МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1987

УДК 539.4

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УСТАЛОСТНЫХ ТРЕЩИН

КОВЕХ В. М.

Рассмотрена задача о взаимодействии и слиянии трещин циклической усталости в условиях сложного напряженного состояния. Для решения использованы положения объединенной теории роста усталостных трещин [1, 2]. Развит метод численного моделирования процесса роста системы коллинеарных трещин. Приведены результаты расчета подрастания двух и трех трещин различной длины, расположенных на одной прямой. Изучено влияние начальных расстояний между трещинами на процесс их роста.

1. Рассмотрим систему m плоских трещин в теле, находящемся в условиях плоского напряженного состояния или плоской деформации. Трещины коллинеарны и заданы при помощи векторов $\mathbf{l}=(l_1,\ldots l_{2m})$ и $\mathbf{d}=(d_1,\ldots d_{m-1})$, где l_j — характерные размеры трещин, d_n — начальные расстояния между серединами трещин. Номинальные напряжения $\sigma_x(t)$, $\sigma_y(t)$, $\tau_{xy}(t)$ циклически изменяются во времени. Их изменение будем характеризовать размахами $\Delta\sigma_x(N)$, $\Delta\sigma_y(N)$, $\Delta\tau_{xy}(N)$ в течение N-го цикла.

Согласно теории [1, 2] рост усталостных трещин определяется взаимодействием двух механизмов: высвобождения энергии при продвижении трещины и накопления микроповреждений у ее фронта. Усталостная трещина растет только тогда, когда нарушается условие устойчивости по Гриффитсу, сформулированное с учетом накопленных микроповреждений. После продвижения фронта на отрезок, определенный условием энергетического баланса и имеющий порядок характерного радиуса кривизны на фронте трещины или характерного размера структуры, рост прекращается до следующего момента нарушения устойчивости. Если нового устойчивого размера трещины в пределах тела не существует, то это означает финальное разрушение тела. Для материала тела примем модель линейной механики разрушения с тем существенным отличием, что будем учитывать рассеянные микроповреждения.

Предполагаем, что рост каждой из m трещин происходит в ее начальной плоскости. В этом случае траектория продвижения фронта любой трещины заранее определена и задача становится $2m$-параметрической. Система трещин в течение N-го цикла подрастает по m_1 обобщенным координатам, если выполняется условие

$$\sup_{t_{N-1}<t\leqslant t_N}\{G_j[\mathbf{l}(t),\mathbf{d}(t),\sigma_y(t),\tau_{xy}(t)]-$$
$$-\Gamma_j[\mathbf{l}(t),\mathbf{d}(t),\varphi_1(t),\varphi_2(t)]\}>0\qquad(j=1,\ldots m_1)\tag{1.1}$$

Здесь $(t_{N-1},\ t_N]$ — полуинтервал, отвечающий N-му циклу. В условие (1.1) входит обобщенная сила G_j, продвигающая систему трещин по j-й координате и зависящая помимо $\mathbf{l}$ и $\mathbf{d}$ от значений номинальных напряжений $\sigma_y(t)$ и $\tau_{xy}(t)$. Для изотропного материала определим ее по формуле Ирвина

$$G_j=\frac{1-\nu^2}{E}(K_{1j}^2+K_{2j}^2)\qquad(j=1,\ldots m_1)\tag{1.2}$$

Здесь K_{1j}, K_{2j} — коэффициенты интенсивности напряжений, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль упругости.

По значениям коэффициентов интенсивности напряжений для взаимодействующих трещин имеется обширная литература (см., например, [3]). При отсутствии необходимого решения в литературе, нужный результат можно получить, например, методом сингулярных интегральных уравнений, подобрав соответствующую асимптотическую аппроксимацию.

В условие (1.1) входит также обобщенная сила Γ_j сопротивления продвижению фронта трещины по j-й координате. Сила Γ_j зависит от уровня повреждений перед фронтом трещины. Будем различать две меры рассеянных повреждений. Мера $\varphi_1=(\varphi_{11},\ldots\varphi_{1,2m})$ учитывает микротрещины нормального отрыва, ориентированные вдоль оси трещины. Мера $\varphi_2=(\varphi_{21},\ldots\varphi_{2,2m})$ учитывает микротрещины сдвига, ориентированные в том же направлении. Примем, что меры повреждений могут быть вычислены из разностных уравнений [2]:

$$\varphi_{1j}(\lambda_j,N)-\varphi_{1j}(\lambda_j,N-1)=(\Delta\sigma_j-\Delta\sigma_{th})^{n_1}/\sigma_f^{n_1} \tag{1.3}$$
$$\varphi_{2j}(\lambda_j,N)-\varphi_{2j}(\lambda_j,N-1)=(\Delta\tau_j-\Delta\tau_{th})^{n_2}/\tau_f^{n_2}\quad (j=1,\ldots,m)$$

