МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1987

УДК 622.011;622.023

К МОДЕЛИ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД

ГЛУШКО А. И.

При экспериментальном исследовании разрушения горных пород в условиях квазистатического нагружения одной из основных целей является получение критерия разрушения (библиографию см. в [1, 2]).

При математическом описании разрушения горных пород под действием интенсивных быстроизменяющихся нагрузок приходится привлекать дополнительные гипотезы. Это связано с тем обстоятельством, что механические свойства среды в неразрушенном и разрушенном состояниях различны, а закономерности изменения этих свойств мало изучены. В [3–8] авторы исходят из представления о мгновенном разрушении, т. е. вводится понятие движущегося фронта разрушения, при переходе через который скачком изменяются не только физические величины (скорость, напряжения и т. д.), но и механические свойства среды. Внутренняя непротиворечивость предложенных схем разрушения показывается авторами на примере решения одномерных задач о движении фронта разрушения.

В публикуемой работе сделан анализ модели мгновенного разрушения с «силовым» критерием разрушения при сложном напряженном состоянии в условиях плоской деформации. Показано, что в рамках этой модели задача распада произвольного разрыва оказывается некорректной, и поэтому модель не может быть использована для решения задачи разрушения при сложном напряженном состоянии. Модели постепенного разрушения рассматриваться не будут.

1. Сформулируем положения модели [3]. Считается, что разрушение происходит мгновенно на распространяющейся поверхности — фронте разрушения, на котором физические величины и механические параметры среды претерпевают разрыв. Впереди этой поверхности материал неразрушен и описывается некоторой моделью сплошной среды, за поверхностью располагается разрушенный материал. На фронте разрушения предельные значения тензора напряжений σ_{ij} со стороны неразрушенной среды должны удовлетворять определенному уравнению, критерию разрушения $\varphi(\sigma_{ij})=0$.

В [3] рассматривалась задача разрушения неограниченного горного массива зарядом *ВВ*, помещенном внутри сферической полости. Заряд после детонации превращался в газ. Неразрушенный материал описывается моделью линейно-упругого тела, а разрушенная среда — моделью упругопластического тела. Принято, что скорость возмущений в разрушенной среде a_1 меньше скорости продольных волн в неразрушенном материале a_2, $a_1<a_2$. Критерий разрушения: нормальные растягивающие и касательные напряжения не должны превышать некоторых предельных значений. Показано, что скорость фронта разрушения D должна удовлетворять неравенствам $0<D<a_1$ либо $D>a_2$.

Рассмотрим случай плоской деформации, принимая, что среда в разрушенном и неразрушенном состояниях описывается моделью линейно-упругого тела. Такая схематизация продиктована двумя соображениями. Во-первых, разрушение горных пород исследовано не достаточно полно и к настоящему времени общепринятая модель разрушения не сформировалась. Во-вторых, при таком предположении можно указать на некоторые математические трудности, которые не удается обнаружить при решении одномерных задач. Обозначим через a, b, ρ с индексами 1 и 2 скорости продольных и поперечных волн и плотность в разрушенном и неразрушенном материале соответственно. Примем, что выполняются следующие неравенства:

$$b_1<b_2<a_1<a_2, \quad \rho_1\leqslant\rho_2 \tag{1.1}$$

Введем декартову систему координат $OXYZ$, считая, что все величины зависят от координаты x и времени t. Проекции векторов скорости и смещений на оси OX и OY обозначим u, v, U, V соответственно. Обозначим $\varepsilon=\partial U/\partial x$, $\gamma=\partial V/\partial x$.

Используя закон Гука, выразим компоненты тензора напряжений σ_{ij} через ε и γ.

Системы уравнений, описывающие движения сплошной среды в разрушенном и неразрушенном состояниях, имеют вид

$$\partial u/\partial t=a_i^2\partial\varepsilon/\partial x, \quad \partial\varepsilon/\partial t=\partial u/\partial x \tag{1.2}$$
$$\partial v/\partial t=b_i^2\partial\gamma/\partial x, \quad \partial\gamma/\partial t=\partial v/\partial x$$

Здесь и ниже значение индекса $i=1$ соответствует разрушенному материалу, $i=2$ — неразрушенному.

