^{\circ 2}} = \frac{\partial}{\partial \alpha} (T^\circ - \varphi Q^\circ) + \eta T^\circ + Q^\circ - \left[\frac{dv_1^\circ}{dt^\circ} \cos(\alpha + \psi) - \frac{dv_2^\circ}{dt^\circ} \sin(\alpha + \psi) + \frac{d\Omega^\circ}{dt^\circ} (1 - y_*^\circ \cos \alpha) \right] \frac{1}{k \xi^2} \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 W^\circ}{\partial t^{\circ 2}} = \frac{\partial}{\partial \alpha} (Q^\circ + \eta T^\circ) - T^\circ + \varphi Q^\circ - \left[\frac{dv_1^\circ}{dt^\circ} \sin(\alpha + \psi) + \frac{dv_2^\circ}{dt^\circ} \cos(\alpha + \psi) - \frac{d\Omega^\circ}{dt^\circ} y_*^\circ \sin \alpha \right] \frac{1}{k \xi^2} - \frac{1 - \mu^2}{k^2} \xi p^\circ$$

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^{\circ 2}} = - \frac{\partial M^\circ}{\partial \alpha} - \eta M^\circ + \frac{12}{k} Q^\circ + \frac{d\Omega^\circ}{dt^\circ} \frac{1}{\xi^2}$$

$$U^\circ = U/h, \quad W^\circ = W/h, \quad k = h/R, \quad \alpha = s/R$$

$$Q^\circ = Q/(Bk), \quad T^\circ = T/(Bk), \quad M^\circ = Mh/(Dk)$$

$$v_1^\circ = v_1/c_0, \quad v_2^\circ = v_2/c_0, \quad \Omega^\circ = \Omega R/c_0$$

$$\eta = k(\partial W^\circ / \partial \alpha - U^\circ), \quad \xi = c/c_0, \quad \zeta = \rho_0 c_0^2 / E$$

$$B = Eh/(1 - \mu^2), \quad D = \frac{1}{2} E h^3 / (1 - \mu^2), \quad c = \{E / [\rho_* (1 - \mu^2)]\}^{1/2}$$

Здесь U , W — упругие перемещения точек срединной поверхности вдоль α , γ , φ — угол поворота нормали, E — модуль упругости, μ — коэффициент Пуассона, c — скорость звука в материале оболочки, ρ_* — плотность материала оболочки, h — толщина оболочки, T , Q , M — усилия и момент в срединной поверхности оболочки, v_1 , v_2 , Ω — составляющие скорости движения тела, связанного с оболочкой, y_* — расстояние от центра масс тела до центра кривизны оболочки, положительное, если центр масс смещен относительно центра кривизны в направлении положительной оси y (центр масс лежит в плоскости симметрии оболочки), ψ — угол тангажа в момент времени t .

Выражения для усилий и момента имеют вид

$$T^\circ = \varepsilon/k, \quad M^\circ = -\kappa, \quad Q^\circ = \frac{1}{2}(1 - \mu) \delta^2 \omega/k$$

$$\delta^2 = 0,86, \quad \varepsilon = k \partial U^\circ / \partial \alpha + k W^\circ + \frac{1}{2} \eta^2$$

$$\omega = \eta - \varphi, \quad \kappa = \partial \varphi / \partial \alpha \quad (1.3)$$

Заменяя воздействие оболочки на тело эквивалентной системой усилий и моментов, приложенных в точках закрепления, получим следующие уравнения для определения линейных и угловой составляющих скорости движения тела ($M_0^\circ = M_0/(R^2 \rho_0)$, $J_0^\circ = J_0/(R \rho_0)$, $V_1^\circ = V_1/c_0$, $V_2^\circ = V_2/c_0$

$$M_0 dv_1/dt = [-T|_{\alpha=\alpha_0} \cos(\psi + \alpha_0) + Q|_{\alpha=\alpha_0} \sin(\psi + \alpha_0) + T|_{\alpha=-\alpha_0} \cos(\alpha_0 - \psi) - Q|_{\alpha=-\alpha_0} \sin(\alpha_0 - \psi)] k^2 / ((1 - \mu^2) \xi)$$