Здесь $\Delta\sigma_j(\lambda_j,N)$ и $\Delta\tau_j(\lambda_j,N)$ — соответственно размахи напряжений отрыва и напряжений сдвига в течение N-го цикла в точке, лежащей на продолжении соответствующей трещины в направлении j-й обобщенной координаты, σ_f, τ_f — характеристики материала, описывающие его сопротивление накоплению рассеянных повреждений, $\Delta\sigma_{th}\geqslant 0$, $\Delta\tau_{th}\geqslant 0$ — пороговые значения, начиная с которых происходит накопление повреждений, n_1, n_2 — постоянные показатели, аналогичные показателям кривых усталости. При вычислении σ_j, τ_j принимаем, что фронт трещины создает конечную концентрацию напряжений, величина которой определяется соотношением между размерами трещин, расстояниями между их серединами и характерным радиусом кривизны на фронте трещины ρ. Этот радиус, по предположению теории [1, 2], при заданных условиях окружающей среды и заданной температуре является постоянной материала. В пределах одного элемента структуры размера ρ_0 напряжения σ_j, τ_j считаем постоянными. На больших расстояниях от фронта воспользуемся формулами Инглиса — Вильямса. Обобщенную силу Γ_j определим по формуле $\Gamma_j=2\gamma_0[1-(\varphi_{1j}+\varphi_{2j})^\alpha]^\beta$, аналогичной используемой в [2]. Здесь γ_0 — удельная работа разрушения при продвижении трещины в неповрежденном материале, α, β — положительные числа.

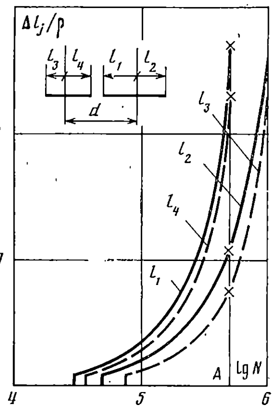
Приращение $\Delta l_j(N)=l_j(N)-l_j(N-1)$ размера трещины по j-й координате за N-й цикл нагружения найдем из условия энергетического баланса

$$\int\limits_{l(N-1)}^{l(N)} G_j[K_{1j}(\lambda,t_*),K_{2j}(\lambda,t_*)]\,d\lambda=\int\limits_{l(N-1)}^{l(N)}\Gamma_j[\varphi_{1j}(\lambda,t_*),\varphi_{2j}(\lambda,t_*)]\,d\lambda \tag{1.4}$$

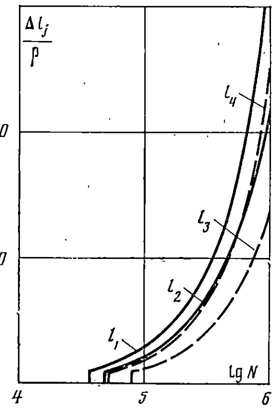
При этом t_* — момент достижения супремума в условии (1.1). Принято, что приращение вектора λ происходит по обобщенной координате l_j, а остальные координаты остаются неизменными. Таким образом, представленный метод является в сущности численным экспериментом, моделирующим рост усталостных трещин.

2. Рассмотрим случай, когда тело ослаблено системой двух коллинеарных трещин неравной длины (фиг. 1). Для начальной полудлины n-й трещины введем обозначение l_{n0}, для текущей — l_n°. Тело подвержено циклическому нагружению усилиями σ_1 и σ_2 в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Трещины наклонены под углом α_0 к направлению усилия σ_1. В этом случае номинальные напряжения σ_y и τ_{xy} определяются формулами $\sigma_y={}^1/_2[\sigma_1+\sigma_2-(\sigma_1-\sigma_2)\cos 2\alpha_0]$, $\tau_{xy}=(\sigma_1-\sigma_2)\sin\alpha_0\cos\alpha_0$. Выражения для коэффициентов интенсивности напряжений этой задачи получены в [4]

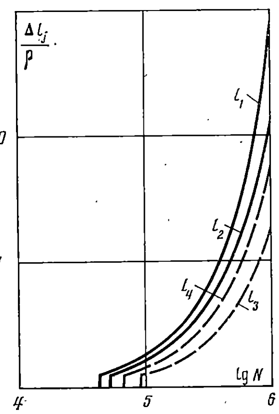
$$K_{1n}^{\pm}-iK_{2n}^{\pm}=\pm s\pi^{1/2}\frac{E_1(r)\,[l_n^\circ\mp(-1)^n d]^2-E_1(r)\,(l_k^\circ)^2+E_2(r)\,[(l_k^\circ-l_k^\circ)^2-d^2]}{2\{l_n^\circ[(\pm l_n^\circ-(-1)^n d)^2-(l_k^\circ)^2]\}^{1/2}} \tag{2.1}$$



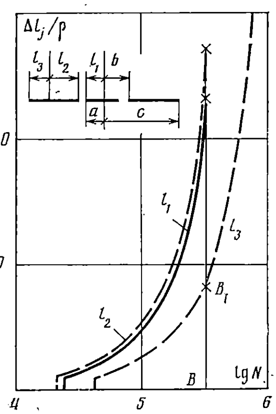
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

$$r^2=\frac{4l_n^\circ l_k^\circ}{d^2-(l_n^\circ-l_k^\circ)^2},\qquad s=\sigma_y-i\tau_{xy}\qquad (n\neq k=1,2)$$

Здесь положительный знак в первой формуле относится к правой вершине трещины, отрицательный — к левой; E_1, E_2 — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, n, k — номера трещины.