Обозначим через $x_0=x_0(t)$ траекторию движения фронта разрушения, $D=dx_0/dt$ — скорость фронта; $M=\rho(D-u)$.

Тогда на линии $x_0=x_0(t)$ должны выполняться следующие динамические и кинематические условия совместимости соответственно

$$[Mu+\rho a^2\varepsilon]=p_0, \quad [M]=[Mv+\rho b^2\gamma]=0 \tag{1.3}$$
$$[M\varepsilon/\rho+u]=[M\gamma/\rho+v]=0 \tag{1.4}$$

Здесь для скачков функций введено обозначение

$$[f]=\lim_{h\to 0}[f(t, x_0+h)-f(t, x_0-h)]$$

Величина p_0 в правой части (1.3) возникает в связи со следующим обстоятельством. Как известно из теории деформаций, любое деформированное состояние может быть принято в качестве отсчетного. В упругой среде напряжения являются однозначными функциями деформаций, $\sigma_{ij}=\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij})$. Если в качестве отсчетного состояния выбрать некоторое состояние, соответствующее всестороннему сжатию, то из условия $\varepsilon_{ij}=0$ следует, что $\sigma_{ij}=p_0\delta_{ij}$, $p_0=\mathrm{const}$. В частности, в этом случае закон Гука (при малых деформациях) будет записываться в виде

$$\sigma_{ij}=\lambda\varepsilon_\alpha^\alpha\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}+p_0\delta_{ij}.$$

Здесь p_0 — гидростатическое давление в отсчетном состоянии, когда $\varepsilon_{ij}=0$. Необходимо допустить, что при разрушении начальная отсчетная конфигурация, в которой до разрушения выполнялись условия $\sigma_{ij}=0$, $\varepsilon_{ij}=0$, не будет соответствовать разгруженному состоянию в разрушенном материале. В частности, можно принять, что в разрушенном материале начальная отсчетная конфигурация соответствует состоянию всестороннего сжатия с давлением p_0.

Отметим, что в работе В. Н. Николаевского [1] указывается ряд материалов, для которых разгруженная конфигурация среды в разрушенном состоянии не совпадает с начальной ненагруженной конфигурацией; в частности для этих материалов плотность среды после разрушения не совпадает с начальной плотностью.

В качестве критерия разрушения примем условие ограниченности максимальных касательных напряжений, т. е.

$$\varphi={}^1/_2 s_{ij}s_{ij}\leqslant J_0^2 \tag{1.5}$$

Здесь $J_0=\mathrm{const}$, s_{ij} — компоненты девиатора тензора напряжений.

2. Рассмотрим локальную задачу Коши. Допустим, что при $t=0$ слой из неразрушенного материала ($0<x<x_2$) приводится в соприкосновение со слоем из разрушенного материала ($x_1<x<0$), причем оба слоя находятся в напряженном состоянии. Пусть

$$u_1(0, x)=u_{10}(x), \; v_1(0, x)=v_{10}(x), \; \varepsilon_1(0, x)=\varepsilon_{10}(x) \tag{2.1}$$

---

[1] *Николаевский В. Н.* Предельная скорость фронта разрушения и динамические перегрузки материалов. Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1979. № 123. 59 с.

$$\gamma_1(0, x)=\gamma_{10}(x) \quad x_1<x<0;$$

$$u_2(0, x)=u_{20}(x), \; v_2(0, x)=v_{20}(x)$$

$$\varepsilon_2(0, x)=\varepsilon_{20}(x), \; \gamma_2(0, x)=\gamma_{20}(x) \quad 0<x<x_2$$

Требуется найти в некоторой окрестности (x_1, x_2) функции $u_1(t, x)$, $v_1(t, x)$, $\varepsilon_1(t, x)$, $\gamma_1(t, x)$, $u_2(t, x)$, $v_2(t, x)$, $\varepsilon_2(t, x)$, $\gamma_2(t, x)$, линию $x_0=x_0(t)$, $x_0(0)=0$, такие, что u_1, v_1, ε_1, γ_1 удовлетворяют системе (1.2) при $i=1$ слева от линии $x_0=x_0(t)$, а функции u_2, v_2, ε_2, γ_2 удовлетворяют системе (1.2) при $i=2$ справа от линии $x_0=x_0(t)$, причем на линии $x_0=x_0(t)$ должны быть выполнены уравнения (1.3), (1.4) и уравнение (1.5), если $D\neq0$. Линия $x_0=x_0(t)$ определяет траекторию фронта разрушения, если $D\neq0$. (Для простоты рассматривается случай $p_0=0$, $\rho_1\approx\rho_2$.)