$$\begin{aligned}
 M_0 dv_2/dt = & [T|_{\alpha=\alpha_0} \sin(\psi+\alpha_0) - Q|_{\alpha=\alpha_0} \cos(\psi+\alpha_0) + \\
 & + T|_{\alpha=-\alpha_0} \sin(\alpha_0-\psi) + Q|_{\alpha=-\alpha_0} \cos(\alpha_0-\psi)] k^2 / ((1-\mu^2)\xi) \\
 J_0 d\Omega/dt = & [1/12 k (M|_{\alpha=-\alpha_0} - M|_{\alpha=\alpha_0}) - T|_{\alpha=\alpha_0} + T|_{\alpha=-\alpha_0} + \\
 & + y_* [(T|_{\alpha=\alpha_0} - T|_{\alpha=-\alpha_0}) \cos \alpha_0 + (Q|_{\alpha=\alpha_0} + \\
 & + Q|_{\alpha=-\alpha_0}) \sin \alpha_0] k^2 / ((1-\mu^2)\xi), \quad d\psi/dt = \Omega
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

где α_0 — угол полураствора цилиндрической оболочки, M_0 , J_0 — масса и момент инерции, приходящиеся на единицу длины тела, соединенного с оболочкой. (Дальше везде градус опущен). Начальные условия будут следующими:

$$\begin{aligned}
 v_1|_{t=0} = V_1, \quad v_2|_{t=0} = V_2, \quad \Omega|_{t=0} = \Omega_0, \quad \psi|_{t=0} = \psi_0 \\
 u_1|_{t=0} = u_2|_{t=0} = 0, \quad x|_{t=0} = x_0, \quad y|_{t=0} = y_0 \\
 p|_{t=0} = 0, \quad U|_{t=0} = W|_{t=0} = \Phi|_{t=0} = 0 \\
 \partial U/\partial t|_{t=0} = \partial W/\partial t|_{t=0} = \partial \Phi/\partial t|_{t=0} = 0
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Граничные условия запишем в форме

$$\begin{aligned}
 p|_{S_1} = 0, \quad u_1|_{S_\infty} = u_2|_{S_\infty} = 0, \quad [u_1 \sin(\alpha+\psi) + \\
 + u_2 \cos(\alpha+\psi)]|_{S_2} = v_1 \sin(\alpha+\psi) + v_2 \cos(\alpha+\psi) - \\
 - \Omega y_* \sin \alpha + k \partial W/\partial t, \quad U|_{\alpha=\pm\alpha_0} = W|_{\alpha=\pm\alpha_0} = \Phi|_{\alpha=\pm\alpha_0} = 0
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

где S_1 — свободная поверхность жидкости, S_2 — поверхность соприкосновения оболочки и жидкости, S_∞ — невозмущенная поверхность жидкости.

2. Решение системы уравнений гидроупругого взаимодействия (1.1) — (1.6) проводится конечно-разностными методами.

Расчетная область жидкости покрывается сеткой, ячейки которой представляют собой четырехугольные лагранжевы элементы, движущиеся вместе с жидкостью. Положение в пространстве и скорости определяются в вершинах четырехугольников, а давление и плотность — в центрах ячеек. Конечно-разностные уравнения для скоростей получаются путем интегрирования обеих частей уравнений (1.4) по некоторому малому объему и преобразования соответствующих интегралов по объему к интегралам вдоль линии. Контур интегрирования для данной вершины ячейки образуется отрезками, проведенными через центры соседних ячеек. Плотность для данной ячейки определяется из условий сохранения массы жидкости в ней, а давление — из уравнения состояний [3, 5].

Для нахождения поверхности соприкосновения оболочки и жидкости используется следующий способ. В схему численного расчета вводятся по две дополнительные узловые точки на левой и правой границах контакта, в которых вычисляются координаты и скорости. Первый узел соответствует границе смоченной поверхности тела, при этом составляющая его скорости, нормальная к поверхности оболочки, находится из граничного условия (1.6), касательная составляющая скорости определяется при помощи линейной интерполяции между двумя соседними узлами ячейки. Второй узел находится на свободной поверхности жидкости на расстоянии $\delta_0 \ll V_* \Delta t$ от первого (где V_* — скорость расширения смоченной поверхности оболочки, Δt — величина шага по времени) и скорость его равна скорости движения, которая была у ближайшего узла ячейки, лежащего на смоченной поверхности оболочки, на последнем шаге по времени, когда он еще находится на свободной поверхности жидкости.