Процесс численного моделирования состоит в следующем. Для начальных длин трещин l_{10}, l_{20} проверяем условие (1.1), выполнение которого при $j=k$ означает неустойчивость трещины по k-й координате. Для данного примера неустойчивость по обобщенным координатам l_1 или l_4 означает слияние трещин, по l_2 или l_3 — финальное разрушение тела. При невыполнении условия (1.1) решаем разностные уравнения (1.3) относительно мер повреждений φ_1 и φ_2. На каждом шаге с учетом (1.2) и (2.1) проверяем условие (1.1). Решение уравнений (1.3) прекращаем на цикле N_*, при котором обобщенная сила G_k, продвигающая трещину по k-й координате, становится больше обобщенной силы Γ_k, сдерживающей продвижение. Приращение длины трещины по k-й координате найдем путем численного интегрирования уравнения (1.4). Далее процесс повторяется снова.

Вычисления были выполнены при следующих исходных данных: $\sigma_1=\sigma_2=5$ МПа, $\rho=0{,}0001$ м, $E=200$ ГПа, $\nu=0{,}3$, $n_1=n_2=2$, $K_{1c}=155$ МПа м$^{1/2}$, $\sigma_f=\tau_f=2K_{1c}(\pi\rho)^{-1/2}$, $\Delta\sigma_{th}=\Delta\tau_{th}=0$, $\alpha=2$, $\beta=1$, $\alpha_0=\pi/6$, $l_{10}=0{,}045$ м, $l_{20}=0{,}02$ м. Результаты расчетов для различных расстояний d между трещинами приведены на фиг. 1—3. Для этих графиков $d=0{,}07$; $0{,}075$; $0{,}08$ м соответственно. Графики иллюстрируют зависимости приращений длин трещин по четырем координатам от числа циклов нагружения. Сплошные линии относятся к первой трещине, штриховые — ко второй. На фиг. 1

момент слияния двух трещин отмечен точкой A. С увеличением расстояния между трещинами взаимодействие их быстро ослабевает, что видно по сближению как сплошных, так и штриховых кривых на фиг. 1—3. Число циклов до потери устойчивости увеличивается.

В качестве второго примера рассмотрим три коллинеарные трещины (фиг. 4). Процесс нагружения оставим прежним. Выражения для коэффициентов интенсивности получены в [3]:

$$K_{11}{}^{+}-iK_{21}{}^{+}=s\pi^{1/2}\frac{E_2(r)}{E_1(r)}\left[\frac{(c^2-a^2)a}{b^2-a^2}\right]^{1/2}$$

$$K_{12}{}^{-}-iK_{22}{}^{-}=s\pi^{1/2}\frac{[(c^2-a^2)E_2(r)-(b^2-a^2)E_1(r)]b^{1/2}}{[(b^2-a^2)(c^2-b^2)]^{1/2}E_1(r)} \tag{2.2}$$

$$K_{12}{}^{+}-iK_{22}{}^{+}=s\pi^{1/2}\frac{E_1(r)-E_2(r)}{E_1(r)}\left[\frac{(c^2-a^2)c}{c^2-b^2}\right]^{1/2}$$

$$r^2=(c^2-b^2)/(c^2-a^2),\qquad s=\sigma_y-i\tau_{xy}$$

Вычисления проведены для a=0,02 м, b=0,025 м, c=0,115 м. Остальные численные данные не изменены. Результаты расчетов приведены на фиг. 4. Сплошная линия относится к центральной трещине, штриховые — к концам боковых. В момент B слияния трещин происходит резкое увеличение скорости роста трещины по координате l_3 (точка B_1).

Описанный метод применим для расчета не только коллинеарных трещин, но и трещин, расположенных произвольно. Для расчета последних следует отказаться от предположения о прямолинейности распространения трещин и вычислять траекторию их продвижения. Коэффициенты интенсивности напряжений будут зависеть от геометрии трещин и их взаимного расположения. В этом случае для их определения невозможно получить аналитических выражений, и вычислять эти коэффициенты придется численно (например, методом, предложенным в [4]). Это обстоятельство значительно усложняет расчет. После определения коэффициентов интенсивности напряжений из условия (1.1) найдем направление распространения трещины [5]. Все остальное в методе численного моделирования останется без существенного изменения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* Уравнение роста усталостных трещин.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 153—160.
2. *Болотин В. В.* Объединенные модели в механике разрушения.— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 3, с. 127—137.
3. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацишин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
4. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 324 с.
5. *Болотин В. В.* Энергетический подход к описанию роста усталостных трещин при неодноосном напряженном состоянии.— ПМТФ, 1985, № 2, с. 136—143.

Москва

Поступила в редакцию 18.XI.1985