Рассмотрим три области:

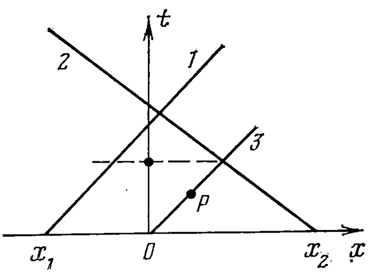
$$G=\{t, x: 0<t<T, \; x_1+a_1t<x<x_2-a_2t\}$$

$$G_1=\{t, x: 0<t<T, \; x_1+a_1t<x<x_0(t)\}$$

$$G_2=\{t, x: 0<t<T, \; x_0(t)<x<x_2-a_2t\}$$

Очевидно, что $G=G_1\cup G_2$. Здесь линия $x=x_1+a_1t$ (прямая *1*) – характеристика системы (1.2) при $i=1$, линия $x=x_2-a_2t$ (прямая *2*) – характеристика системы (1.2) при $i=2$ (фигура).

Возьмем произвольную точку $P(t_0, x_0(t_0))$ на линии $x_0=x_0(t)$ (прямая *3*) и пусть целое число m_1 обозначает число характеристик системы (1.2) при $i=1$, проходящих через точку P и пересекающих область G_1 при $t>t_0$, а целое число m_2 обозначает число характеристик системы (1.2) при $i=2$, проходящих через P и пересекающих область G_2 при $t>t_0$.



Далее рассмотрим две вспомогательные задачи. В области G_1 найти решение системы (1.2) при $i=1$, удовлетворяющее начальным условиям (2.1) на отрезке $(x_1, 0)$, а на линии $x_0=x_0(t)$ будем считать известными m_1 функций из числа u_1, v_1, ε_1, γ_1. Аналогично рассмотрим вторую задачу: в области G_2 найти решение системы (1.2) при $i=2$, удовлетворяющее начальным условиям (2.1) на отрезке $(0, x_2)$, а на линии $x_0=x_0(t)$ будем считать известными m_2 функций из числа u_2, v_2, ε_2, γ_2. Тогда из теоремы существования и единственности для систем линейных гиперболических уравнений с двумя независящими переменными следует, что каждая задача имеет единственное решение, непрерывное вплоть до границы [9].

Таким образом, решения рассмотренных выше двух вспомогательных задач дадут решение исходной задачи, если m_1 функций, заданных на линии $x_0=x_0(t)$ со стороны области G_1 и m_2 функций, заданных на линии $x_0=x_0(t)$ со стороны области G_2, удовлетворяют уравнениям (1.3)–(1.5) на фронте $x_0=x_0(t)$. Если $m_1+m_2+1>5$, то получим неопределенную систему уравнений, которая, вообще говоря, имеет неединственное решение. Если $m_1+m_2+1<5$, то система уравнений будет переопределенной и, вообще говоря, неразрешимой. Следовательно при $m_1+m_2=4$ решение исходной локальной задачи Коши, если оно существует, единственно.

Учитывая неравенства (1.1), наложенные на скорости продольных и поперечных волн, и условие $m_1+m_2=4$, легко показать, что величина скорости фронта разрушения должна удовлетворять неравенствам