Ширина смоченной поверхности оболочки определяется на каждом шаге по времени при помощи нахождения точки пересечения (касания) поверхности оболочки со свободной поверхностью жидкости, которая аппроксимируется ломаной, проходящей через узлы сетки, находящиеся на этой поверхности, и два дополнительных узла. При таком способе аппроксимации поверхности жидкости вычисляемая на каждом шаге по времени скорость расширения смоченной поверхности оболочки достаточно точно соответствует реальной скорости расширения, что приводит почти к полному устранению нефизичных колебаний в величинах давления, распределенного на поверхности тела, возникающих при захвате телом новой ячейки жидкости.

При определении гидродинамического давления, распределенного по смоченной поверхности оболочки, необходимо учесть дополнительную силу, обусловленную дискретностью захвата в схеме расчета телом новых частиц жидкости. Необходимость введения в расчет этой силы связана с тем, что в ячейке, в которой происходит захват телом свободной поверхности жидкости, не выполняется закон сохранения импульса. Расширение на n -м шаге по времени смоченной поверхности оболочки приводит к изменению нормальных к ней скоростей частиц жидкости, находящихся под поверхностью захвата (т. е. той части жидкости ячейки, которая на данном шаге по времени попала под смоченную поверхность оболочки). Следовательно,

изменение количества движения ячейки с учетом принятых разностных аппроксимаций, обусловленное захватом на n -м шаге по времени свободной поверхности жидкости, дает искомую величину дополнительной силы. При задании гидродинамического давления, действующего на оболочку, эта сила равномерно распределяется по ширине захвата на данном шаге по времени.

При численном исследовании движения жидкости в лагранжевых переменных наблюдается появление нефизических передвижений вершин ячеек, которые вызваны коротковолновыми возмущениями и приводят к значительному искажению расчетных ячеек. Для сглаживания этих возмущений используется регуляризация расчетной сетки [6].

Сведение дифференциальных уравнений колебаний оболочки (1.2) к разностным проводится интегроинтерполяционным методом [7].

Отметим, что, заменив усилия через перемещения, уравнения можно представить в форме

$$\partial^2 U / \partial t^2 = L_1(U) + K_1(W, \varphi) + N_1(U, W, \varphi) + F_1 \quad (2.1)$$

$$\partial^2 W / \partial t^2 = L_2(W) + K_2(U, \varphi) + N_2(U, W, \varphi) + F_2$$

$$\partial^2 \varphi / \partial t^2 = L_3(\varphi) + K_3(U, W) + N_3(U, W, \varphi) + F_3$$

где L_j , K_j ($j=1, 2, 3$) — линейная часть уравнений (1.2), N_j — нелинейная часть уравнений (1.2), F_j — внешняя нагрузка.

Проинтегрировав обе части уравнений (1.2) на отрезке $[(i-1/2)\Delta\alpha, (i+1/2)\Delta\alpha]$ ($\Delta\alpha$ — шаг равномерной сетки, которой покрывается срединная поверхность оболочки) и предполагая, что величины, находящиеся под знаком интеграла, за исключением гидродинамической нагрузки, постоянны по длине отрезка, получим следующую систему уравнений:

$$d^2\theta/dt^2 + [A_1]\theta + [A_2]\theta + N = F \quad (2.2)$$

где $\theta = \{U_0, \dots, U_I, W_0, \dots, W_I, \varphi_0, \dots, \varphi_I\}^T$ — вектор обобщенных узловых перемещений срединной поверхности оболочки, $[A_1]$, $[A_2]$ — матрицы, в которые преобразуется линейная часть дифференциального оператора (1.2) (соответственно операторы L , K) при замене его разностными соотношениями, N — вектор, в который преобразуются нелинейные члены уравнений (1.2). Аппроксимация усилий и моментов (1.3) проводится с помощью центральных разностей с сохранением второго порядка аппроксимации.

Заменяя вторую производную по времени центральными разностями и задавая разностный оператор $[A_1]$ в неявном виде, получим следующую конечно-разностную схему с весом χ :

$$[E_1 + \chi \Delta \tau^2 A_1] (\theta^{m+1} - 2\theta^m + \theta^{m-1}) / \Delta \tau^2 + [A] \theta^m + N^m = F^m \quad (2.3)$$

где $[A] = [A_1] + [A_2]$ — матрица, в которую преобразуется линейная часть дифференциальных операторов (1.2), $[E_1]$ — единичная матрица, F — вектор внешней нагрузки, m — номер шага по времени.

В случае неподвижного жесткого заземления кромок оболочки граничное условие (1.6) сводится к следующему разностному соотношению:

$$U_0 = U_I = W_0 = W_I = \varphi_0 = \varphi_I = 0 \quad (2.4)$$

Из построения матрицы $[A_1]$ следует, что она является трехдиагональной, следовательно, для решения системы линейных уравнений (2.3) можно применять экономичный метод прогонки [7].

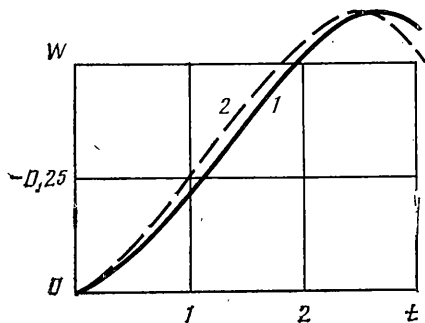
Конечно-разностная система уравнений (2.3) со вторым порядком аппроксимирует исходную дифференциальную систему уравнений. Использование оператора $[A_1]$ в неявном виде приводит при $\chi=1$, как показали расчеты, к повышению максимально допустимого шага по времени по сравнению с явной схемой ($\chi=0$), устойчивость которой определяется условием Куранта $\Delta \tau \leq \Delta \alpha / \xi$.

Уравнения (1.4), используемые для определения скорости погружения тела, аналогичным образом сводятся к конечно-разностным соотношениям.

Общая схема расчета сводится к ряду переходов от состояния на мо-

мент времени t^n к состоянию на момент времени $t^{n+1} = t^n + \Delta t$, при этом на каждом этапе перехода последовательно решаются уравнения движения жидкости, оболочки и тела.

Ограничения, накладываемые устойчивостью схем, могут привести к тому, что максимальный допустимый шаг по времени для разностных уравнений динамики оболочки будет существенно меньше, чем для жидкости, поэтому за один шаг расчета по жидкости Δt приходится выполнять несколько шагов для оболочки $\Delta \tau$ ($\Delta t / \Delta \tau = l$). При этом предполагается, что гидродинамическая нагрузка постоянна для всех шагов перехода θ^n к θ^{n+1} .



Фиг. 2

3. В качестве тестового примера рассмотрим задачу о вертикальном входе в воду цилиндрической оболочки шарнирно соединенной с твердым телом ($V_1=0$, $V_2=6,66 \cdot 10^{-3}$, $\Omega_0=0$, $\psi_0=0$, $M_0=0,258$, $k=0,01$, $\alpha_0=0,425$, $\xi=3,77$, $\zeta=9,9 \cdot 10^{-3}$, $\mu=0,3$).

На фиг. 2 приведены изменения во времени прогиба W в точке $\alpha=0$, причем кривая 1 получена с помощью данной численной методики, а кривая 2 взята из [8], где в линейной постановке рассмотрена аналогичная задача о погружении оболочки в несжимаемую жидкость. Это сравнение показывает, что при скорости входа $V_2=6,66 \cdot 10^{-3}$ влияние сжимаемости воды незначительно, результаты, полученные в данной работе, достаточно хорошо согласуются с результатами из [8].

Рассмотрим влияние величины горизонтальной составляющей начальной скорости входа на процесс проникания цилиндрической оболочки в жидкость ($V_1=V_2=0,0266$, $\Omega_0=\psi_0=0$, $M_0=1,44$, $J_0=0,162$, $y_0=0,4$, $k=0,03$, $\xi=3,77$, $\zeta=9,9 \cdot 10^{-3}$, $\mu=0,3$). Зависимости от времени ускорений тела v_1^* (кривая 1), v_2^* (кривая 2), Ω^* (кривая 3), а также мембранных σ_m и изгибных σ_n напряжений (в крайних волокнах) приведены на фиг. 3, 4 (величина J_0 выбрана из предположения, что масса тела равномерно распределена по основанию оболочки). Кривая 1 на фиг. 4 соответствует мембранным напряжениям в точке с координатой $\alpha=\alpha_0$, а кривые 2, 3, 4 — изгибным напряжениям в точках $\alpha=0$, $-\alpha_0$, α_0 ($\sigma_m^0=\sigma_m(1-\mu^2)/(kE)=T^0$, $\sigma_n^0=\sigma_n(1-\mu^2)/(kE)=M^0/2$).