$$0<D<b_1, \quad b_2<D<a_1. \tag{2.2}$$

Приведем более строгие аргументы о невозможности движения фронта разрушения со сверхзвуковыми скоростями, $D>a_2$. В этом случае нет характеристик системы (1.2) при $i=2$, проходящих через любую точку $P(t_0, x_0(t_0))$ на линии $x_0=x_0(t)$ и пересекающих область G_2 перед фронтом при $t>t_0$. Из этого следует, что в области G_2 существует единственное непрерывное вплоть до границы решение $u_2=u_2(t, x)$, $v_2=v_2(t, x)$, $\varepsilon_2=\varepsilon_2(t, x)$, $\gamma_2=\gamma_2(t, x)$ вспомогательной задачи, зависящее только от начальных условий на отрезке $(0, x_2)$. Тогда очевидно, что предельные значения функций $\varepsilon_2=\varepsilon_2(t, x)$, $\gamma_2=\gamma_2(t, x)$ при $(t, x)\to(t_0, x_0(t_0))$ в общем случае не будут удовлетворять критерию разрушения перед фронтом, а значит, задача о движении фронта окажется неразрешимой. Следовательно, сверхзвуковое движение фронта в схеме с силовым критерием невозможно. Однако если ввести в схему какие-либо дополнительные внешние факторы, то вполне возможно, что скорость D может оказаться сверхзвуковой.

Вернемся к неравенствам (2.2) и покажем, в чем состоит внутреннее противоречие рассматриваемой схемы разрушения.

Будем считать, что в момент времени $t=0$ приводятся в соприкосновение два предварительно напряженных полупространства. Как и выше, примем, что полупространство $x<0$ соответствует разрушенному материалу, полупространство $x>0$ – неразрушенному. Примем также, что в начальный момент времени $t=0$ в каждом полупространстве напряжения и скорости не зависят от x, а при $x>0$ скорость равна нулю (очевидно, что этого можно достичь переходом в соответствующую подвижную систему координат). Рассматриваемая здесь задача отличается от сформулированной выше локальной задачи Коши тем, что начальные условия приняты постоянными и задача ставится не на конечном отрезке (x_1, x_2), а на всей оси OX.

В зависимости от начальных условий решение задачи должно иметь одну из следующих структур: 1) разлет полупространств, т. е. при $t>0$ полупространства не контактируют; 2) при $t>0$ полупространства находятся в контакте друг с другом, фронта разрушения нет и напряжения нигде не превышают критерия разрушения, $x_0=0$; 3) при $t>0$ начинается разрушение на фронте, распространяющемся со скоростью $D>0$. Очевидно, как строится решение в первых двух случаях. Остановимся подробнее на построении решения в третьем случае.

При $t>0$ структура решения зависит от величины скорости фронта разрушения D. Если $0<D<b_1$, то решение отыскивается в виде комбинации следующих волн: в полупространстве $x<0$ распространяются в отрицательном направлении оси OX упругие продольная и поперечная волны, в полупространстве $x>0$ распространяются фронт разрушения со скоростью D, упругие продольная и поперечная волны. Если $b_2<D<a_1$, то в полупространстве $x<0$ распространяются упругая продольная и две поперечных волны, одна в отрицательном направлении оси OX, другая – в положительном; в полупространстве $x>0$ распространяется фронт разрушения и упругая продольная волна. В обоих случаях задача сводится к определению четырех величин u_1, v_1, ε_1, γ_1 за фронтом разрушения и четырех величин u_2, v_2, ε_2, γ_2 перед фронтом разрушения и скорости фронта D из четырех уравнений (1.3), (1.4), уравнения (1.5) и четырех уравнений на фронте каждой упругой волны, связывающих значения инвариантов Римана перед фронтом упругой волны со значением за фронтом волны.

Таким образом, для определения девяти величин u_1, v_1, ε_1, γ_1, u_2, v_2, ε_2, γ_2, D имеем девять уравнений, которые, за исключением уравнения, соответствующего критерию разрушения, линейны по всем переменным, кроме D. Выражая через D все остальные неизвестные и подставляя их в критерий разрушения, сводим задачу к решению одного уравнения относительно D:

$$\psi(D, u_{10}, v_{10}, \varepsilon_{10}, \gamma_{10}, \varepsilon_{20}, \gamma_{20}) \equiv \varphi(\sigma_{ij}(D)) = 0 \qquad (2.3)$$

Здесь параметры u_{i0}, v_{i0}, ε_{i0}, γ_{i0} $(i=1, 2)$ обозначают начальные условия при $x<0$ и $x>0$ соответственно.

Рассмотрим вначале одномерную задачу, когда касательные напряжения всюду равны нулю, т. е. $\gamma_{i0}\equiv 0$. Легко показать, что в этом случае решение задачи распада единственно при условии, что начальные условия при $x>0$ не нарушают критерий разрушения (1.5). Единственность означает, что при $t>0$ два полупространства либо отскакивают друг от друга, либо находятся в контакте друг с другом, и тогда напряжения на контакте между ними не нарушают критерий разрушения, либо существует решение с фронтом разрушения, причем скорость фронта удовлетворяет неравенству $0<D<a_1$. В частности, в этой задаче скорость фронта D может лежать на интервале (b_1, b_2); по-прежнему считаются выполненными неравенства (1.1).

Предположим, что начальные условия одномерной задачи таковы, что скорость фронта $D_*\in(b_1, b_2)$. Кроме того, при $t=0$ к каждому полупространству приложены сколь угодно малые касательные напряжения $(\gamma_i \ll 1)$. Тогда решение задачи распада с такими начальными условиями должно удовлетворять ограничениям (2.2), т. е. скорость фронта D не должна лежать на интервале (b_1, b_2), а для гладких функций $\varphi=\varphi(\sigma)$ по теореме о неявной функции [10] уравнение (2.3) имеет решение D, близкое к D_*, значит, $D\in(b_1, b_2)$. Получилось противоречие, которое можно сформулировать в виде утверждения. Если начальные условия u_1, v_1, ε_1, γ_1, ε_2, γ_2 задачи распада таковы, что одномерная задача распада с начальными условиями u_1, ε_1, $u_2=0$, ε_2 имеет решение с фронтом разрушения и скорость фронта D принадлежит интервалу (b_1, b_2), то исходная задача разрешима неединственным образом.

Важно подчеркнуть, что некорректность задачи имеет место только при сложном напряженном состоянии, тогда как одномерная задача разрешима единственным образом. В этой связи возникает вопрос, будет ли корректной задача о движении фронта разрушения при сложном напряженном состоянии, если разрушенный материал описывается моделью упругопластического течения.

Замечание. Утверждение о противоречивости рассмотренной схемы разрушения было основано на априорных неравенствах (1.1) и вытекающих из последующих рассуждений неравенствах (2.2). Возникает вопрос, как изменятся выводы, если вместо условий (1.1) взять другие. Можно показать, что при $a_1>a_2$ уже одномерная задача распада будет разрешима ни при любых начальных условиях и не будет иметь решений с фронтом разрушения. Так что ограничение $a_1<a_2$ существенно. Если $b_1>b_2$, то вместо ограничений (2.2) будут ограничения $0<D<b_2$, $b_1<D<a_1$, а вывод о противоречивости схемы останется в силе.

Ограничения (2.2) сохраняют силу и в более общем случае, когда критерий разрушения зависит от скорости фронта разрушения D, а также от предельных значений всех величин u, v, ε, γ как перед фронтом, так и за ним.

Автор благодарит Н. В. Зволинского за внимание к работе и С. С. Григоряна за обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Николаевский В. Н., Лившиц Л. Д., Сизов И. А.* Механические свойства горных пород: Деформации и разрушение.— В кн.: Итоги науки и техники. Сер. Механика твердых деформируемых тел. М.: ВИНИТИ, 1978, т. 11, с. 123—250.
2. *Ставрогин А. А., Протосеня А. Г.* Пластичность горных пород. М.: Недра, 1979. 301 с.
3. *Григорян С. С.* Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения горных пород.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 4, с. 643—669.
4. *Слепян Л. И.* О волне хрупкого разрушения.— Инж. ж. МТТ, 1968, № 4, с. 190—192.
5. *Галин Л. А., Черепанов Г. П.* О самоподдерживающемся разрушении напряженного хрупкого тела.— Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 3, с. 543—546.
6. *Слепян Л. И., Троянкина Л. В.* Разрушение хрупкого стержня при продольном ударе.— Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 2, с. 63—72.
7. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
8. *Григорян С. С.* О некоторых работах по разрушению хрупких тел в динамических условиях.— Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 1, с. 173—181.
9. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
10. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 1. М.— Л.: Гостехиздат, 1952. 472 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.X.1985