Распределение прогибов при наклонном входе в отличие от случая вертикального погружения имеет несимметричный характер, при этом с увеличением глубины проникания эта несимметричность возрастает, а максимум смещается в направлении горизонтальной составляющей скорости проникания.

На начальном этапе погружения ($t < 1,25$), вследствие того что скорость расширения смоченной поверхности значительно превышает величину горизонтальной составляющей скорости погружения, различия в напряженных состояниях при вертикальном и наклонном входе незначительны. С увеличением глубины проникания существенные различия наблюдаются только в характере изменения и величинах изгибных напряжений. Изгибные напряжения с наветренной стороны $\alpha > 0$ уменьшаются (по абсолютной величине), а с подветренной $\alpha < 0$ увеличиваются, при этом их полусумма $(\sigma_n|_{\alpha=\alpha_0} + \sigma_n|_{\alpha=-\alpha_0})/2$ практически равна напряжениям, возникающим в этих точках в случае вертикального входа ($V_2=0,0266$, $V_1=0$).

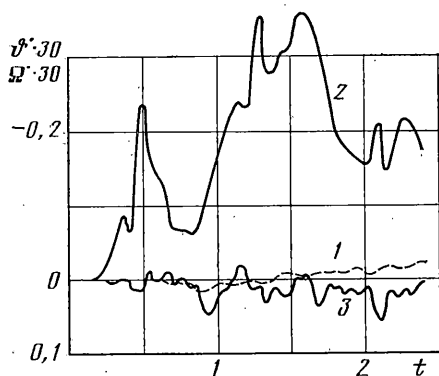
Изменение величины горизонтальной составляющей начальной скорости входа практически не сказывается на мембранных напряжениях во всех точках и на изгибных напряжениях в точке $\alpha=0$. Наибольшее влияние величина V_1 оказывает на изгибные напряжения в точках закрепления $\alpha=\pm\alpha_0$.

Увеличение начальной скорости V_1 приводит почти к линейному росту изгибных напряжений с подветренной стороны и уменьшению — с наветренной стороны. Расчеты показали, что изменения горизонтальной составляющей v_1 и угловой Ω скоростей в процессе погружения незначительные, поэтому учет их изменения во время проникания не оказывает существенного влияния на напряженно-деформированное состояние оболочки (в изучаемом диапазоне скоростей входа).

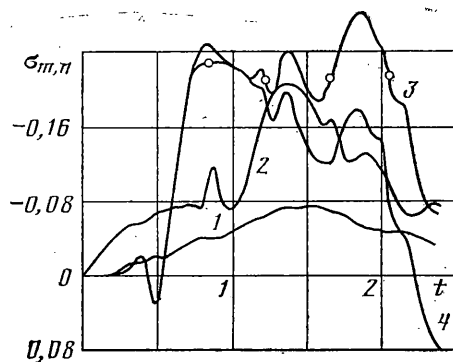
Рассмотрим далее влияние угла тангажа ψ_0 на процесс взаимодействия оболочки с жидкостью. Зависимости от времени линейных v_1^* (кривая 1), v_2^* (кривая 2) и углового Ω^* (кривая 3) ускорений тела, а также напряжений в характерных точках оболочки приведены на фиг. 5, 6 ($V_1=0$, $V_2=0,0266$, $\psi_0=0,02$, $\Omega_0=0$). Кривая 1 на фиг. 6 соответствует σ_m в точке $\alpha=\alpha_0$, а кривые 2–4 — напряжениям σ_n в точках $\alpha=0$, $-\alpha_0$, α_0 .

Распределение прогибов имеет несимметричный характер, наибольшей величины прогиб достигает в точке, первой коснувшейся жидкости ($\alpha=-\psi_0$).

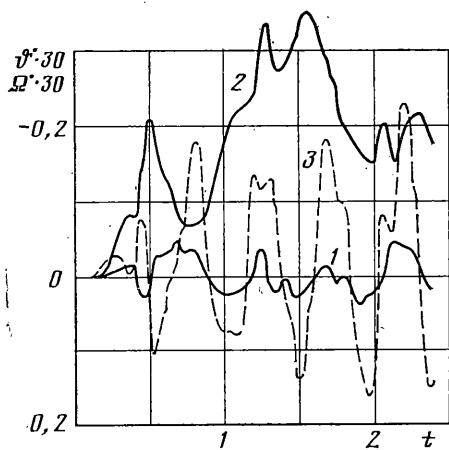
Основные отличия наклонного входа от вертикального наблюдаются в характере изменения и величинах изгибных напряжений. Изгибные напряжения со стороны точки закрепления, смещенной ближе к свободной поверхности $\alpha < 0$, уменьшаются по абсолютной величине, а с противоположной — увеличиваются.



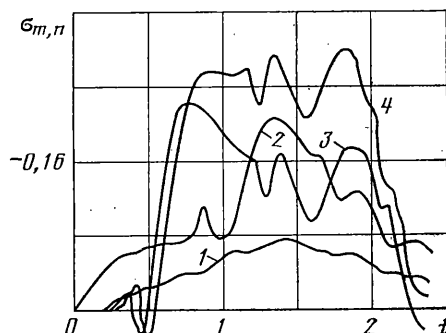
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Максимальные величины мембранных напряжений во всех точках оболочки, изгибных в точке $\alpha=0$ и вертикальной составляющей ускорения тела v_2^* с увеличением угла тангажа φ_0 несколько уменьшаются.

Наибольшее влияние угол тангажа φ_0 оказывает на изгибные напряжения в районе точек закрепления, причем это влияние проявляется уже на небольших глубинах погружения. Увеличение угла φ_0 приводит почти к линейному росту максимальных изгибных напряжений в районе точки закрепления, находящейся дальше от свободной поверхности жидкости и уменьшению — с противоположной стороны.

Изменения горизонтальной составляющей и угловой скоростей в процессе погружения незначительны. Следовательно, учет их изменения во время проникновения не должен значительно сказываться на напряженно-деформированном состоянии оболочки, что подтверждается расчетами. Заметим, что влияние изменения угловой скорости Ω на напряженное состояние оболочки в данном случае более значительно, чем в случае входа с ненулевой горизонтальной составляющей.

Наличие в момент касания оболочкой жидкости угловой скорости сводится к появлению горизонтальной скорости в точках поверхности оболочки, вследствие несопадения центра масс тела и центра кривизны оболочки, и изменению угла тангажа в процессе погружения, при этом характер ее влияния на напряженно-деформированное состояние оболочки аналогичен рассмотренным выше случаям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Горшков А. Г. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. (Удар и погружение). Л.: Судостроение, 1976. 199 с.
2. Кубенко В. Д. Проникание упругих оболочек в сжимаемую жидкость. Киев: Наук. думка, 1981. 159 с.
3. Нох В. Ф. СЭЛ — совместный эйлерово-лагранжев метод для расчета нестационарных двухмерных задач. — В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967, с. 128—184.
4. Огибалов П. М. Вопросы динамики и устойчивости оболочек. М.: Изд-во МГУ, 1963. 419 с.
5. Дробышевский Н. И. Проникание сферических и цилиндрических тел в идеаль-

- ную жидкость.— В кн.: Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. Тр. 4-го семинара. Томск; Изд-во Том. ун-та, 1981, с. 74—84.
6. Дробышевский Н. И. Наклонный вход цилиндрических тел в жидкость.— В кн.: Взаимодействие пластин и оболочек с жидкостью и газом. М.: Изд-во МГУ, 1984, с. 92—98.
7. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
8. Богомолов В. Г., Горшков А. Г. Проникание в жидкость цилиндрических оболочек.— В кн.: Статика и динамика тонкостенных конструкций. М.: Изд-во МГУ, 1980, с. 143—151.

Москва

Поступила в редакцию
5.VI.1986